

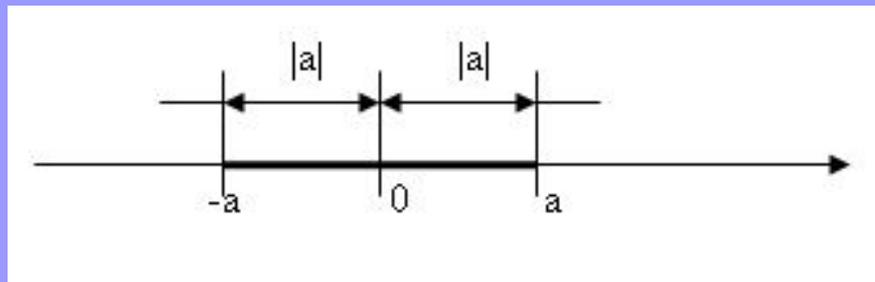
# Определение

Модуль числа **a** или абсолютная величина числа **a** равна **a**, если **a** больше или равно нулю и равна **-a**, если **a** меньше нуля:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

# Геометрическая интерпретация

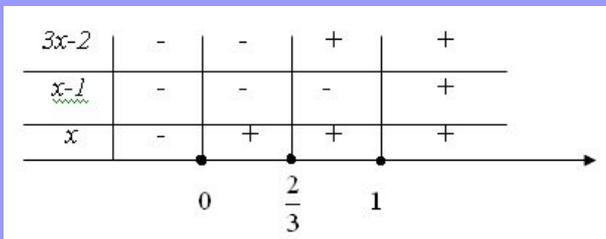
- $|a|$  означает расстояние на координатной прямой от точки, изображающей число  $a$ , до начала отсчета.
- Если  $a \neq 0$ , то на координатной прямой существует две точки  $a$  и  $-a$ , равноудаленные от нуля, модули которых равны.
- Если  $a=0$ , то на координатной прямой  $|a|$  изображается точкой  $0$ .



# Пример 1. Решить неравенство:

$$|3x - 2| - 2|x - 1| \leq 2|x| - 1$$

Решение.



Рассмотрим четыре случая.

$$1) \begin{cases} x \geq 1, \\ 3x - 2 - 2x + 2 \leq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$3) \begin{cases} 0 \leq x < \frac{2}{3} \\ -3x + 2 + 2x - 2 \leq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < \frac{2}{3} \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$$

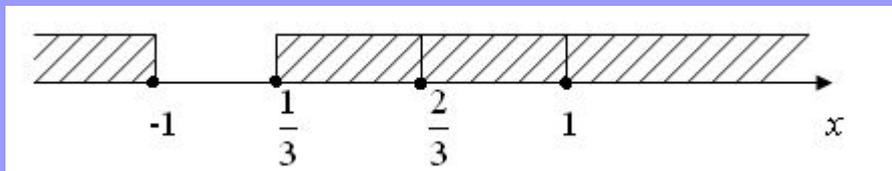
$$2) \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x < 1, \\ 3x - 2 + 2x - 2 \leq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x < 1, \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x < 1$$

$$4) \begin{cases} x < 0, \\ -3x + 2 + 2x - 2 \leq -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1$$

Объединим эти решения:

Ответ:

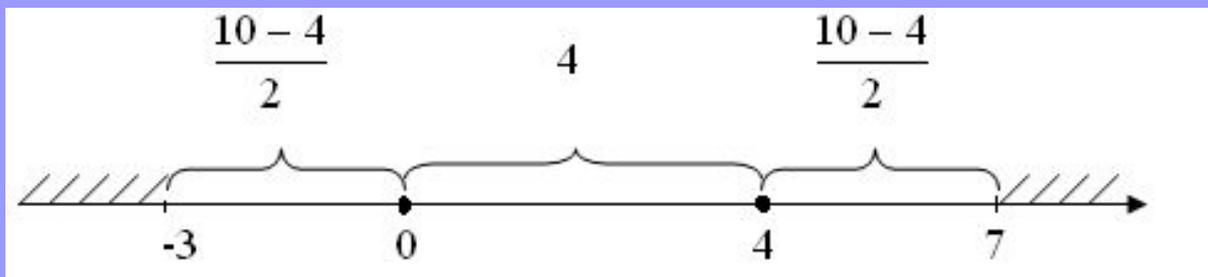
$$(-\infty; -1] \cup \left[ \frac{1}{3}; \infty \right)$$



## Пример 2. Решить уравнение:

$$\left| x^2 + x - 5 \right| + \left| x^2 + x - 9 \right| = 10.$$

*Решение.* Пусть  $x^2 + x - 5 = a$ . Тогда уравнение примет вид  $|a| + |a - 4| = 10$ . Воспользуемся геометрическим смыслом модуля: найдем все точки числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 0 и 4 равна 10.



$$|a| + |a - 4| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3, \\ a = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 5 = -3, \\ x^2 + x - 5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -2, \\ x = -4, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ:  $\{-4, -2, 1, 3\}$

### Пример 3: Решить уравнение:

$$x^2 + |x - 2| = 2(2x - 1).$$

*Решение:* Уравнение равносильно следующему:

$$x^2 - 4x + 2 + |x - 2| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + |x - 2| - 2 = 0.$$

Пусть  $t = |x - 2|$ ,  $t \geq 0$ . Тогда  $(x - 2)^2 = t^2$ , и уравнение примет вид:  $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -2. \end{cases}$

Но  $t \geq 0$ , поэтому  $t = 1$ , откуда  $|x - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 3. \end{cases}$

*Ответ:*  $\{1, 3\}$

## Пример 4. Решить уравнение (неравенство):

а)  $|x^2 + 3x - 20| \leq |x^2 - 3x + 2|;$

б)  $|x^2 - 3x - 2| = 3x - 2;$

в)  $|x^3 - 2x - 1| \geq x^3 + 1;$

г)  $\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1;$

д)  $|3x^2 - 2x - 1| + |2x^2 - x - 1| = |x^2 - x|.$

Решение: а) Так как обе части неравенства неотрицательны, то возведение в квадрат является равносильным преобразованием:

а)

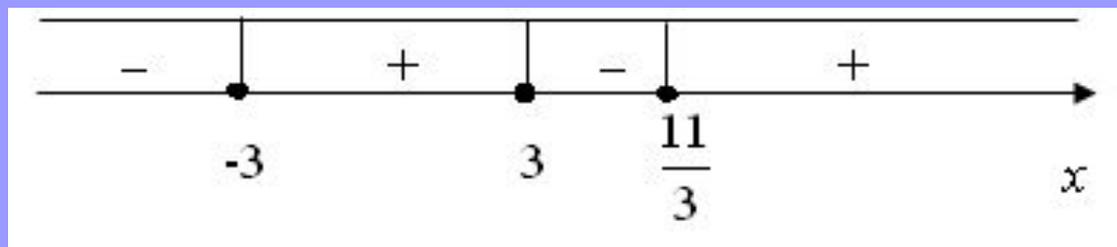
$$\left| x^2 + 3x - 20 \right| \leq \left| x^2 - 3x + 2 \right|;$$

$$(x^2 + 3x - 20)^2 \leq (x^2 - 3x + 2)^2 \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 20)^2 - (x^2 - 3x + 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 20 - x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x - 20 + x^2 - 3x + 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6x - 22)(2x^2 - 18)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left( x - \frac{11}{3} \right) (x - 3)(x + 3) \leq 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов:



Ответ:

$$\left( -\infty; -3 \right] \cup \left[ 3; \frac{11}{3} \right].$$

$$6) \quad |x^2 - 3x - 2| = 3x - 2;$$

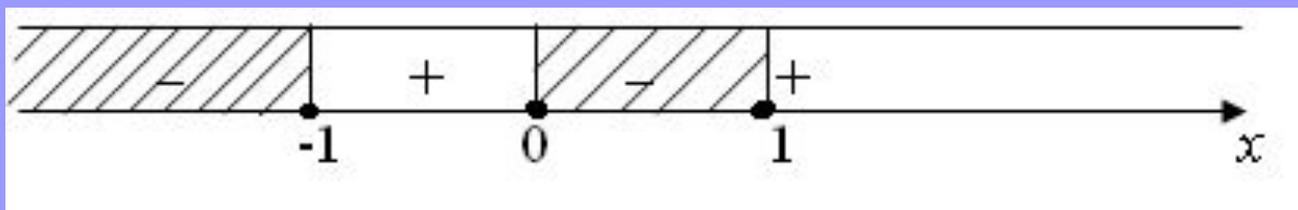
$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0, \\ \begin{cases} x^2 - 3x - 2 = 3x - 2, \\ x^2 - 3x - 2 = -3x + 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ \begin{cases} x = 0, \\ x = 6 \\ x = \pm 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: {2, 6}

$$в) \quad \left| x^3 - 2x - 1 \right| \geq x^3 + 1;$$

$$\begin{cases} x^3 - 2x - 1 \geq x^3 + 1, \\ x^3 - 2x - 1 \leq -x^3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ 2x(x-1)(x+1) \leq 0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство последней совокупности методом интервалов:



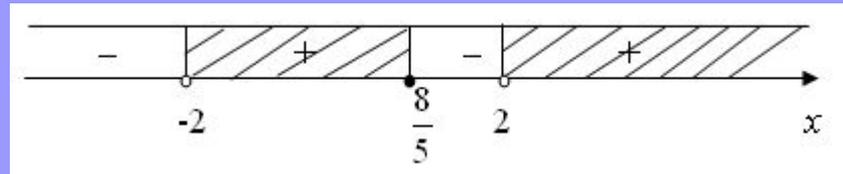
Объединяя найденные решения с решением неравенства , получим ответ.

Ответ:  $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$ .

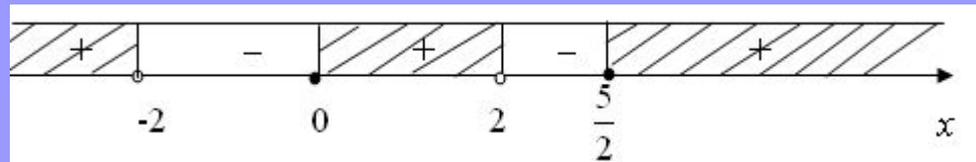
$$\text{г) } \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1;$$

$$-1 \leq \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} - 1 \leq 0, \\ \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - \frac{8}{5}}{(x-2)(x+2)} \geq 0_{(1)} \\ \frac{x(x - \frac{5}{2})}{(x-2)(x+2)} \geq 0_{(2)} \end{cases}$$

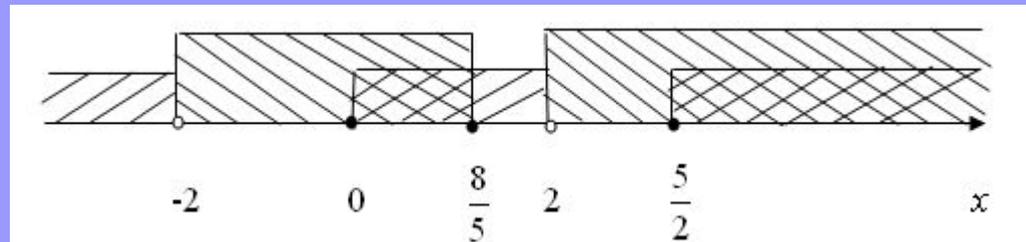
Решим (1) методом интервалов:



Решим (2) методом интервалов:



Найдем пересечение решений:



Ответ:  $\left[0; \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; \infty\right)$ .

$$д) \quad |3x^2 - 2x - 1| + |2x^2 - x - 1| = |x^2 - x|.$$

Перепишем уравнение (так как  $|-a|=|a|$ ):

$$|3x^2 - 2x - 1| + |-2x^2 + x + 1| = |x^2 - x|$$

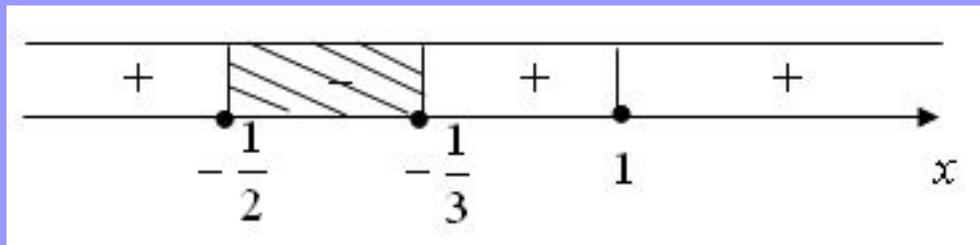
Из свойства 10:

$$|a| + |b| = |a - b| \Leftrightarrow ab \geq 0$$

Тогда уравнение равносильно неравенству:  $(3x^2 - 2x - 1) + (-2x^2 + x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (3x^2 - 2x - 1) + (2x^2 - x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1)^2 \leq 0.$$

Метод интервалов дает:



Ответ:  $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \{1\}$

# Ответы для самоконтроля

1. а)  $x \geq 0$ ; б)  $x \leq 0$ ; в)  $x < 0$ ; г)  $x > 0$ ; д)  $x \geq 0$ ; е)  $x \leq 0$ .
2. а)  $(-\infty; 0] \cup [2; \infty)$ ; б)  $(-\infty; -2] \cup [0; 2]$ ;  
в)  $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$ ; г)  $(-\infty; 1] \cup [2; 3]$ .
3. а)  $\{-2; 8\}$ ; б)  $\{-12; 2\}$ ; в)  $\{-4; 0\}$ ; г)  $\left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$ ; д)  $(-\infty; -15] \cup [1; \infty)$ ;  
е)  $(2; 4)$ ; ж)  $(-\infty; -4) \cup (-1; \infty)$ ; з)  $\{-3, 5; 1, 5\}$ ; и)  $[-4; 5]$ ; к)  $(-\infty; -1, 5] \cup [3, 5; \infty)$ ; л)  $(-1; 1)$ ; м)  $(-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$ ;  
н)  $\{-5; -1\}$ ; о)  $(-\infty; 4]$ ; п)  $\left\{-2; -\frac{4}{3}\right\}$ ; р)  $\{-3; -1; 2; 4\}$ ; с)  $[-3; -1] \cup [2; 4]$ .
4. а)  $\left\{\frac{2}{5}; \frac{4}{3}\right\}$ ; б)  $(-\infty; 1] \cup [5; \infty)$ ;  
в)  $\{-2; 2\}$ ; г)  $(1; \infty)$ .
5. а)  $\{-1; 1\}$ ; б)  $(-\infty; -7] \cup [-5; 5] \cup [7; \infty)$ ; в)  $\{0; 6\}$ ; г)  $[-2; -1] \cup (-1; 0] \cup [2; 3) \cup (3; 4]$ .
6. а)  $\{-1; 1\}$ ; б)  $\left(\frac{2}{3}; 4\right)$ ; в)  $\{-3; 1; 3; 9\}$ ; г)  $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$ ; д)  $\{4; 18\}$ ; е)  $\left\{-\frac{2}{3}; 0; 1\right\}$ ; ж)  $\left[\frac{3}{8}; \frac{1}{2}\right]$ ; з)  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ ; и)  $\left[-1; \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \infty\right)$ ;  
к)  $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ ; л)  $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ ; м)  $(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$ ; н)  $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \infty\right)$ ; о)  $\left(-\infty; -\frac{6}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{7}; \infty\right)$ ; п)  $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right] \cup \{2\}$