

## Лекция 7

### Тема: "Функции нескольких переменных"

#### Основные понятия функции нескольких переменных.

**Определение.** *Функцией двух переменных* называется правило, которое каждой паре действительных чисел  $(x, y) \in D$  ставит в соответствие единственное число  $z \in E$ .

Переменные  $x$  и  $y$  называются *независимыми переменными* или аргументами, переменная  $z$  – *зависимой переменной* или *функцией*, множество  $D$  называется *областью определения*  $D(f)$ , множество  $E$  называется областью изменения или *множеством значений функции*  $E(f)$ .

Обозначения функции двух переменных:  $z = f(x, y)$  или  $z = z(x, y)$ .

Значение функции для фиксированного значения аргументов  $x_0, y_0$ :  $z_0 = f(x_0, y_0)$ ,  $z_0 = z(x_0, y_0)$  или  $z_0 = z|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ .

**Определение.** *Графиком функции* двух переменных  $z = f(x, y)$  называется множество точек трехмерного пространства  $(x, y, z)$ , аппликата  $z$  которых связана с абсциссой  $x$  и ординатой  $y$  функциональным соотношением  $z = f(x, y)$ .

График функции двух переменных  $z = f(x, y)$  представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве.

Основными способами задания функции двух переменных являются аналитический (функция задается посредством формул в явном или неявном виде) и табличный.

**Определение.** *Функцией  $n$  переменных* называется правило, которое каждому набору действительных чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$  ставит в соответствие единственное число  $z \in E$ .

Функция  $n$  переменных обозначается  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

## Предел и непрерывность функции двух переменных.

**Определение.**  *$\delta$ -окрестностью точки  $P_0(x_0, y_0)$*  называется внутренняя часть круга радиуса  $\delta$  с центром в этой точке:  $\{P(x, y) : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$ .

Любая точка  $P$  этой  $\delta$ -окрестности находится от точки  $P_0$  на расстоянии меньшем  $\delta$ .

Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена в некоторой окрестности точки  $P_0(x_0, y_0)$  за исключением быть может самой точки  $P_0$ .

**Определение.** Число  $A$  называется *пределом функции двух переменных* или *двойным пределом функции*  $z = f(x, y)$  при  $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ , если для любого числа  $\varepsilon$  найдется такая  $\delta$ -окрестность точки  $P_0(x_0, y_0)$ , что для любой точки  $P(x, y)$  этой окрестности, за исключением точки  $P_0$ , будет выполнено неравенство:

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

При этом записывают:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \text{ или } \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

Из определений, следует что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} f(x, y) = A,$$

где  $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$  – расстояние между точками  $P$  и  $P_0$ .

**Пример.** Найти  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9} - 3}$ .

**Решение:** Так как  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , то  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9} - 3} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + 9} - 3} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2 + 9} + 3)}{\rho^2 + 9 - 9} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2 + 9} + 3)}{\rho^2 + 9 - 9} = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{\rho^2 + 9} + 3) = 6. \end{aligned}$$

В данном примере функция  $\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9} - 3}$  не определена в точке  $P_0(0;0)$ , но имеет предел при  $P \rightarrow P_0$ .

Заметим, что двойной предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$  при одновременном стремлении обоих

аргументов не обязательно совпадает с повторными пределами

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) \right) \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y) \right),$$

которые не являются новыми понятиями, а вычисляются последовательно как обычные пределы функции одной переменной.

Имеет место теорема, которая позволяет заменить двойной предел функции двух переменных повторным пределом при достаточно широких предположениях.

**Теорема.** Пусть существует  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$ . Предположим, что  $\forall y \in \delta$ -окрестности

точки  $y_0$ ,  $y \neq y_0$ , существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y)$ , тогда существует повторный предел

$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y)$  и он совпадает с двойным пределом

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y).$$

Аналогично, если  $\forall x \in \delta$ -окрестности  $x_0$ ,  $x \neq x_0$ , существует  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y)$ , то

существует и повторный предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y)$  и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y).$$

**Пример.** Вычислить повторные пределы в условиях предыдущего примера.

Решение:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9} - 3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + 9} - 3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 (\sqrt{y^2 + 9} + 3)}{y^2 + 9 - 9} = \lim_{y \rightarrow 0} (\sqrt{y^2 + 9} + 3) = 6.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9} - 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{x^2 + 9 - 9} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 9} + 3) = 6.$$

Определение предела естественным образом распространяется на случай функции  $n$  переменных.

**Определение.** Функция  $n$  переменных  $u = f(P)$  называется **непрерывной в точке**  $P_0$ , если функция определена в этой точке и в некоторой ее окрестности и

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

Точка  $P_0$ , в которой функция  $u = f(P)$  непрерывна, называется **точкой непрерывности** этой функции.

## Частные производные 1-го порядка.

Рассмотрим функцию двух переменных  $z = f(x, y)$ .

Зафиксируем значение одного из аргументов, например  $y$ , положив  $y = y_0$ .

Тогда функция  $f(x, y_0)$  есть функция одной переменной  $x$ .

Пусть она имеет производную в точке  $x_0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Эта производная называется **частной производной** (или частной производной первого порядка) функции  $z = f(x, y)$  по  $x$  в точке  $P_0(x_0, y_0)$  и обозначается символом  $f'_x(x_0, y_0)$ .

Разность  $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$  называется **частным приращением** по  $x$  функции  $z = f(x, y)$  в точке  $P_0(x_0, y_0)$  и обозначается символом  $\Delta_x z$ :

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Учитывая эти обозначения, можно записать

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частное приращение функции  $z = f(x, y)$  по  $y$  и частная производная по  $y$  в точке  $P_0(x_0, y_0)$ :

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции двух переменных по одному из ее аргументов равна пределу отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Частные производные обозначаются следующим образом:

$$f'_x(x, y), f'_y(x, y) \text{ или } z'_x(x, y), z'_y(x, y) \text{ или } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

**Замечание.** Геометрический смысл частной производной  $\frac{\partial z}{\partial x}$ : значение частной

производной  $\frac{\partial z}{\partial x}$  в точке  $P_0(x_0; y_0)$  равно тангенсу угла, составленного с осью  $Ox$  касательной, проведенной в точке  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  к линии пересечения поверхности  $z = f(x; y)$  и плоскости  $y = y_0$ .

Аналогично определяется геометрический смысл частной производной  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

**Замечание.** Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных.

Вследствие этого все правила и формулы дифференцирования, выведенные для производных функции одной переменной, сохраняются для частных производных функции нескольких переменных. Следует лишь помнить, что во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

**Пример.** Найти частные производные первого порядка функции  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$  в точке  $P_0(5; 3)$ .

Решение:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{P_0} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \Big|_{P_0} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \Big|_{P_0} = \frac{5}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \frac{5}{4};$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{P_0} = \frac{-2y}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \Big|_{P_0} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \Big|_{P_0} = -\frac{3}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = -\frac{3}{4}.$$

## Частные производные высших порядков.

Частные производные функции нескольких переменных являются функциями тех же переменных.

Эти функции, в свою очередь, могут иметь частные производные, которые называются *вторыми частными производными* (или *частными производными второго порядка*) исходной функции.

Например, функция  $z = f(x; y)$  двух переменных имеет четыре частные производные второго порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x; y); & \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x; y). \\ \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x; y); & \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x; y). \end{aligned}$$

Функция  $u = f(x; y; z)$  трех переменных имеет девять частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x; y; z); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x; y; z); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = f''_{xz}(x; y; z)$$

и т.д.



Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и более высокого порядка функции нескольких переменных: частной производной  $n$ -го порядка функции нескольких переменных называется частная производная первого порядка от частной производной  $(n-1)$ -го порядка той же функции.

Например, частная производная третьего порядка  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$  функции  $z = f(x; y)$  есть частная производная первого порядка по  $y$  от частной производной второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} : \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)}{\partial y}.$$

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется **смешанной частной производной**.

Например, частные производные  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ,  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$  являются смешанными частными производными функции двух переменных  $z = f(x; y)$ .

**Пример.** Найти смешанные частные производные второго порядка функции  $z = x^2 y^3$ .

**Решение:** Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

Тогда  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2xy^3)'_y = 6xy^2$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (3x^2y^2)'_x = 6xy^2$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Смешанные частные производные одного порядка одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.

В частности для функции двух переменных  $z = f(x, y)$  имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

## Полный дифференциал функции.

Рассмотрим функцию  $z = f(x, y)$ .

Предположим, что ее аргументы  $x$  и  $y$  получают приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

Тогда функция  $z = f(x, y)$  получает полное приращение  $\Delta z$ , которое определяется следующей формулой:  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ .

Геометрически полное приращение функции  $\Delta z$  равно приращению аппликаты графика функции  $z = f(x, y)$  при переходе из точки  $P(x, y)$  в точку  $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ .

**Определение.** *Полным дифференциалом функции двух переменных  $z = f(x, y)$  называется сумма ее частных дифференциалов по  $x$  и по  $y$ :*

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

**Определение.** Функция называется *дифференцируемой в этой точке*  $P(x, y)$ , если приращение функции  $\Delta z$  представляется в виде суммы дифференциала  $dz$  и бесконечно малой  $\omega(\Delta x, \Delta y)$  более высокого порядка, чем расстояние  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  между точками  $P(x, y)$  и  $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ :

$$\Delta z = dz + \omega(\Delta x, \Delta y), \text{ где } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0.$$

В этом случае, видно, что полный дифференциал является **главной частью** приращения функции  $\Delta z$ , **линейной относительно приращений аргументов**  $\Delta x = dx$  и  $\Delta y = dy$ .

Если функция  $z = f(x, y)$  в точке  $P(x, y)$  дифференцируема, то она имеет в этой точке частные производные  $f'_x(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$ . Однако, обратное утверждение неверно.

**Теорема.** Если частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  функции  $z = f(x, y)$  существуют в некоторой окрестности точки  $P(x, y)$  и непрерывны в этой точке, то функция  $z = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $P(x, y)$ .

Все сказанное легко распространяется на функции трех и большего числа переменных.

Например, для дифференцируемой функции трех переменных  $u = f(x; y; z)$  полное приращение  $\Delta u$  выражается формулой:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \omega(\Delta x; \Delta y; \Delta z)$$

при условии  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$  ( $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ ), а ее полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

### **Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.**

Полный дифференциал функции нескольких переменных можно использовать для приближенных вычислений.

Так как  $\Delta z = dz + \omega(\Delta x, \Delta y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy + \omega(\Delta x, \Delta y)$ , где  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0$  и

$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , то

$$\Delta z \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y,$$

т.е. приращение функции можно приближенно заменить ее полным дифференциалом.

Если  $z = f(x, y)$ , то  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ .

Тогда, получаем:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Откуда

$$\Delta f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Аналогичные формулы можно вывести для функции  $n$  переменных.

**Пример.** Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала

$$\frac{1}{\sqrt{2,95^2 + 4,01^2}}.$$

**Решение:** Рассмотрим функцию  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Найдем частные производные:

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}; \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

Положим  $x = 3$ ;  $\Delta x = -0,05$ ;  $y = 4$ ;  $\Delta y = 0,01$ .

$$\text{Тогда } \frac{1}{\sqrt{2,95^2 + 4,01^2}} \approx \frac{1}{5} + \frac{3}{5\sqrt{5}} \cdot 0,05 - \frac{4}{5\sqrt{5}} \cdot 0,01 \approx 0,21.$$

Если  $z = f(x, y)$  имеет частные производные второго порядка, то можно найти дифференциал от полного дифференциала, называемый **дифференциалом второго порядка**:  $d(dz) = d^2z$ .

$$\begin{aligned} d^2z &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dy = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$



Рассмотрим уравнение  $F(x, y) = 0$ , в котором  $F(x, y)$  функция двух переменных.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема (о неявной функции).** Если функция  $F(x, y)$  и ее частные производные  $F'_x(x, y)$  и  $F'_y(x, y)$  определены и непрерывны в некоторой окрестности точки  $P_0(x_0, y_0)$ , в которой  $F(x_0, y_0) = 0$ , а при этом  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , то уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет в некоторой окрестности точки  $P_0(x_0, y_0)$  единственную неявную функцию  $y = y(x)$ , непрерывную и дифференцируемую в некотором интервале, содержащем точку  $x_0$ , причем  $y(x_0) = y_0$ .

Производную неявной функции  $y = y(x)$  можно найти по формуле:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

## Производная по направлению. Градиент скалярного поля.

**Определение.** Если каждой точке  $P$  некоторой области  $D$  трехмерного пространства соответствует число  $u$ , определяемое функцией  $u = f(P) = f(x; y; z)$ , то говорят, что в области  $D$  задано трехмерное **скалярное поле**.

Если поле определяется функцией двух переменных  $z = f(x; y)$ , то оно называется двумерным или плоским скалярным полем.

Пусть в области  $D$  задана дифференцируемая функция  $u = f(x; y; z)$ .

Рассмотрим точку  $P(x, y, z) \in D$  и некоторое направление  $\vec{l}$ , задаваемое единичным вектором  $\vec{l} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы вектора  $\vec{l}$  с осями координат. Пусть  $P_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) \in D$  – какая-нибудь другая точка луча  $l$ .

Разность значений функции  $u$  в точках  $P_1$  и  $P$  назовем приращением этой функции в направлении  $\vec{l}$  и обозначим через  $\Delta_l u$ .

Тогда  $\Delta_l u = f(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - f(x; y; z)$ .

Обозначим через  $\Delta l$  расстояние между точками  $P_1$  и  $P$ :  $\Delta l = PP_1$ .

**Определение.** *Производной функции  $u = f(x; y; z)$  в точке  $P$  по направлению  $\vec{l}$*

называется предел  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ .

Производная функции  $u$  по направлению  $\vec{l}$  обозначается символом  $\frac{\partial u}{\partial l}$ .

Таким образом,  $\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ .

Заметим, что если производная функции  $u$  в данной точке  $P(x; y; z)$  по данному направлению  $\vec{l}$  положительна, то функция  $u$  в этом направлении возрастает; если же  $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$ , то функция  $u$  в этом направлении убывает.

Можно сказать, что производная по направлению  $\frac{\partial u}{\partial l}$  дает скорость изменения функции  $u$  в этом направлении.



Можно показать, что производная по направлению находится по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = f'_x(x; y; z) \cos \alpha + f'_y(x; y; z) \cos \beta + f'_z(x; y; z) \cos \gamma.$$

Отсюда следует, что если вектор  $\vec{l}$  совпадает с одним из ортов  $\vec{i}$  или  $\vec{j}$ , то производная  $z$  по направлению  $\vec{l}$  совпадает с соответствующей частной производной этой функции.

**Пример.** Найти производную функции  $z = x^2 + 2y^2$  в точке  $M(1;1)$  в направлении, составляющем с осью  $Ox$  угол  $60^\circ$ .

**Решение:** Найдем направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Найдем значения частных производных в точке  $M(1;1)$ :  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = 2x|_{x=1} = 2$ ;

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 4y|_{y=1} = 4.$$

Тогда производная по направлению:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_M = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M \cos \alpha + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \cos \beta = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3} \approx 4,46.$$

**Определение.** *Градиентом* в точке  $P(x; y; z)$  скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией  $u = f(x; y; z)$  или просто градиентом функции называется вектор, равный

$$f'_x(x; y; z)\vec{i} + f'_y(x; y; z)\vec{j} + f'_z(x; y; z)\vec{k}.$$

Градиент функции  $u = f(x; y; z)$  обозначается одним из символов  $grad f(x; y; z)$ ,  $grad f(P)$ ,  $grad u$ .

Следовательно, по определению

$$grad f(x; y; z) = f'_x(x; y; z)\vec{i} + f'_y(x; y; z)\vec{j} + f'_z(x; y; z)\vec{k},$$

или

$$grad f(x; y; z) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

**Пример.** Найти градиент функции  $z = x^2 + 2y^2$  в точке  $M(1;1)$ .

Решение:  $grad z|_M = \left( \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M; \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M \right) = (2;4).$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Проекция вектора  $grad u$  на единичный вектор  $\vec{l} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$  равна производной функции  $u$  по направлению  $l$ :

$$np_l grad u = \frac{\partial u}{\partial l}.$$

Обозначим через угол  $\varphi$  – угол между единичным вектором  $\vec{l}$  и  $grad u$ .

Тогда  $np_l grad u = |grad u| \cos \varphi$ .

Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |grad u| \cos \varphi.$$

Если направление векторов  $\vec{l}$  и  $grad u$  совпадают ( $\varphi = 0$ ), то производная по направлению  $\frac{\partial u}{\partial l}$  имеет, очевидно, наибольшее значение, равное  $|grad u|$ .

**Геометрический смысл градиента:**  $grad u$  есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания функции в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания.

**Спасибо за внимание**