ТЕМА 5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ АВТОМАТОВ

1. Основные понятия алгебры логики
2. Элементарные булевы функции
3. Полнота системы булевых функций
4. Законы и тождества алгебры логики
5. Представление булевых функций дизъюнктивными и конъюнктивными нормальными формами
6. Синтез комбинационных схем

1 Основные понятия алгебры логики

Математический аппарат, базирующийся на алгебре логики, широко используется для описания функционирования, анализа и синтеза цифровых схем.

Основным понятием алгебры логики является высказывание.

Высказыванием называется всякое суждение (утверждение), которое либо истинно, либо ложно. Одновременно истинным и ложным высказывание быть не может.

Истинность высказывания обозначается единицей, а ложность – нулем.

Простое высказывание не зависит от значений других высказываний..

Значение истинности ***сложного высказывания*** зависит от истинности других высказываний, составляющих его.

Любое сложное высказывание можно считать логической функцией от простых высказываний (аргументов).

Логическая функция, как и ее аргументы, принимает только два значения: *единица или нуль*.

Множество символов $X = \{x_1, x_2,..., x_n\}$, каждый из которых принимает значения единица или нуль, называется **множеством переменных или аргументов**.

Функция $f(x_1, x_2,..., x_n)$, определенная на множестве всевозможных наборов аргументов из X и принимающая значения единица или нуль, называется **функцией алгебры логики или булевой функцией**.

Областью определения булевой функции служит совокупность всевозможных n-мерных наборов из единиц и нулей.

Принято три способа задания булевых функций:

1. Формула, указывающая в явном виде последовательность операций, производимых над переменными:

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

2. Таблица истинности, в левой части которой перечисляются все возможные комбинации значений аргументов x_1, x_2,..., x_n, а в правой – значения функции. При n переменных число строк таблицы равно 2^n.
3. Логическая схема или условное графическое изображение логической функции.

Число различных функций алгебры логики, зависящих от n аргументов, конечно и равно 2^{2^n}.

Значения функции могут быть заданы не на всех возможных наборах аргументов. Функции, значения которых на некоторых наборах не определены, называются ***не полностью определенными***.

Функция $f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$ ***существенно зависит***

от аргумента x_i, если имеет место соотношение

$$f(x_1,\dots,x_{i-1},0,\ x_{i+1},\dots,x_n)\neq f(x_1,\dots,x_{i-1},\ 1,\ x_{i+1},\dots,x_n).$$

В противном случае функция зависит от x_i несущественно и x_i является ее ***фиктивным аргументом***.

Функция не изменится, если к ее аргументам дописать любое число фиктивных аргументов или зачеркнуть те аргументы, которые для данной функции являются фиктивными.

Число всех функций алгебры логики A_n, существенно зависящих от n аргументов, определяется следующим рекуррентным соотношением:

$$A_n = 2^{2^n} - C_n^{n-1} A_{n-1} - C_n^{n-2} A_{n-2} - \ldots - C_n^1 A_1 - A_0,$$

где A_i – число функций алгебры логики, существенно зависящих от i аргументов,

C_n^m – число сочетаний из n элементов по m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

2 Элементарные булевы функции

Элементарные булевы функции образуются путем использования однородных связей между двоичными переменными.

Существует одиннадцать элементарных функций, которые часто употребляются в алгебре логике и ее приложениях.

1) Две функции, которые не зависят ни от одного аргумента (n=0). Это $\boldsymbol{f_1}$ = 0 – ***константа нуль*** и $\boldsymbol{f_2}$ = 1 – ***константа единица***.
2) При n = 1 имеем две функции, существенно зависящие от одного аргумента x. $\boldsymbol{f_3} = x$ - ***функцией прямой передачи сигнала***, $f_4 = \bar{x}$ - ***функцией отрицания или инверсии***

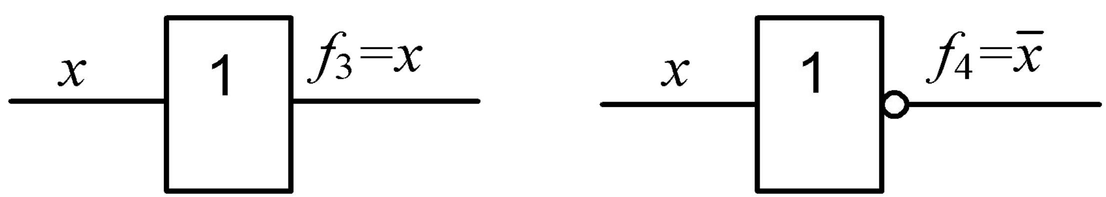
x	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	1
1	1	0

Значения $f_3(x)$ совпадают со значением переменной x, а $f_4(x)$ принимает значения, противоположные значениям переменной x.

Устройства, реализующие элементарные булевы функции, называются **логическими элементами.**

Их входы соответствуют булевым переменным, а выход – реализуемой функции. Для обозначения логических элементов используют упрощенные изображения в виде прямоугольников, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующей функции.

Элемент НЕ (инвертор)

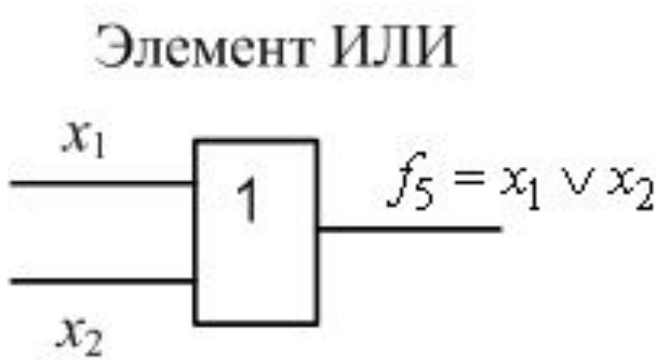


а б

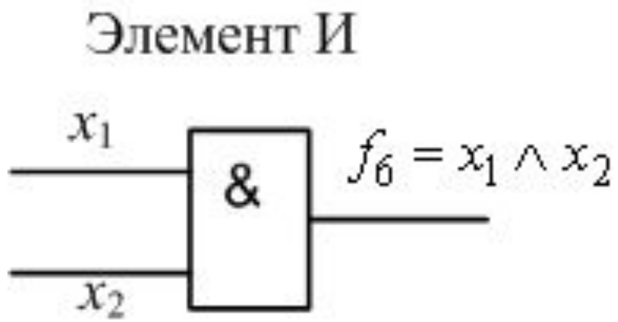
Существует 10 функций, существенно зависящих от двух аргументов x_1 и x_2.

x_1	x_2	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	I	1	1	0	0	0

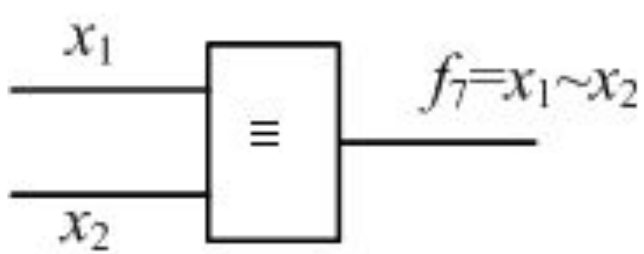
3) Функция $f_5(x_1, x_2)=x_1 \vee x_2$ называется ***дизъюнкцией***, или логическим ***сложением*** x_1 и x_2. Читается «x_1 или x_2».



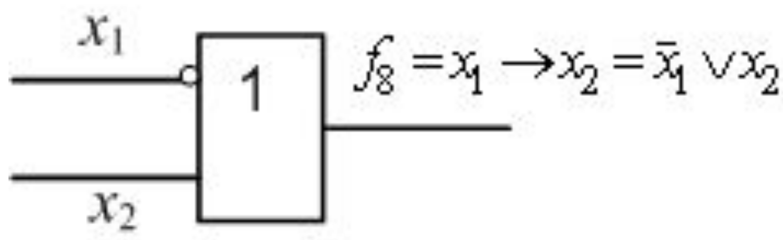
4) Функция $f_6(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ называется ***конъюнкцией***, или ***логическим умножением*** x_1 и x_2. Читается «x_1 и x_2».



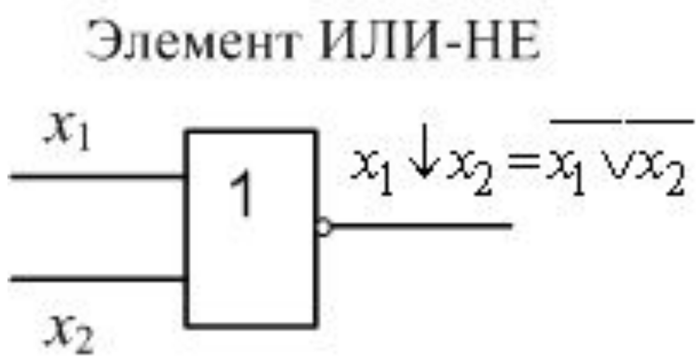
5) Функция $f_7(x_1,\ x_2) = x_1 \sim x_2$ называется ***функцией эквивалентности***, или ***функцией равнозначности***. Читается «x_1 эквивалентно x_2».



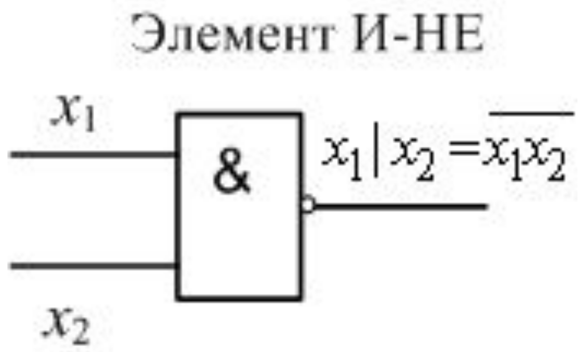
6) Функция $f_8(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ называется ***функцией импликации.*** Читается «если x_1, то x_2».



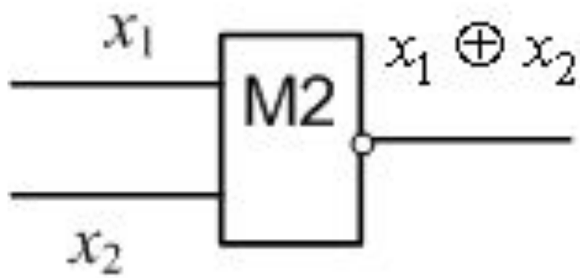
7) Функция $f_9(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ называется ***функцией Вебба, или стрелкой Пирса***. Читается «ни x_1 ни x_2».



8) Функция $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$ называется ***функцией Шеффера***. Читается «неверно, что x_1 и x_2 ».



9) Функция $f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ называется ***функцией сложения по модулю 2***. Читается «x_1 неравнозначно x_2». Функция принимает значение 1 только в том случае, если переменные x_1 и x_2 имеют различные значения, и значение 0 в противном случае.



3 Полнота системы булевых функций

Одно из основных понятий алгебры логики - понятие функциональной ***полноты системы булевых функций***. Система булевых функций называется *функционально полной*, если она позволяет представить любую булеву функцию.

Логические элементы, соответствующие функционально полным наборам булевых функций, образуют так называемый ***базис*** и позволяют построить любую сколь угодно сложную логическую схему.

Наиболее распространенными являются базисы И-ИЛИ-НЕ, ИЛИ-НЕ, И-НЕ.

4 Законы и тождества алгебры логики

Законы алгебры логики устанавливают эквивалентность логических формул, образованных с помощью полного набора логических операций И, ИЛИ, НЕ.

1) Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1, \; x_1 x_2 = x_2 x_1$$

2) Ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3, \quad x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3$$

3) Идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции

$$x \vee x = x, \quad xx = x$$

4) Дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции

$$x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3, \qquad x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$$

5) де Моргана

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1\bar{x}_2, \qquad \overline{x_1x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2;$$

6) Двойного отрицания

$$\bar{\bar{x}} = x;$$

7) Склеивания

$$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1, \qquad x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = x_1;$$

8) Поглощения

$$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1, \quad x_1(x_1 \vee x_2) = x_1$$

9) Действия с константами 0 и 1

$$x \vee 0 = x, \quad x \cdot 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1$$

$$x \cdot 1 = x, \quad x \vee \bar{x} = 1, \quad x \cdot \bar{x} = 0.$$

Правило 1. Если логическая сумма двоичных переменных содержит хотя бы одну пару слагаемых, из которых одно есть некоторая переменная, а другое – ее отрицание, то она является тождественно истинной:

$$x_1 \vee \bar{x}_5 \vee x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \equiv 1.$$

Правило 2. Если логическое произведение двоичных переменных содержит хотя бы одну пару сомножителей, из которых один есть некоторая переменная, а другой – ее отрицание, то оно является тождественно ложным

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_3 x_2 \equiv 0.$$

Следует отметить, что законы де Моргана справедливы для любого числа переменных:

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n;$$

$$\overline{x_1 x_2 \ldots x_n} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n.$$

5 Представление булевых функций дизъюнктивными и конъюнктивными нормальными формами

Любая логическая функция может выражаться различными логическими формулами, являющимися эквивалентными. Наиболее удобными для практического использования являются нормальные формы представления сложных логических функций.

Элементарной конъюнкцией **Q** называется логическое произведение любого конечного числа переменных и их отрицаний, причем каждая переменная встречается только один раз. Число переменных, составляющих элементарную конъюнкцию, называется ее **рангом.**

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций:

$$N = \mathrm{Q}_1 \vee \mathrm{Q}_2 \vee \ldots \vee \mathrm{Q}_k .$$

Любая булева функция может быть представлена в ДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 .$$

Элементарной дизъюнкцией D называется логическая сумма конечного числа переменных и их отрицаний, причем каждая переменная встречается в сумме один раз. Число переменных, составляющих элементарную дизъюнкцию, называется ее **рангом**.

$$D = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$$

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций:

$$K = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_n .$$

Любую булеву функцию можно представить в КНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_3).$$

Одна и та же логическая функция путем эквивалентных преобразований может быть представлена различными ДНФ или КНФ.

Единственность представления обеспечивают совершенные нормальные формы.

Совершенной ДНФ (СДНФ) логической функции $f(x_1, x_2, x_n)$ от n различных переменных называется ДНФ, которая содержит только конъюнкции ранга n и не содержит одинаковых конъюнкций.

Произвольная логическая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приводится к СДНФ в следующей последовательности:

1)Функция f приводится к какой-либо ДНФ;

2) Конъюнкции, не содержащие всех двоичных переменных, дополняются до конъюнкций n-го ранга;

3)Из полученной ДНФ с конъюнкциями n-го ранга удаляются повторяющие друг друга конъюнкции.

Пример 1. Привести функцию к СДНФ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3$$

Решение: Дополним конъюнкции второго ранга до конъюнкций третьего ранга, используя закон склеивания:

$$\bar{x}_1 x_2 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Просуммируем конъюнкции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Если логическая функция задана таблицей истинности, то построение СДНФ осуществляется по следующему алгоритму:

1) Выбираются наборы аргументов, на которых функция обращается в единицу;

2) Выписываются конъюнкции, соответствующие этим наборам, причем если аргумент x_i входит в набор как единица, то в конъюнкцию он вписывается без изменения. Если же аргумент x_i входит в данный набор как нуль, то в соответствующую конъюнкцию вписывается его отрицание;

3) Все выписанные конъюнкции соединяют знаком дизъюнкции.

Элементарные конъюнкции СДНФ называют ***конституэнтами единицы***.

Пример 2. Построить СДНФ для функции, заданной таблично.

X_1	X_2	X_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Функция f принимает значение единица пять раз, поэтому ее СДНФ представляет собой логическую сумму пяти элементарных конъюнкций третьего ранга

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Совершенной КНФ (СКНФ) логической функции f от n различных переменных называется КНФ, которая содержит только дизъюнкции ранга n и не содержит одинаковых дизъюнкций.

Построение СКНФ по таблично заданной функции осуществляется в следующей последовательности:

1) Выбираются наборы аргументов, на которых функция обращается в нуль;

2) Выписываются дизъюнкции, соответствующие этим наборам, причем если аргумент x_i входит в набор как нуль, то в дизъюнкцию он вписывается без изменения. Если же аргумент x_i входит в данный набор как единица, то в соответствующую дизъюнкцию вписывается его отрицание;

3) Все выписанные дизъюнкции соединяют знаком конъюнкции.

Элементарные дизъюнкции СКНФ называют ***конституэнтами*** нуля.

Пример 3. Построить СКНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблично.

X_1	X_2	X_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Функция f принимает значение нуля три раза, поэтому ее СКНФ представляет собой логическую сумму трех элементарных дизъюнкций третьего ранга

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3).$$

6. Синтез комбинационных схем

Под комбинационной схемой понимается техническое устройство, предназначенное для преобразования дискретной информации, причем значения выходных сигналов однозначно определяются значениями входных сигналов в данный момент времени. Предполагается, что в комбинационных схемах не происходит задержки сигнала, а входные и выходные сигналы могут принимать только значения единица и нуль (это могут быть высокий и низкий уровни напряжения).

Синтезировать комбинационную схему – это означает на основе заданного алгоритма работы построить структурную схему минимальной сложности из логических элементов заданного базиса.

Синтез комбинационных схем осуществляется в три этапа:

1) Запись условий функционирования устройства (эти условия могут быть заданы словесно, с помощью таблицы истинности, либо с помощью логической функции);

2) Минимизация логической функции и приведение ее к заданному базису;

3) Составление структурной схемы устройства.

Пример 4. Синтезировать комбинационную схему, реализующую булеву функцию в базисе И-ИЛИ-НЕ.

Рассмотреть переход к базисам И-НЕ и ИЛИ-НЕ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 / x_2) \oplus (\bar{x}_3 \to x_1)$$

Представим функцию в ДНФ. Для этого используем формулы

$$x_1 / x_2 = \overline{x_1 x_2}; \qquad x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2; \qquad x_1 \oplus x_2 = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

Тогда

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 x_2} \oplus (x_3 \vee x_1) =$$

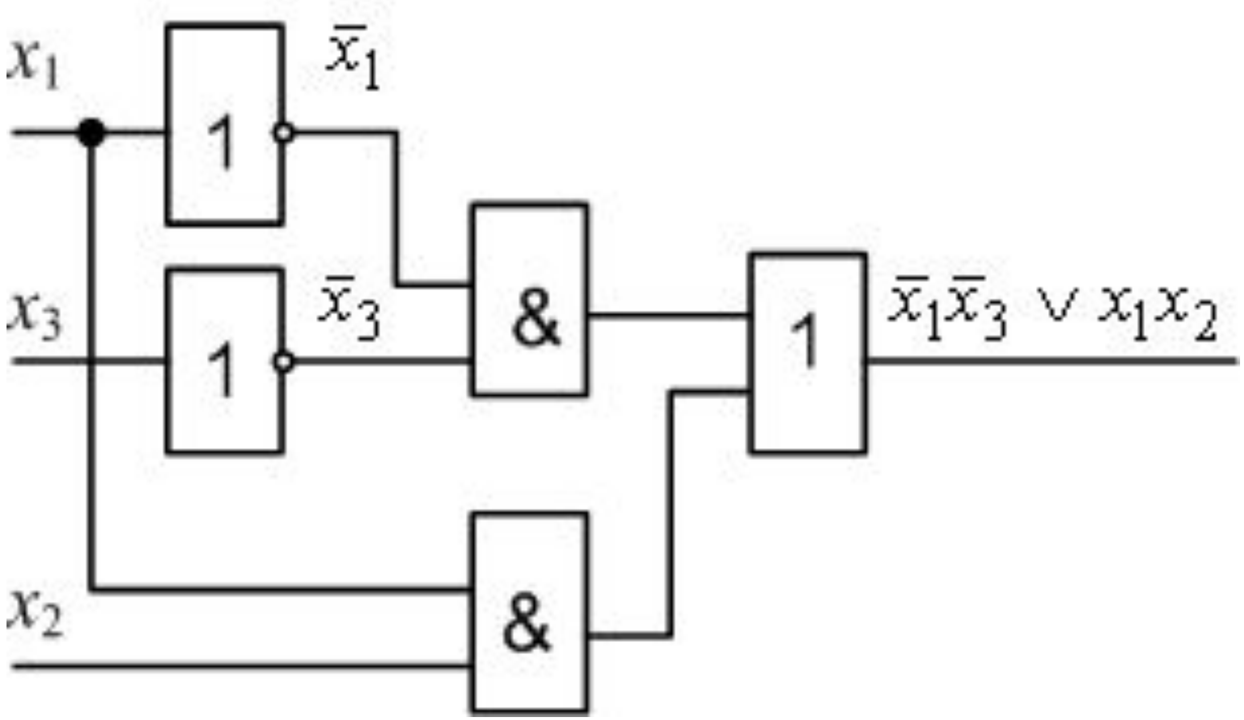
$$= \overline{x_1 x_2}\,\overline{(x_3 \vee x_1)} \vee \overline{\overline{x_1 x_2}}(x_3 \vee x_1) =$$

$$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\bar{x}_3 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 (x_3 \vee x_1) =$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2.$$

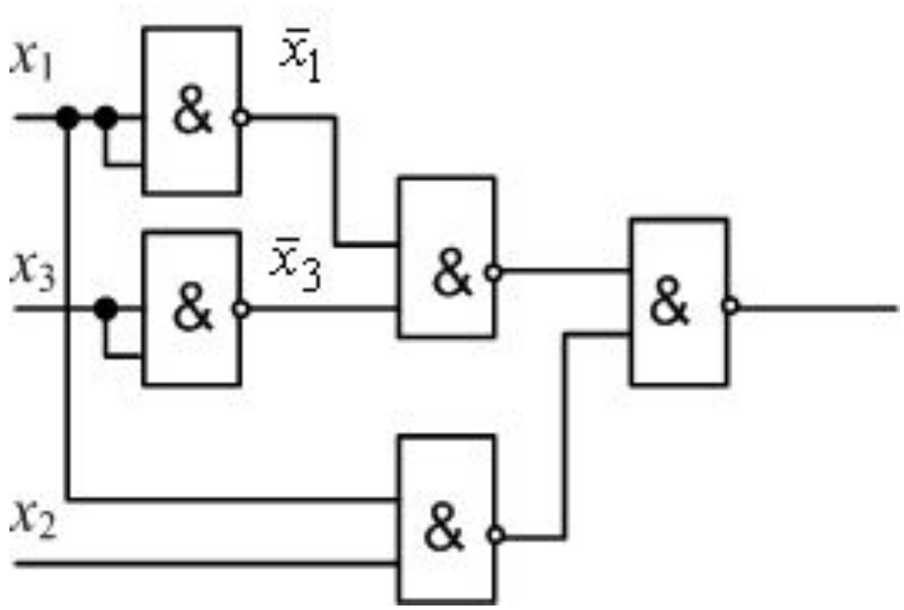
Логическая схема, реализующая эту функцию в базисе И-ИЛИ-НЕ.



Преобразуем $f(x_1, x_2, x_3)$ к базису И-НЕ:

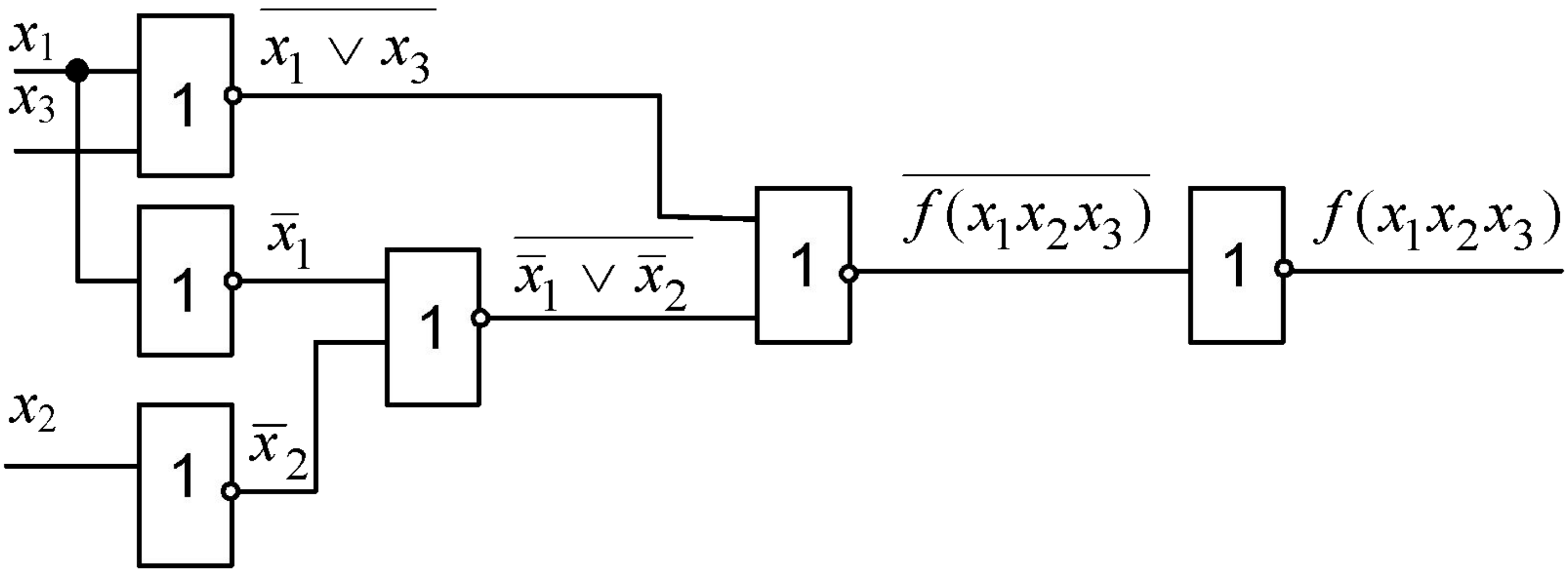
$$\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 = \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2}} = \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3} \cdot \overline{x_1x_2}}.$$

Реализация функции в базисе И-НЕ

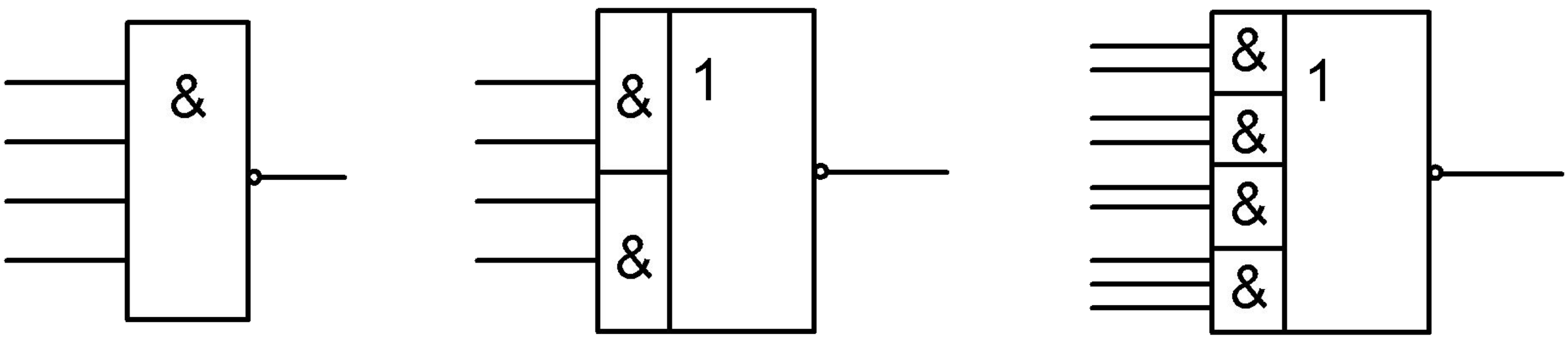


Преобразуем $f(x_1, x_2, x_3)$ к базису ИЛИ-НЕ:

$$\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 = \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3}} \vee \overline{\overline{x_1x_2}} = \overline{x_1 \vee x_3} \vee \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} = \overline{\overline{\overline{x_1 \vee x_3} \vee \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}}}.$$



В серийно выпускаемых интегральных микросхемах в одном корпусе могут быть объединены несколько логических схем, например, элемент 4И-НЕ, элемент 2И-ИЛИ-НЕ, элемент 2-2-2-3И-4ИЛИ-НЕ.



а б в