Лекция 7
Тема: *"Приложения производной. Дифференциал функции"*

Логарифмическая производная.

Пусть дана дифференцируемая функция $y = f(x)$. Прологарифмируем обе части этого выражения: $\ln y = \ln f(x)$, а теперь продифференцируем по x:

$$(\ln y)'_x = (\ln f(x))'_x \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'_x \Rightarrow y' = y \cdot (\ln f(x))' = f(x) \cdot (\ln f(x))',$$

т.е.

$$y' = f(x) \cdot (\ln f(x))'$$

Определение. Операция, состоящая в последовательном применении к равенству $y = f(x)$ сначала логарифмирования, а затем дифференцирования, называется ***логарифмическим дифференцированием***, а производная, определяемая при этом – ***логарифмической производной***.

С помощью логарифмического дифференцирования, выведем формулу $(x^p)' = px^{p-1}$. Действительно,

$$y = x^p \Rightarrow \ln y = \ln x^p \Rightarrow \frac{1}{y} y' = \frac{p}{x} \Rightarrow y' = (x^p)' = px^{p-1}.$$

Производная показательно-степенной функции.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.
Тогда функция $y = u(x)^{v(x)}$ называется показательно-степенной.
Найдем ее производную:

$$y = u(x)^{v(x)} \Rightarrow \ln y = \ln u(x)^{v(x)} = v \ln u \Rightarrow \frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u' \Rightarrow$$

$$\left(u^v\right)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{v}{u} u' \right)$$

Пример. Найти производную функции $y = \cos x^{\sin x}$.

Решение: $y' = \left(\cos x^{\sin x}\right)' = \cos x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(\sin x) - tgx \cdot \sin x\right)$.

Производная функции, заданной параметрически.

Пусть функция задана параметрически уравнениями вида:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

где $y = y(t)$ и $x = x(t)$ – дифференцируемые функции параметра t и, следовательно, непрерывные. Тогда если $\Delta x \to 0$, то $\Delta t \to 0$.

Найдем $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \dfrac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Таким образом, производная функции, заданной параметрически определяется формулой:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Пример. Найти производную функции $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$.

Решение: $y'_x = \dfrac{\left(\cos^2 t\right)'}{\left(\sin^2 t\right)'} = \dfrac{-2\cos t \sin t}{2\sin t\cos t} = -1.$

Производная неявной функции.

Пусть функция задана неявно уравнением вида: $F(x, y) = 0$.

Продифференцировав это выражение по x, считая y функцией x, получим линейное уравнение для производной $y' = y'_x$, из которого ее и определим.

Пример. Найти производную функции $y^2 \cos x = \sin 3x$.

Решение:

$$y^2 \cos x = \sin 3x \Leftrightarrow y^2 \cos x - \sin 3x = 0 \Rightarrow$$

$$2yy' \cos x + y^2(-\sin x) - 3\cos 3x = 0 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{y^2 \sin x + 3\cos 3x}{2y\cos x}$$

Геометрические приложения производной.

Уравнение касательной.

Пусть требуется найти уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$. Уравнение любой прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k имеет вид: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Так как для касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ угловой коэффициент равен: $k_l = y'(x_0) = f'(x_0)$, то уравнение касательной имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

или

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали.

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то их угловые коэффициенты связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Тогда, если угловой коэффициент нормали n в точке $M(x_0; y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ обозначить k_n, то он будет равен:

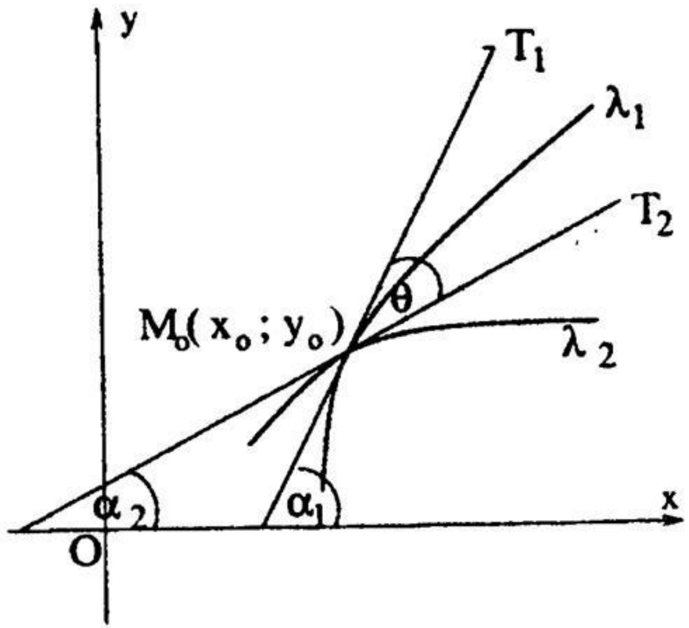
$$k_n = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{f'(x_0)},$$

следовательно, уравнение нормали n в точке $M(x_0; y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ примет вид:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Угол между двумя кривыми.

Угол между двумя кривыми в точке их пересечения равен углу θ между касательными T_1 и T_2 к этим кривым в точке их пересечения $M(x_0; y_0)$.



Очевидно, что $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$, тогда

$$tg\theta = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1} = \left.\frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1' \cdot y_2'}\right|_{M_0}$$

Следовательно, $\theta = arctg\left.\frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1' \cdot y_2'}\right|_{x=x_0}$.

Пример. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение: Так как $y_0 = f(x_0) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 = 2$, $f'(x) = 3x^2 - 4x$, $y_0{}' = f'(1) = -1$, то уравнение касательной имеет вид: $y = 2 - (x - 1) \Rightarrow x + y - 3 = 0$, а уравнение нормали: $y = 2 + (x - 1) \Rightarrow x - y + 1 = 0$.

Пример. Найти угол пересечения кривых $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi/2]$.

Решение: Находим точку пересечения кривых:

$$\sin x = \cos x \Rightarrow tgx = 1 \Rightarrow x = \pi/4.$$

$$\theta = arctg \left. \frac{(\sin x)' - (\cos x)'}{1 + (\sin x)' \cdot (\cos x)'} \right|_{x=\pi/4} = arctg \left. \frac{\cos x + \sin x}{1 - \cos x \cdot \sin x} \right|_{x=\pi/4} = arctg \frac{\sqrt{2}}{1 - 0,5} = arctg 2\sqrt{2}$$

Дифференциал функции.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале $(a;b)$, т.е. имеет в каждой точке этого интервала производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Тогда на основании теоремы о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$,

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Отсюда, приращение функции

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, первое из которых пропорционально приращению аргумента Δx с коэффициентом пропорциональности, равным $f'(x)$ и зависящем от x, а второе является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Справедливо и обратное: если для данного значения x приращение функции

$$\Delta y = a\Delta x + \alpha,$$

где α - бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, то функция $y = f(x)$ в точке x имеет производную $f'(x) = a$.

Действительно, из последнего равенства следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha}{\Delta x}$, где в силу сказанного $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha}{\Delta x} = 0$ и, следовательно, $a = f'(x)$.

Определение. ***Дифференциалом функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x называется главная часть приращения функции, линейная относительно приращения независимой переменной.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается dy или $df(x)$.

$$dy = df(x) = f'(x)\cdot\Delta x.$$

Доказанные выше положения можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела бы в некоторой точке x дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала производная.

Пример. Найти дифференциалы функций: $y = x^2$ и $y = x$.
Решение: $dy = d\,(x^2) = (x^2)' \cdot \Delta x = 2x \cdot \Delta x$; $dy = dx = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Из примера следует, что

$$dx = \Delta x,$$

тогда формулу для дифференциала функции можно записать так:

$$dy = y'dx = f'(x)dx\ .$$

В фиксированной точке x_0 дифференциал функции $y = f(x)$ равен:

$$dy = f'(x_0)dx\ .$$

Определение. ***Дифференциал функции*** $y = f(x)$ в точке x есть произведение производной на дифференциал независимой переменной.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной: $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала.

Пусть x – абсцисса точки M на графике некоторой функции $y = f(x)$.

Дадим x приращение Δx.

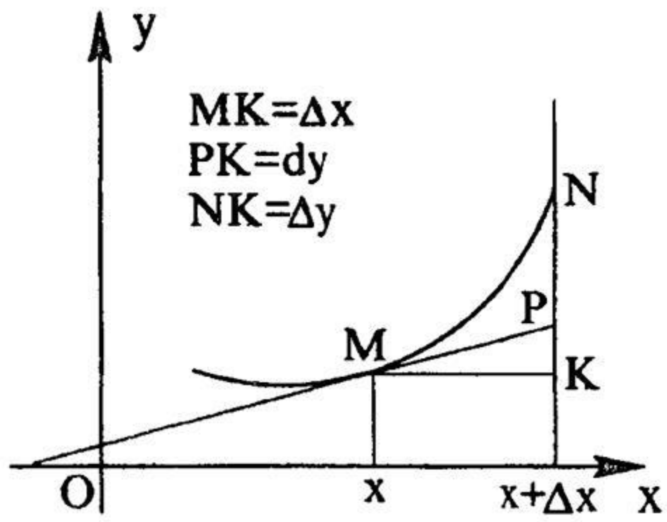
N – точка с абсциссой $x + \Delta x$.

Через точку M проведем касательную MP.

Очевидно, что $dx = \Delta x = MK$, $\Delta y = NK$, $y' = tg\angle PMK$.

Тогда из ΔMPK имеем:

$$MK \cdot tg\angle PMK = y' dx = PK = dy .$$



Дифференциал функции в данной точке равен приращению ординаты касательной к графику функции, проведенной в данной точке при переходе от точки с абсциссой x к точке с абсциссой $x + \Delta x$.

Свойства дифференциала:

- $dC = 0$;
- $d(u + v) = du + dv$;
- $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$;
- $d(cu) = c \cdot du$;
- $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Предполагается, что u и v – дифференцируемые функции.

Инвариантность формы первого дифференциала.

Теорема. Формула для дифференциала $dy = y'dx$ сохраняет вид как в случае, когда x является независимой переменной, так и в случае, когда x зависит еще от одной переменной.

Доказательство: Если x – независимая переменная, то

$$dy = y'dx\ .$$

Пусть теперь имеется сложная функция $y = y(x)$ и $x = x(u)$. Ее дифференциал равен

$$dy = y_u' \cdot du = y'_x \cdot \left(x_u' \cdot du\right) = y'_x \cdot dx\ .$$

Это доказывает теорему.

Это свойство дифференциала называется ***инвариантностью*** (неизменностью).

Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

Из определения приращения и дифференциала функции следует, что они отличаются друг от друга на величину, являющуюся бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx .

Поэтому при малых Δx имеет место приближенная формула

$$\Delta y \approx dy\ .$$

Тогда можно записать:

$$f(x + \Delta x) \approx dy + f(x) \approx f(x) + y'dx\ .$$

Данная формула может применятся к приближенным вычислениям значений функции в точках, близких к тем, в которых оно уже известно.

Пример. Вычислить приближенно $tg\,46^o$.

Решение: Пусть $x = 45^o = \dfrac{\pi}{4}$, тогда $x + \Delta x = 46^o = \dfrac{46\pi}{180} \Rightarrow \Delta x = \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}01745$.

Имеем:

$$tg(x + \Delta x) \approx tgx + \left(tgx\right)' \Delta x = tgx + \frac{\Delta x}{\cos^2 x} \Rightarrow tg46^o \approx tg45^o + \frac{\pi/180}{\cos^2 45^o} \approx 1 + 2 \cdot 0{,}01745 \approx 1{,}0349$$

Повторное дифференцирование.

Производная некоторой дифференцируемой функции $y = f(x)$ в общем случае может быть дифференцируемой функцией.

Определение. Производная от производной называется ***второй производной*** (***производной второго порядка***) и обозначается y' или $f'(x)$:

$$f'(x) = (f'(x))'.$$

Определение. ***n-ой производной (производной n-го порядка)*** называется производная от производной порядка n-1.

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Производные порядка выше первого называются ***производными высшего порядка***.

Определение. ***Вторым дифференциалом (дифференциалом второго порядка)*** называется дифференциал от дифференциала функции.

$$d^2 y = d^2 f(x) = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)'dx = y'dxdx = y'dx^2.$$

(следует помнить, что dx от x не зависит).

Определение. ***n-м дифференциалом (дифференциалом n-го порядка)*** называется дифференциал от дифференциала порядка n-1.

$$d^n y = d^n f(x) = d(d^{n-1} y) = y^{(n)} dx^n .$$

Дифференциалы порядка выше первого не обладают свойством инвариантности.

У второй производной есть ясный физический смысл.

Если материальная точка движется по прямой по закону $s = s(t)$, то ускорение этого движения равно второй производной от пути по времени:

$$a = v' = s'' = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Пример. Найти три первых дифференциала функции $y = x \ln x$.

Решение: $dy = y'dx = (\ln x + 1)dx$, $d^2 y = y'' dx^2 = \dfrac{dx^2}{x}$, $d^3 y = y''' dx^3 = -\dfrac{dx^3}{x^2}$.

Спасибо за внимание