

ВЛАСНІ ТА ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ

ЛЕКЦІЯ 12

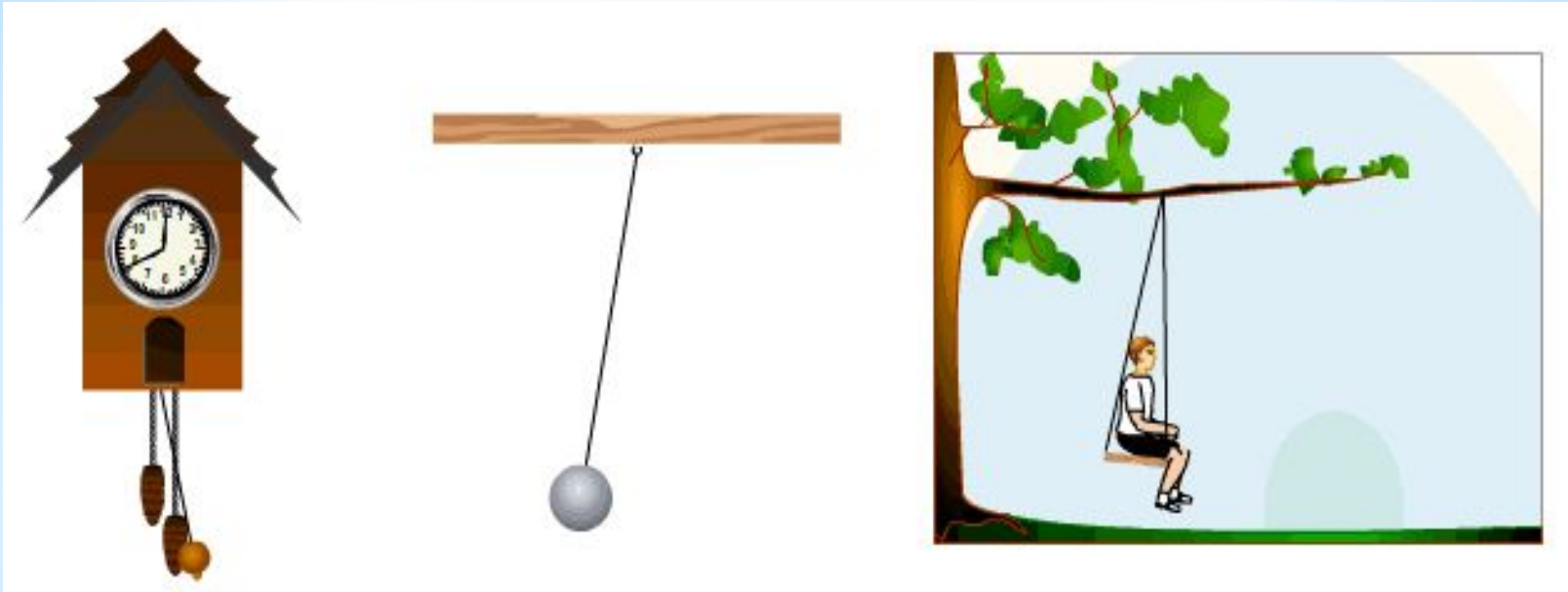
ПЛАН

1. Коливання та їх типи. Гармонічні коливання.
2. Власні механічні незгасаючі коливання, їх характеристики та диференціальне рівняння.
3. Електромагнітні коливання в ідеальному коливальному контурі.
3. Власні згасаючі коливання, їх характеристики та диференціальне рівняння. Аперіодичний процес. Критичний опір.

На самотійне опрацювання:

1. Математичний, пружинний та фізичний маятники. Період та частота їх коливань.
2. Енергія електромагнітних коливань та її перетворення під час коливального процесу.
3. Добротність реальних коливальних систем.

Коливання



Коливальний процес широко поширений у природі та техніці. Наприклад, коливання маятника годинника, змінний струм та ін.

Фізична природа коливань може бути різною, тому розрізняють *механічні, електричні, електромагнітні коливання.*

Проте різні за природою коливальні процеси описуються однаковими характеристиками та рівняннями.

Тому раціональним є використання

єдиного підходу

до вивчення коливань різної фізичної природи.

Коливання та їх типи

Коливання - це рухи або процеси, які характеризуються певною повторюваністю в часі.

Вільні коливання (власні коливання) - це коливання, що здійснюються за рахунок власної енергії при наступній відсутності зовнішніх впливів на коливальну систему, тобто систему, яка здійснює коливання.

Вимушені коливання - це коливання, що відбуваються за рахунок енергії, що надається коливальній системі зовнішніми силами.

Гармонічні коливання

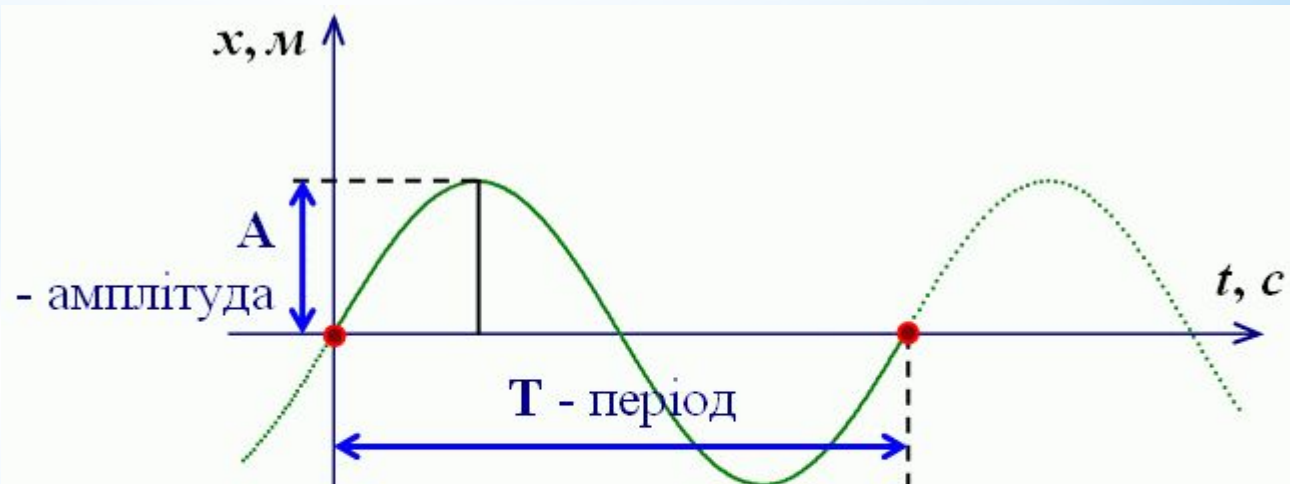
Гармонічними називають коливання, що здійснюються за законом синусу або косинусу, тобто зміна величин описується рівнянням типу

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{або } s = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

де A - *амплітуда коливань*; $(\omega_0 t + \varphi)$ - *фаза коливань*; φ - *початкова фаза* (в момент $t = 0$).

Фаза коливань визначає миттєве значення величини.



Характеристики

гармонічних коливань

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$s = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

**Період гармонічного коливання* - це проміжок часу T , протягом якого фаза коливань отримує приріст 2π , тобто

$$\omega_0(t + T) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi$$

$$\omega_0 T + \omega_0 t + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi$$

$$\omega_0 T = 2\pi \quad /: \omega_0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Частота коливань - це число повних коливань, які здійснюються за одиницю часу

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Характеристики гармонічних коливань

$$\nu = \frac{1}{T}$$

* Підставимо у формулу частоти вираз для періоду коливань у вигляді $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Отримаємо:

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi\nu$$

Тобто величина ω_0 визначає кількість коливань за 2π секунд, тому її називають циклічною (коловою) частотою.

Одиниці вимірювання зазначених величин:

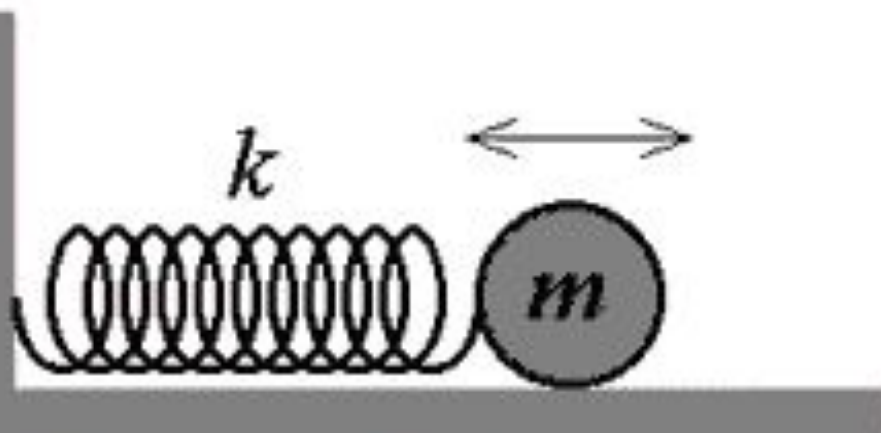
$$[T] = 1\text{с}$$

$$[\nu] = 1\text{Гц}$$

$$[\omega_0] = 1\text{рад/с}$$

Власні незгасаючі механічні КОЛИВАННЯ

Розглянемо ідеальний пружинний маятник, коливання якого відбуваються під дією сили пружності. За законом Гука $F_{\text{пр}} = -kx$, саме вона і надає системі прискорення $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, тому за II законом Ньютона:



$$-kx = ma$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 /: m$$

Власні незгасаючі механічні коливання

*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

Позначивши $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, отримаємо диференціальне рівняння власних незгасаючих механічних коливань:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

розв'язком якого і є вираз вигляду

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Швидкість коливального руху

*Можна визначити як першу похідну від зміщення за часом:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= v_{max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$v_{max} = A\omega_0$ - амплітуда коливань швидкості

Тобто коливання швидкості та зміщення зсунуті за фазою на $\frac{\pi}{2}$

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Прискорення коливального руху

*можна визначити як похідну від швидкості за часом

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= a_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi);$$

$a_{max} = A\omega_0^2$ - амплітуда коливань
прискорення

Тобто коливання швидкості та прискорення
теж зсунуті за фазою

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

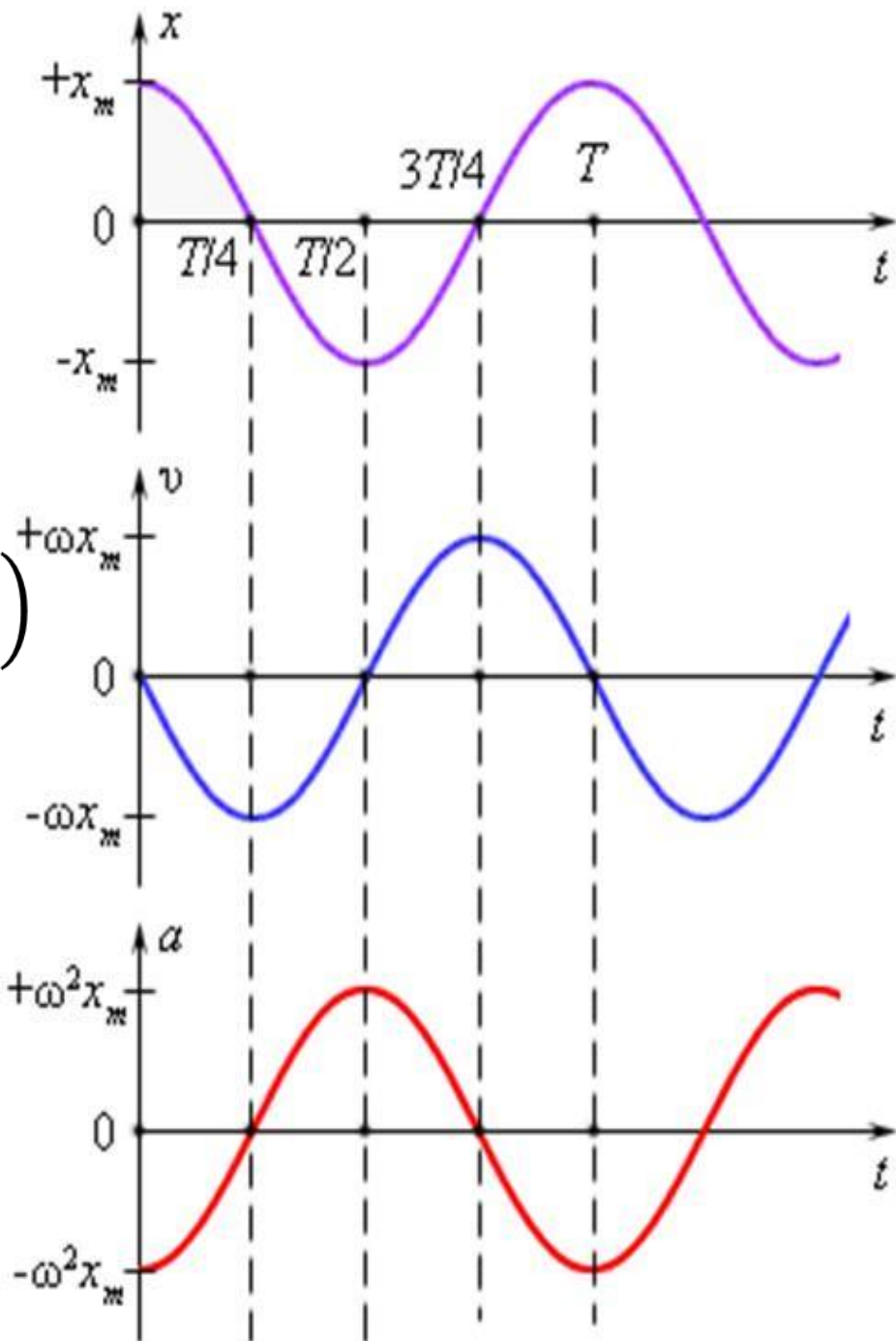
$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = v_{max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_{max} = \omega_0 x_m$$

$$a = a_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

$$a_{max} = \omega_0^2 x_m$$



Сила і потенціальна енергія тіла, що коливається

*
$$F = ma = -m\omega_0^2 x$$

Сила пропорційна зміщенню матеріальної точки і напрямлена до положення рівноваги.

Потенціальна енергія визначається інтегралом

$$\begin{aligned} E_{\text{п}} &= - \int_0^x F dx = \int_0^x m\omega_0^2 x dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \\ &= \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

Енергія коливального руху

✳️ Врахувавши, що швидкість при коливальному русі визначається виразом

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

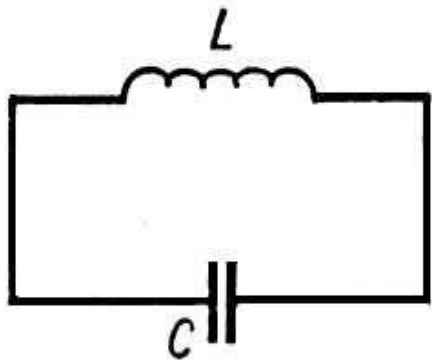
кінетичну енергію можна подати у вигляді

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Тоді повна енергія коливального руху

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{п}} + E_k = \\ &= \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

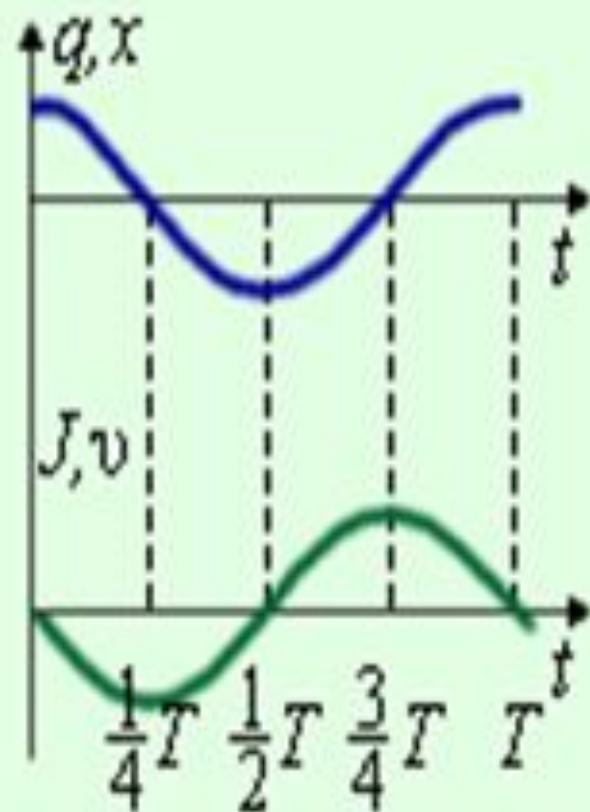
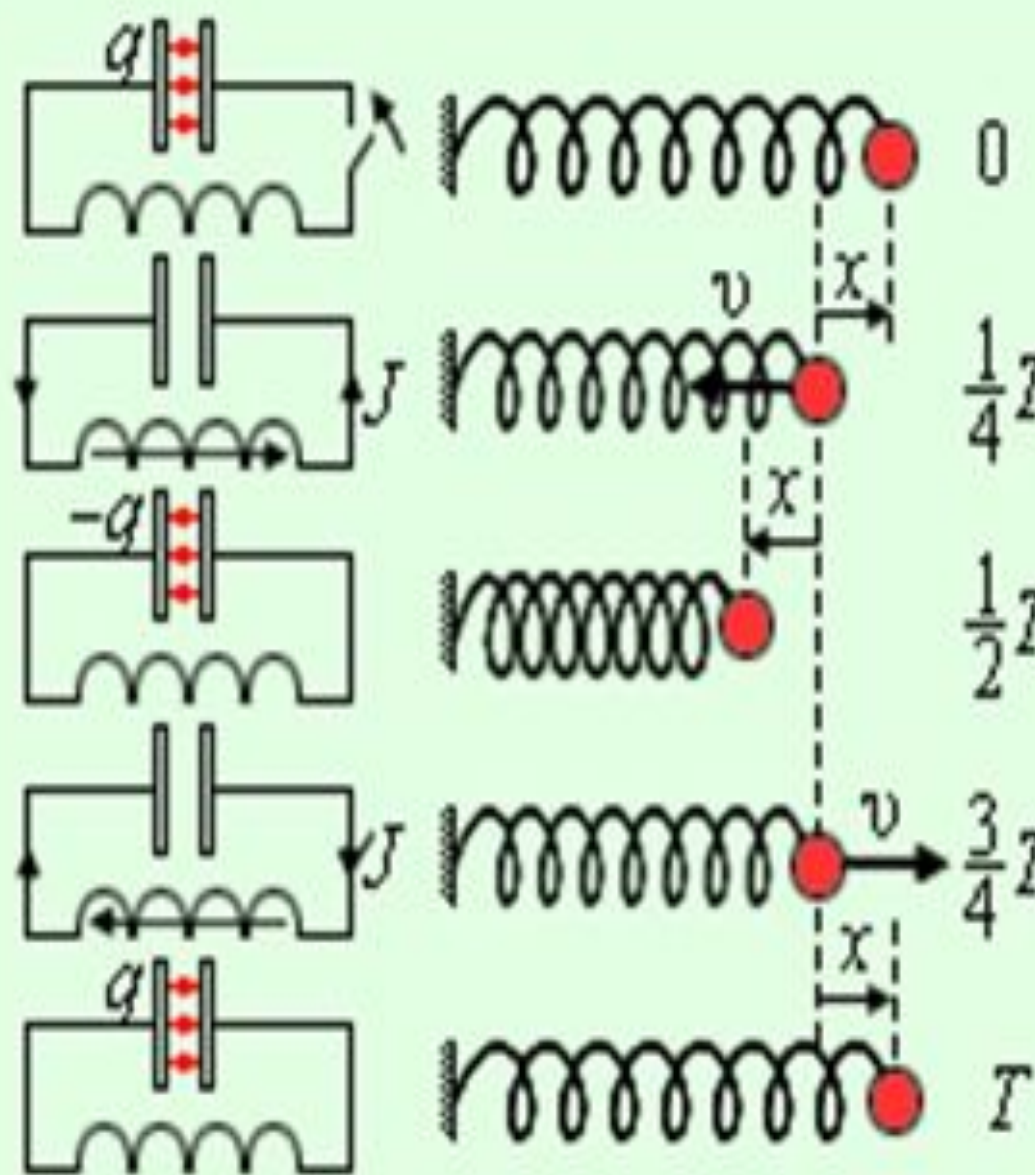


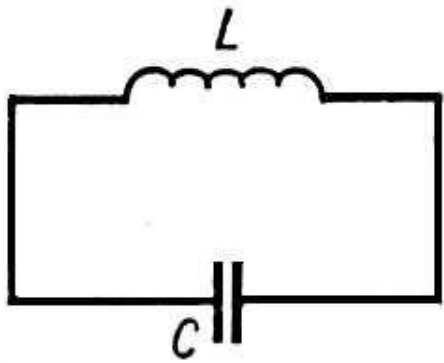
Власні незгасаючі електромагнітні коливання у коливальному контурі

* Коливальним контуром називається система, що складається з конденсатора ємністю C та котушки індуктивністю L , з'єднаних провідниками.

Контур вважається ідеальним у випадку нескінченно малого опору котушки та провідників ($R \rightarrow 0$).

У цьому випадку будуть здійснюватися коливання заряду обкладинок q конденсатора, напруги U на ньому та сили струму i в котушці.





Диференціальне рівняння власних коливань у ідеальному коливальному контурі

За другим правилом Кірхгофа $U_C = \mathcal{E}_{si}$.

Врахуємо, що $U_C = \frac{q}{C}$, $\mathcal{E}_{si} = -L \frac{di}{dt}$,

$i = \frac{dq}{dt}$, тоді $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ і отримаємо:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt}$$
$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \quad /: L$$

**Диференціальне
рівняння власних
коливань у ідеальному
коливальному контурі**

*

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Позначивши $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, отримаємо диференціальне рівняння власних електромагнітних коливань

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

та його розв'язок: $q = q_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Характеристики власних електромагнітних коливань

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

Враховавши позначення

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

для циклічної частоти власних коливань у коливальному контурі отримаємо вираз:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

а для періоду

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (\text{формула Томсона})$$

Характеристики власних електромагнітних коливань

Якщо заряд на обкладинках конденсатора змінюється за законом косинуса

$$q = q_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

То напруга на обкладинках: $U = \frac{q}{C} = \frac{q_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)}{C} =$
 $= \frac{q_{max}}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$U = U_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

де $U_{max} = \frac{q_{max}}{C}$ - амплітуда напруги

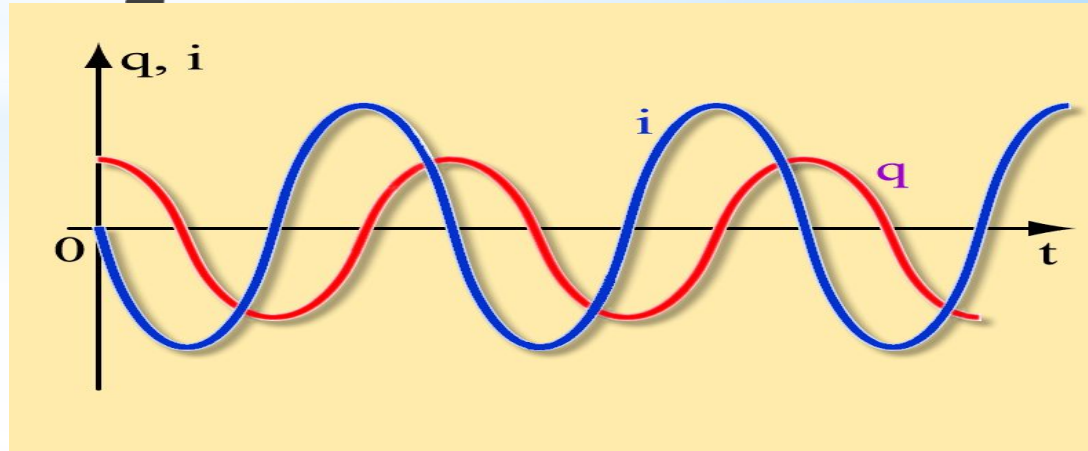
Коливання напруги і заряду відбуваються у одній фазі

Характеристики власних електромагнітних коливань

* Сила струму в контурі при зміні заряду за законом $q = q_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ визначається як похідна від заряду за часом

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_{max} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = \\ = i_{max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

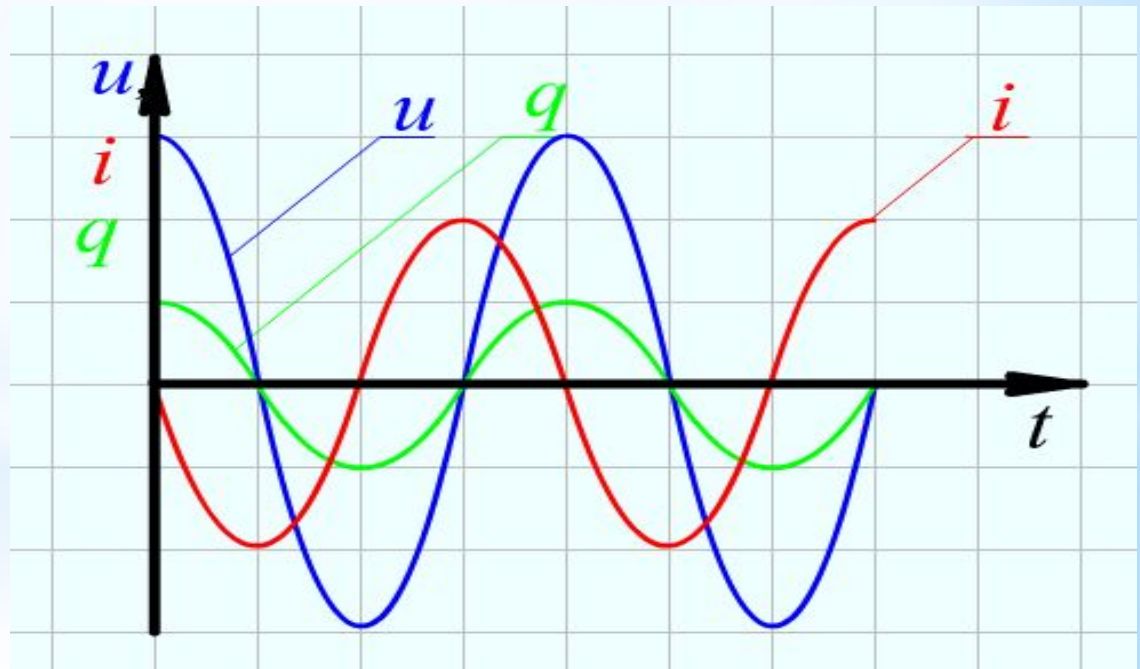
Де $i_{max} = q_{max} \omega_0$ - амплітуда струму



$$q = q_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$U = U_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$i = i_{max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$



Власні незгасаючі коливання - єдиний підхід

Колівання	Диференціальне рівняння	Його розв'язок
Механічні		
Електро-магнітні		

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \quad \longrightarrow \quad s = s_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Згасаючі коливання

В реальних коливальних системах відбувається зменшення їх амплітуди внаслідок втрати енергії: перетворення в теплоту через тертя в механічних коливальних системах, омічні втрати та випромінювання електромагнітної енергії в електричних коливальних системах.

Розглянемо згасаючі коливання в лінійних коливальних системах, в яких параметри, що визначають фізичні властивості системи, під час процесу коливань не змінюються.

Згасаючі механічні КОЛИВАННЯ

* При русі реального пружинного маятника на нього, крім сили пружності, діє також сила тертя, яка пропорційна швидкості руху маятника:

$$F_{\text{тер}} = -rv = -r \frac{dx}{dt}$$

У цьому випадку II закон Ньютона набуває вигляду:

$$-kx - rv = ma$$

$$-kx - r \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Згасаючі механічні коливання

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad /: m$$

*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Ввівши позначення $\frac{r}{m} = 2\beta$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, отримаємо диференціальне рівняння згасаючих механічних коливань:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

розв'язком якого є рівняння вигляду

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{r}{m} = 2\beta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

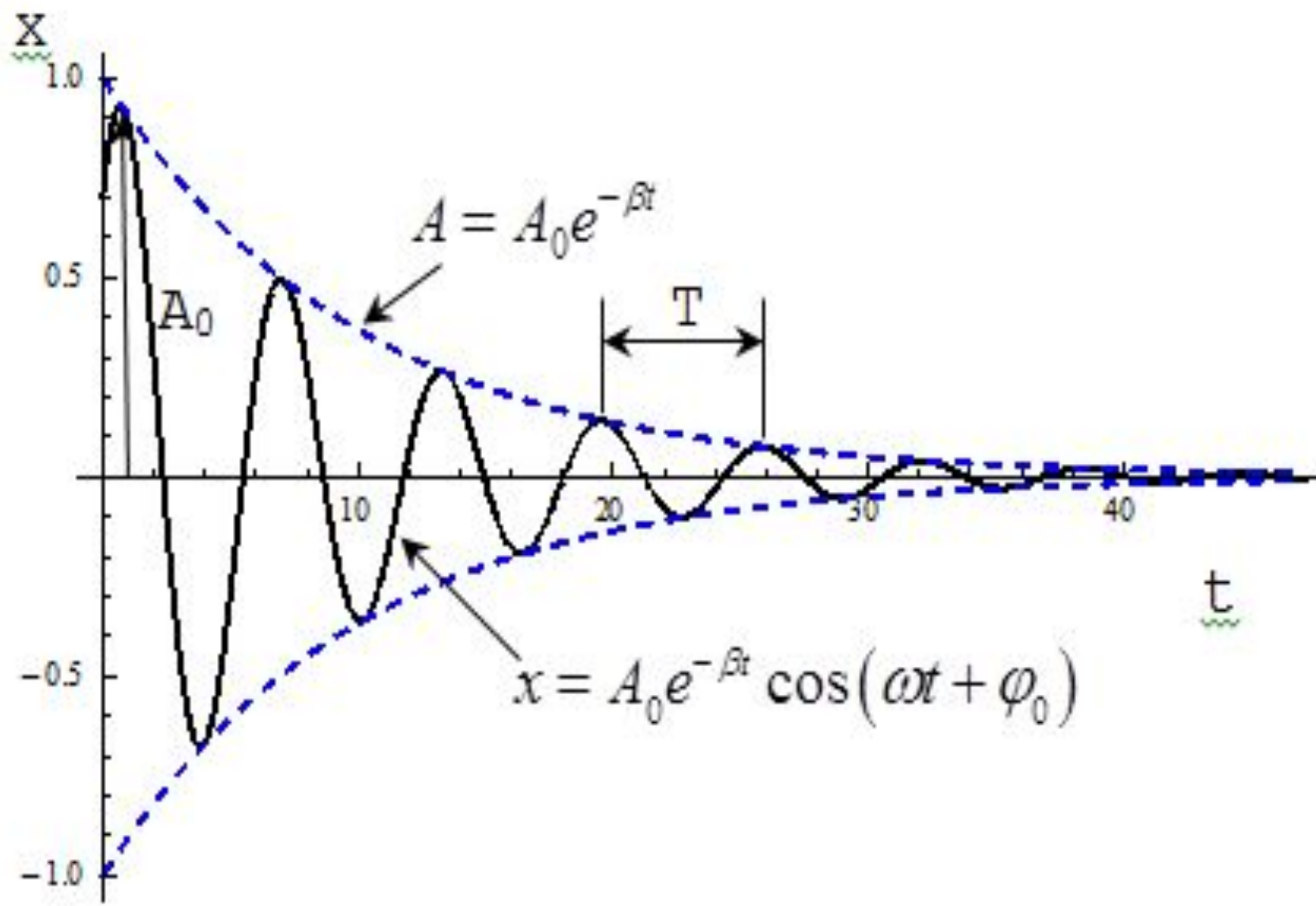
Характеристики згасаючих механічних коливань

*тут $\beta = \frac{r}{2m}$ - коефіцієнт згасання,

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - циклічна частота згасаючих коливань,

$A = A_0 e^{-\beta t}$ - амплітуда згасаючих коливань.

Період згасаючих коливань $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$



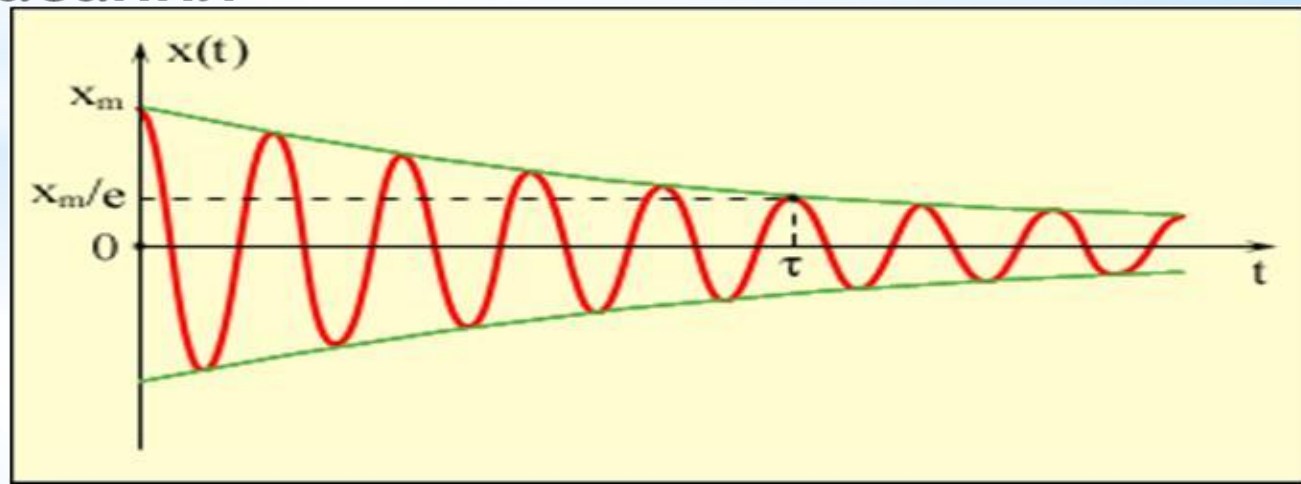
Характеристики згасаючих КОЛИВАНЬ

**Часом релаксації* τ називається час, протягом якого амплітуда згасаючих коливань зменшується в e разів

$$\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e; \quad e^{\beta\tau} = e; \quad \beta\tau = 1$$

Отже, час релаксації є величина, обернена до коефіцієнта згасання

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$



Характеристики згасаючих КОЛИВАНЬ

**Декрементом згасання* називається
відношення амплітуд двох
коливаний $\frac{A(t)}{A(t+T)}$,

а *логарифмічним декрементом згасання δ* -
натуральний логарифм цього відношення.

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

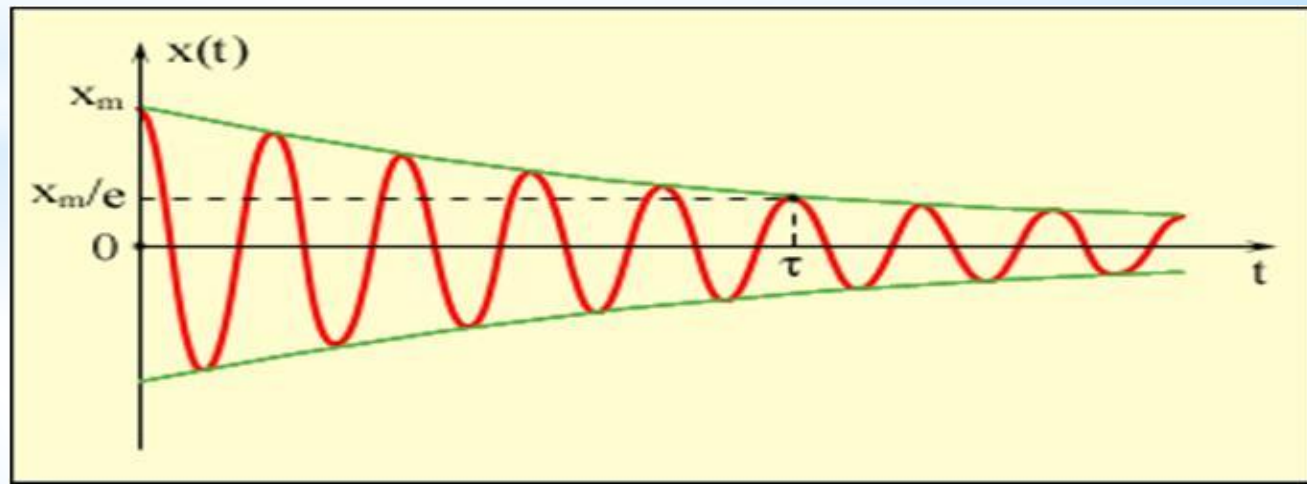
$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

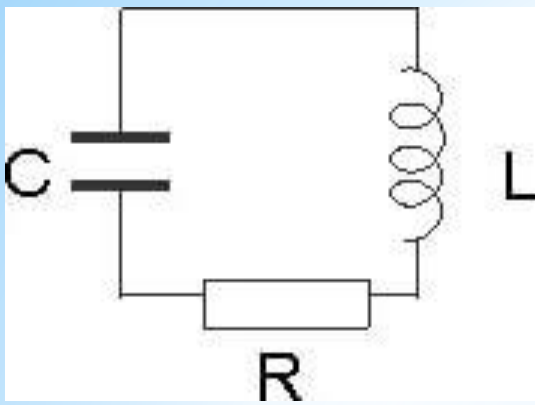
Характеристики згасаючих КОЛИВАНЬ

$$* \quad \delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

Отже, логарифмічний декремент згасання δ чисельно дорівнює величині, оберненій до кількості коливань, протягом яких амплітуда зменшується в e разів.

$$N_e = \frac{\tau}{T}$$





Згасаючі коливання у реальному коливальному контурі

В реальному коливальному контурі електромагнітні коливання є згасаючими, оскільки початкова енергія витрачається на нагрівання провідників згідно закону Джоуля-Ленца. Опором котушки та провідників у цьому випадку знехтувати не можна і друге правило Кірхгофа потрібно записати з врахуванням спаду напруги на опорі R :

$$U_R + U_C = \mathcal{E}_{si}$$
$$IR + \frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt}$$

$$IR + \frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt}$$

Згасаючі коливання у реальному коливальному контурі

*

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 /: L$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Ввівши позначення $\frac{R}{L} = 2\beta$ та $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, отримаємо диференціальне рівняння згасаючих електромагнітних коливань :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

Згасаючі електромагнітні КОЛИВАННЯ

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

Розв'язком цього рівняння є вираз вигляду:

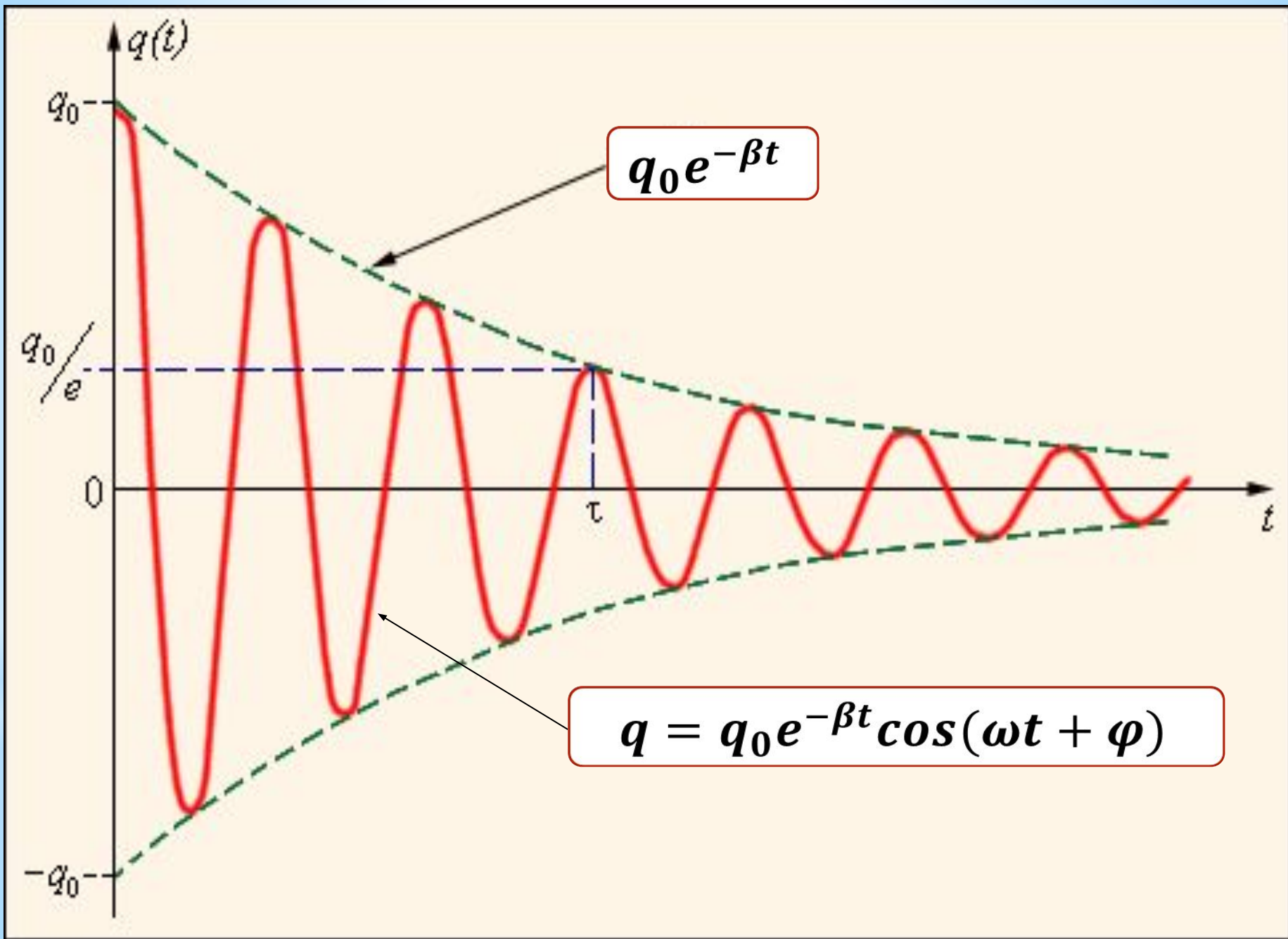
$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

де $\beta = \frac{R}{2L}$ – коефіцієнт згасання,

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклічна частота згасаючих
КОЛИВАНЬ,

$q = q_0 e^{-\beta t}$ - амплітуда згасаючих коливань.

Період згасаючих коливань $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$



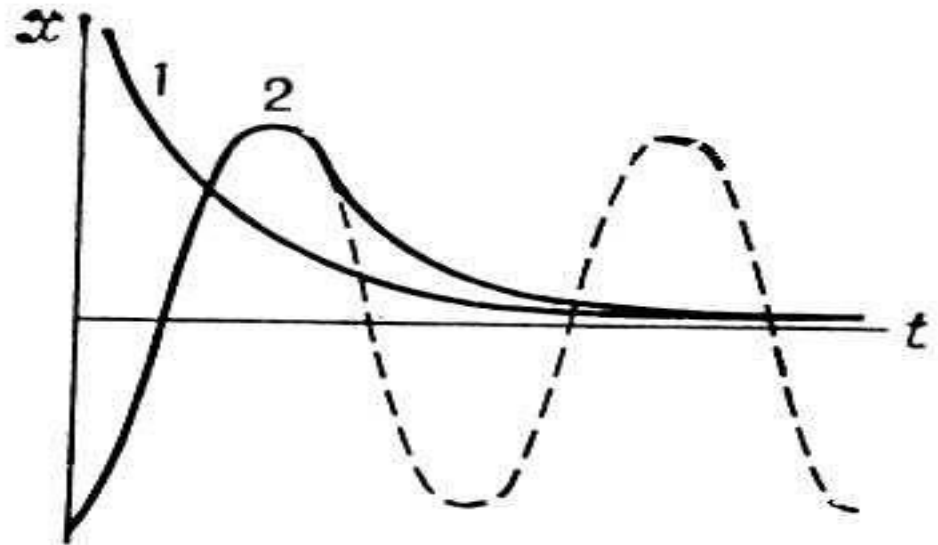
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Аперіодичний процес.

* Проаналізувавши формулу для періода згасаючих коливань, можна зробити висновок про те, що згасаючі коливання можливі за умови

$$\omega_0^2 > \beta^2$$

При $\beta^2 \geq \omega_0^2$ відбуватиметься аперіодична розрядка конденсатора



Критичний опір

* Опір, при якому коливальний процес переходить в аперіодичний, називається *критичним опором*.

Він знаходиться з умови $\beta^2 = \omega_0^2$

$$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

$$R^2 = \frac{4L}{C}$$

$$R_{\text{кр}} = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Вільні згасаючі коливання - єдиний підхід

Коливання	Диференціальне рівняння	Його розв'язок
Механічні		
Електро-магнітні		

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \longrightarrow s = s_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = s_0 e^{-\beta t}; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$