Лекция 2
Тема: *"Числовые ряды"*

Основные определения.

Определение. ***Числовым рядом*** называется сумма элементов числовой последовательности:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ называются ***членами ряда***, а u_n - ***общим членом ряда***.

Рассмотрим несколько примеров числовых рядов:

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n};$

3) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 2n;$

4) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n .$

Определение. Сумма S_n первых n членов ряда называется ***n-ой частичной суммой ряда***:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \,.$$

Для некоторых рядов последовательность частичных сумм стремится к определенному пределу, для других рядов такой предел не существует.

Определение. Ряд называется ***сходящимся***, если существует **конечный** предел S последовательности его частичных сумм S_n при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \,.$$

Определение. Предел S последовательности частичных сумм ряда называется ***суммой ряда***.

Если S является суммой ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$, то пишут:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,.$$

Если последовательность частичных сумм ряда не имеет предела или он равен ∞, то ряд называется ***расходящимся***.

Рассмотрим сумму элементов бесконечной геометрической прогрессии

$$b_1 + qb_1 + q^2 b_1 + \ldots + q^n b_1 + \ldots .$$

Очевидно, что она является числовым рядом.

Сумма n членов (n-ая частичная сумма) геометрической прогрессии при $q \neq 1$ вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Если $q < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}.$$

Таким образом, при $q < 1$ геометрическая прогрессия является сходящимся числовым рядом, сумма которого

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Если $q > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \infty.$$

Следовательно, в этом случае геометрическая прогрессия расходится.

Если $q = 1$, то геометрическая прогрессия принимает вид: $b_1 + b_1 + b_1 + \ldots + b_1 + \ldots$.
Тогда $S_n = nb_1$ и (при $b_1 \neq 0$) ряд расходится.

Если $q = -1$, то геометрическая прогрессия принимает вид: $b_1 - b_1 + b_1 - \ldots + b_1 - \ldots$.
В этом случае $S_n = 0$ при n четном и $S_n = b_1$ при n нечетном.
Следовательно, при $b_1 \neq 0$ предел S_n не существует и ряд расходится.

Итак, **геометрическая прогрессия является сходящимся рядом при $|q| < 1$ и расходящимся при $|q| \geq 1$.**

Арифметические свойства числовых рядов.

Теорема (умножение ряда на число). Если ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходится и имеет сумму S , то ряд

$$au_1 + au_2 + au_3 + \ldots + au_n + \ldots ,$$

где a – заданное число, также сходится и его сумма равна aS .

Теорема (сложение рядов). Если ряды

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \quad \text{и} \quad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots ,$$

сходятся и имеют соответственно сумму S и S^*, то ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots ,$$

полученный почленным сложением данных рядов, также сходится и его сумма равна $S + S^*$.

Замечание. Ряд, являющийся разностью сходящихся рядов:

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + \ldots + (u_n - v_n) + \ldots,$$

сходится и его сумма равна $S - S^*$.

Рассмотрим два ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{k-1} + u_k + u_{k+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n + \ldots$$

и

$$u_{k+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n + \ldots.$$

Теорема. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный отбрасыванием конечного числа k первых членов исходного ряда.
Обратно, если сходится ряд, полученный отбрасыванием конечного числа первых членов ряда, то сходится и исходный ряд.

Теорему можно сформулировать следующим образом:
На сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов.

Необходимый признак сходимости ряда.

Теорема (необходимый признак сходимости).
Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится, то его общий член u_n стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Необходимый признак сходимости можно переформулировать в виде достаточного признака расходимости:

Если общий член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд расходится.

Действительно, если бы ряд сходился, то по необходимому признаку его общий член обязан был бы стремится к нулю, что противоречит условию.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{4n-1}$.

Решение: Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{4n-1} = \frac{5}{4} \neq 0,$$

т.е. ряд расходится.

Замечание. Условие $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ является необходимым для сходимости ряда, но не достаточным.

Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение: $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Однако данный ряд расходится.

Действительно, рассмотрим частичную сумму ряда:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots$ то $S_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$,

следовательно, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

Признаки сходимости знакоположительных рядов.

Определение. Числовой ряд, у которого все члены положительны, называется ***знакоположительным рядом.*** Числовой ряд, у которого все члены отрицательны, называется ***знакоотрицательным рядом***.

Ряд называется ***знакопостоянным***, если он знакоположительный или знакоотрицательный.

Рассмотрим достаточные признаки сходимости и расходимости для знакоположительных рядов, но все полученные ниже выводы будут справедливы и для знакоотрицательных рядов.

Так как в знакоположительном ряде все его члены положительны, то его частичные суммы $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$, $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ возрастают с увеличением номера суммы n.

Таким образом, частичные суммы образуют возрастающую числовую последовательность

$$S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_n < \ldots.$$

Возможны два случая:

1. Последовательность частичных сумм неограничена.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, следовательно ряд расходится.

2. Последовательность частичных сумм ограничена, т.е. $S_n < C$ при любом n.

В этом случае последовательность частичных сумм имеет предел и ряд сходится.

Таким образом, имеем теорему:

Теорема. Знакоположительный ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Приведем признаки сходимости, основанные на сравнении рядов.

Теорема (первый признак сравнения).

Пусть даны два знакоположительных ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots.$$

и члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда:

$$u_1 \le v_1,\ u_2 \le v_2,\ u_3 \le v_3, \ldots, u_n \le v_n, \ldots.$$

Тогда если второй ряд сходится, то первый ряд также сходится и его сумма не превосходит суммы второго ряда.

Теорема (второй признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда и члены первого ряда не меньше соответствующих членов второго ряда:

$$u_1 \ge v_1,\ u_2 \ge v_2,\ u_3 \ge v_3, \ldots, u_n \ge v_n, \ldots,$$

Тогда, если второй ряд расходится, то первый ряд также расходится.

Геометрическая прогрессия, гармонический и обобщенный гармонический ряды часто используются при исследовании рядов с помощью признаков сравнения в качестве эталонных рядов.

Обобщенный гармонический ряд – это ряд вида:

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

является сходящимся при $p>1$ и расходящимся при $0<p\le 1$.
При $p=1$ получаем ряд,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

который называется ***гармоническим***.

Таким образом, гармонический ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^{n+1}+n^2}$.

Решение: Для сравнения выбираем геометрическую прогрессию: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

Так как $\frac{2}{2^{n+1}+n^2}<\frac{2}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}$ при любом n, то по первому признаку сравнения исходный ряд сходится, так как данная геометрическая прогрессия сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}+\ldots$.

Решение: Для сравнения выбираем гармонический ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Так как $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ при любом n, то по второму признаку сравнения исходный ряд расходится.

На практике удобнее всего использовать следующий признак сравнения.

Теорема (третий признак сравнения). Если существует конечный и отличный от нуля предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = k$, то оба исследуемых ряда одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$.

Решение: Для сравнения выбираем расходящийся ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Используем третий признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, исходный ряд расходится, так как расходится гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Приведем два признака сходимости, не требующих привлечения других рядов.

Теорема (признак Даламбера). Пусть для знакоположительного ряда существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=k,$$

тогда при $k<1$ ряд сходится, а при $k>1$ ряд расходится.

В частности, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$, то ряд расходится, так как в этом случае $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ при достаточно больших n и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$.

Замечание. При $k=1$ признак Даламбера на вопрос о том сходится или расходится ряд, ответа не дает. В этом случае может иметь место, как сходимость, так и расходимость. Например, для всех обобщенных гармонических рядов $k=1$, однако одни из них сходятся, а другие расходятся.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$.

Решение: Для исследования сходимости выбираем признак Даламбера. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)\cdot(4n+1)}\cdot\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n+1}=\frac{3}{4}<1.$$

Следовательно, на основании признака Даламбера данный ряд сходится.

Теорема (радикальный признак Коши). Пусть для знакоположительного ряда существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k,$$

тогда при $k < 1$ ряд сходится, а при $k > 1$ ряд расходится.

Замечание. В случае, когда $k = 1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

Решение: Для исследования сходимости выбираем признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, на основании радикального признака Коши данный ряд сходится.

Знакопеременные ряды.

Ряды, содержащие как положительные так и отрицательные члены, называются ***знакопеременными***.

Знакопеременный ряд, в котором за каждым положительным членом следует отрицательный, а за каждым отрицательным – положительный, называется ***знакочередующимся рядом***.

Такой ряд имеет вид:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots,$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ - все положительные числа.

Теорема (достаточный признак сходимости Лейбница).

Если в знакочередующемся ряде абсолютные величины членов ряда убывают:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$$

и общий член ряда по абсолютной величине стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

то ряд сходится, и его сумма положительна и не превосходит первого члена ряда:

$$S < u_1.$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{5n+6}$.

Решение: Так как $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{5n+6}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5n+6} = 0$, $|u_n| = \dfrac{1}{5n+6} \geq |u_{n+1}| = \dfrac{1}{5n+11}$,

то все условия признака Лейбница выполняются, и ряд сходится.

Рассмотрим общий случай знакопеременного ряда:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ могут быть любыми (как положительными, так и отрицательными).

Абсолютная и условная сходимость.

Определение. Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$, составленный из абсолютных величин его членов.

Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда).
Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то он сходится (в обычном смысле).

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+....$

Решение: Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....$$

Этот ряд сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $p=2>1$.
Тогда исходный ряд сходится, причем абсолютно.

Определение. Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ называется ***условно сходящимся***, если он сходится, а ряд $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Пример. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$ сходится по признаку Лейбница.

Однако, ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ является гармоническим рядом и, следовательно, расходится.

Таким образом, исходный ряд является условно сходящимся.

Свойства абсолютно сходящихся рядов:

1. Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется от любой перестановки его членов.
2. Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать по обычным правилам умножения для конечных сумм.

Остаток ряда и его оценка.

Рассмотрим сходящийся ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots.$$

Так как ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Поэтому, для достаточно больших n имеем приближенное равенство $S \approx S_n$, точность которого возрастает с увеличением n.

Для оценки точности приближенного равенства введем понятие остатка сходящегося ряда.

Определение. Разность между суммой ряда S и его n-ой частичной суммой S_n называется n ***-ым остатком сходящегося ряда***.

Остаток ряда обозначается через r_n:

$$r_n = S - S_n.$$

Остаток ряда представляет собой сумму сходящегося ряда, полученного из данного ряда отбрасыванием n его первых членов:

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots.$$

Из определения остатка следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Действительно $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n) = S - \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$.

Абсолютная погрешность при замене суммы ряда S его частичной суммой S_n равна модулю остатка ряда: $\Delta_S = |S - S_n| = r_n$.

Таким образом, если требуется найти сумму ряда с точностью до $\varepsilon > 0$, то надо взять сумму такого числа n первых членов ряда, чтобы выполнялось неравенство $r_n < \varepsilon$.
Выясним, как находить номер остатка n, чтобы его модуль не превосходил заданного числа ε.

Теорема (об оценке остатка знакоположительного ряда).
Если все члены сходящегося знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

не превосходят соответствующих членов другого сходящегося знакоположительного ряда

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots,$$

то n-ый остаток первого ряда не превосходит n-го остатка второго ряда.

Замечание: Если выполняются условия данной теоремы, то второй ряд называют ***мажорирующим рядом*** по отношению к первому ряду.
Таким образом, остаток мажорирующего ряда больше или равен остатку основного ряда.

Пример. Оценить четвертый остаток ряда

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{4\cdot 27}+\frac{1}{5\cdot 81}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}+\ldots.$$

Решение: Каждый член этого ряда меньше соответствующего члена геометрической прогрессии

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

со знаменателем 1/3.

Следовательно, остаток r_4 исходного ряда меньше остатка r_4' этой прогрессии:

$$r_4 < r_4' = \frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{3^7}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots=\frac{\frac{1}{3^5}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3^5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{162}.$$

Таким образом, сумма исходного ряда отличается от суммы его первых четырех членов меньше чем на 1/162.

Теорема (об оценке остатка знакопеременного ряда).

Пусть дан абсолютно сходящийся знакопеременный ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots.$$

Тогда абсолютная величина его n-го остатка не превосходит n-го остатка ряда, составленного из абсолютных величин членов данного ряда.

Следствие. Если знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, то его остаток по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отброшенных членов ряда.

Пример. Вычислить с точностью до 0,01 сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

Решение: Данный ряд сходится по признаку Лейбница, поэтому

$$\Delta_S = |S - S_n| = |r_n| \le u_{n+1}.$$

Тогда $|r_n| \le u_{n+1} \le 0{,}01$ или $\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{(n+1)!} \le 0{,}01 = \frac{1}{100} \Rightarrow n \ge 4$.

Таким образом, $S = \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{5}{8}$.

Спасибо за внимание