Двойное (сложное) отношение

Длина отрезка прямой – своего рода «ключ» к метрической геометрии.

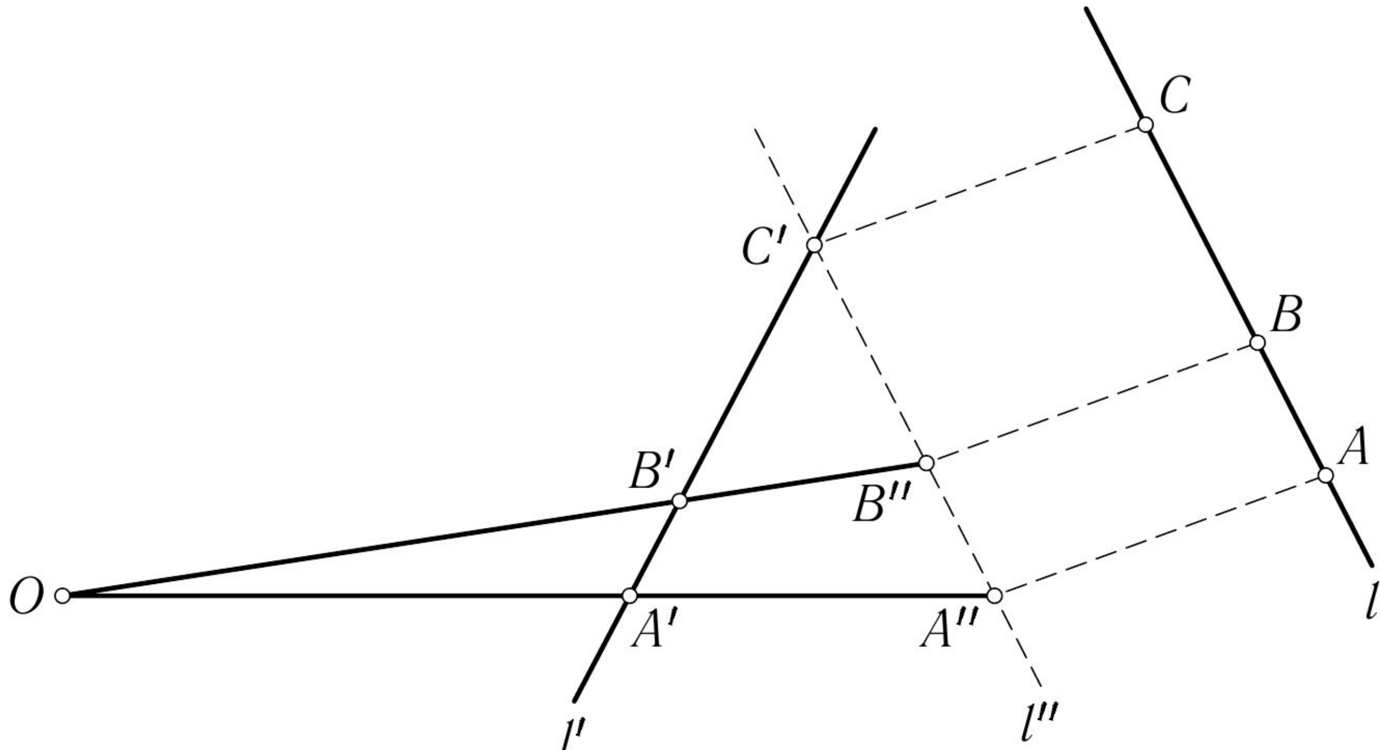
Длина отрезка прямой – своего рода «ключ» к метрической геометрии.

Вопрос

Существует ли в проективной геометрии одно основное понятие, с помощью которого могут быть выражены все отличительные проективные свойства фигур?

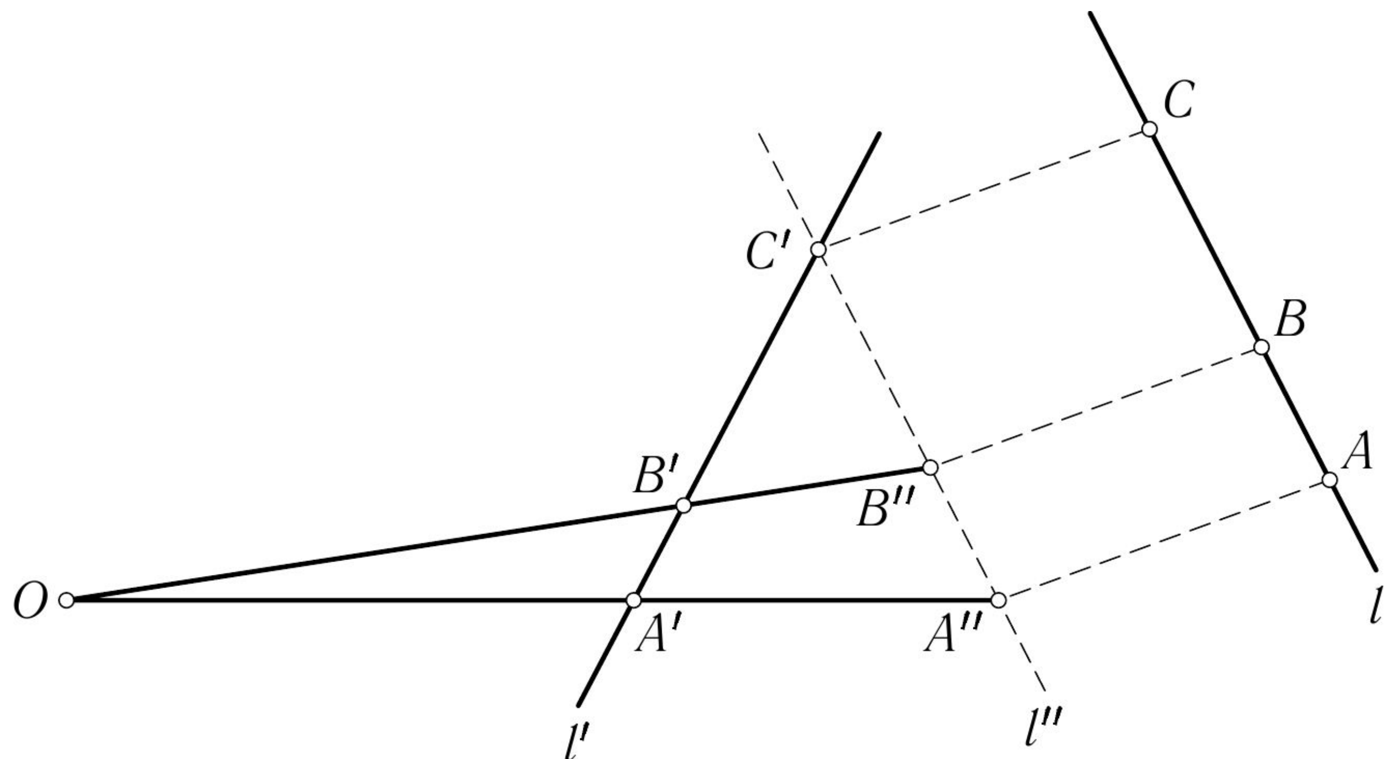
Три точки на прямой

Пусть три точки A, B и C расположены на одной прямой.



Три точки на прямой

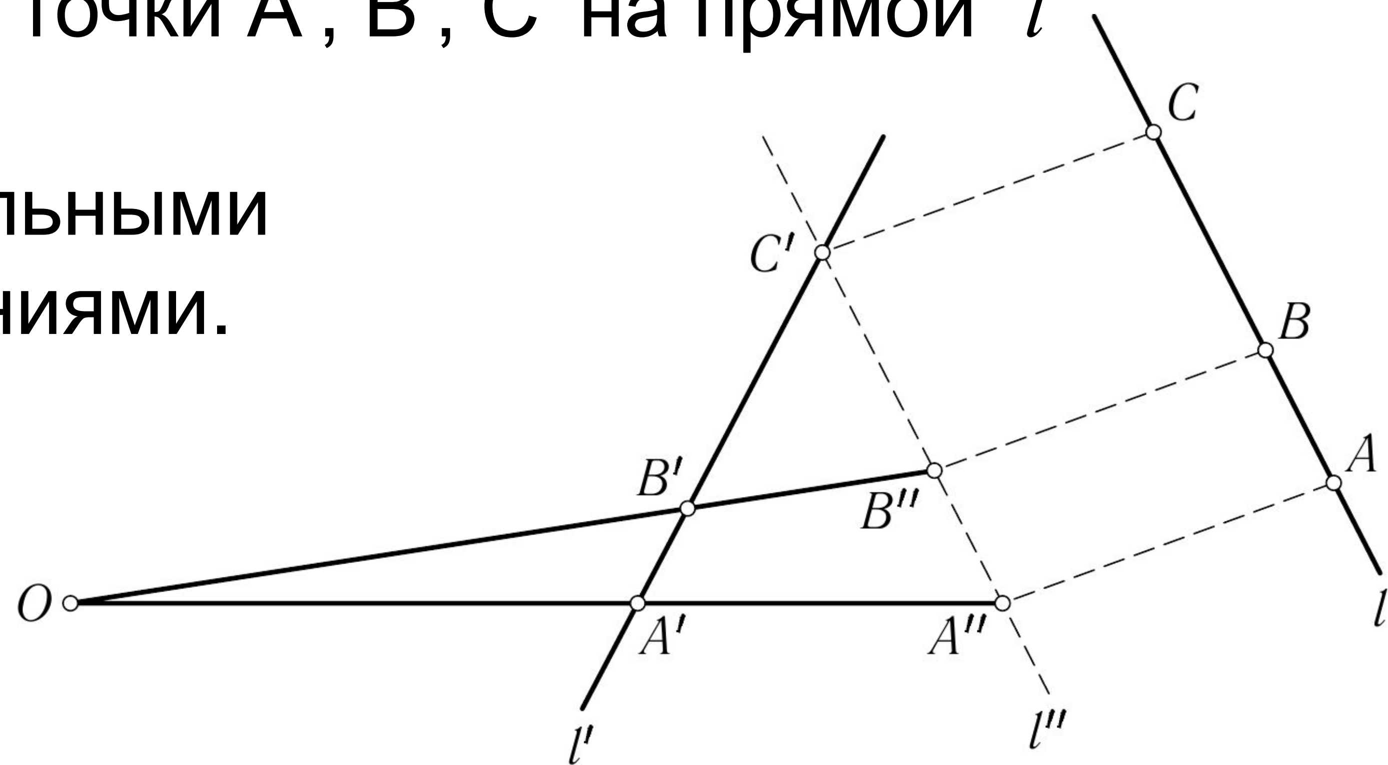
Пусть три точки A, B и C расположены на одной прямой. Проектирование, изменяет расстояния AB, BC и отношение AB / BC (в общем случае).



Три точки на прямой

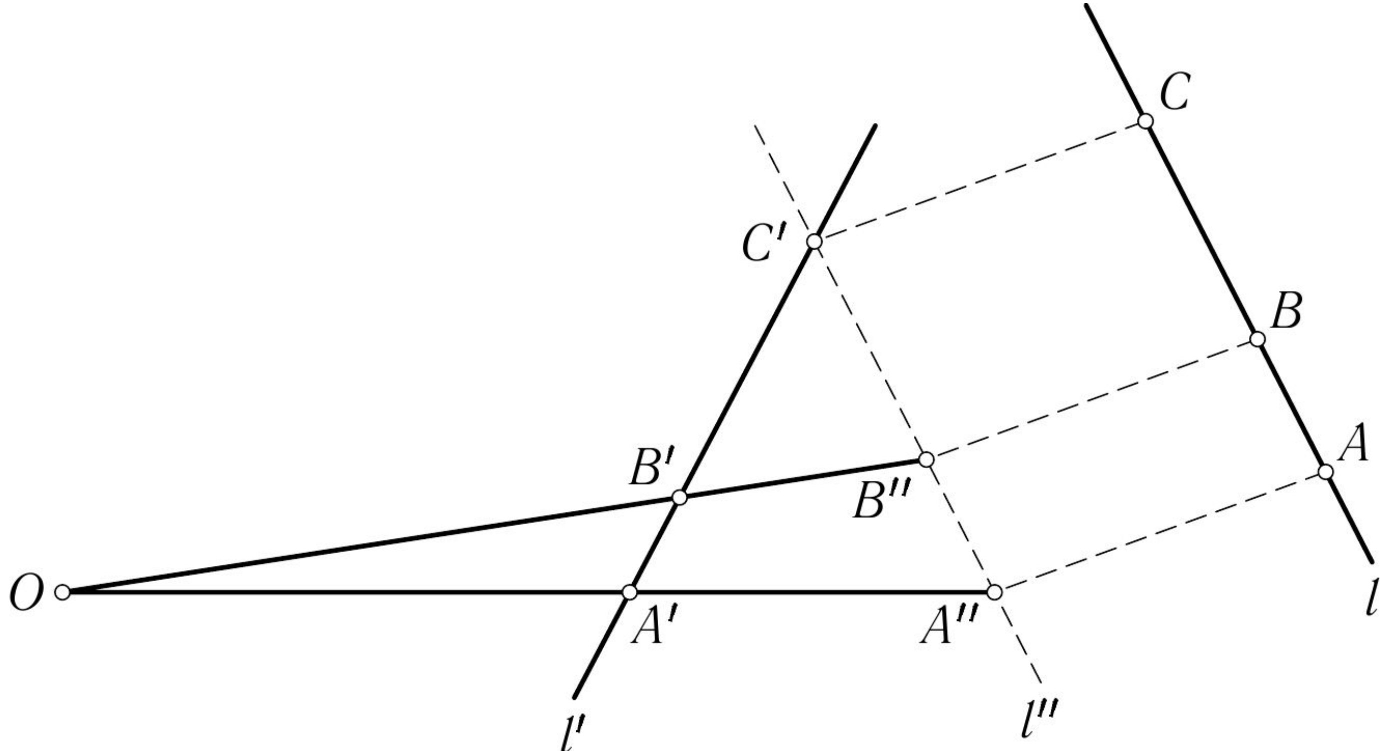
Пусть три точки A, B и C расположены на одной прямой. Проектирование, изменяет расстояния AB, BC и отношение AB / BC (в общем случае).

<u>Любые</u> три точки A, B, C на прямой l можно перевести в ***<u>любые</u>*** три точки A', B', C' на прямой l' двумя последовательными проектированиями.



Проверим это

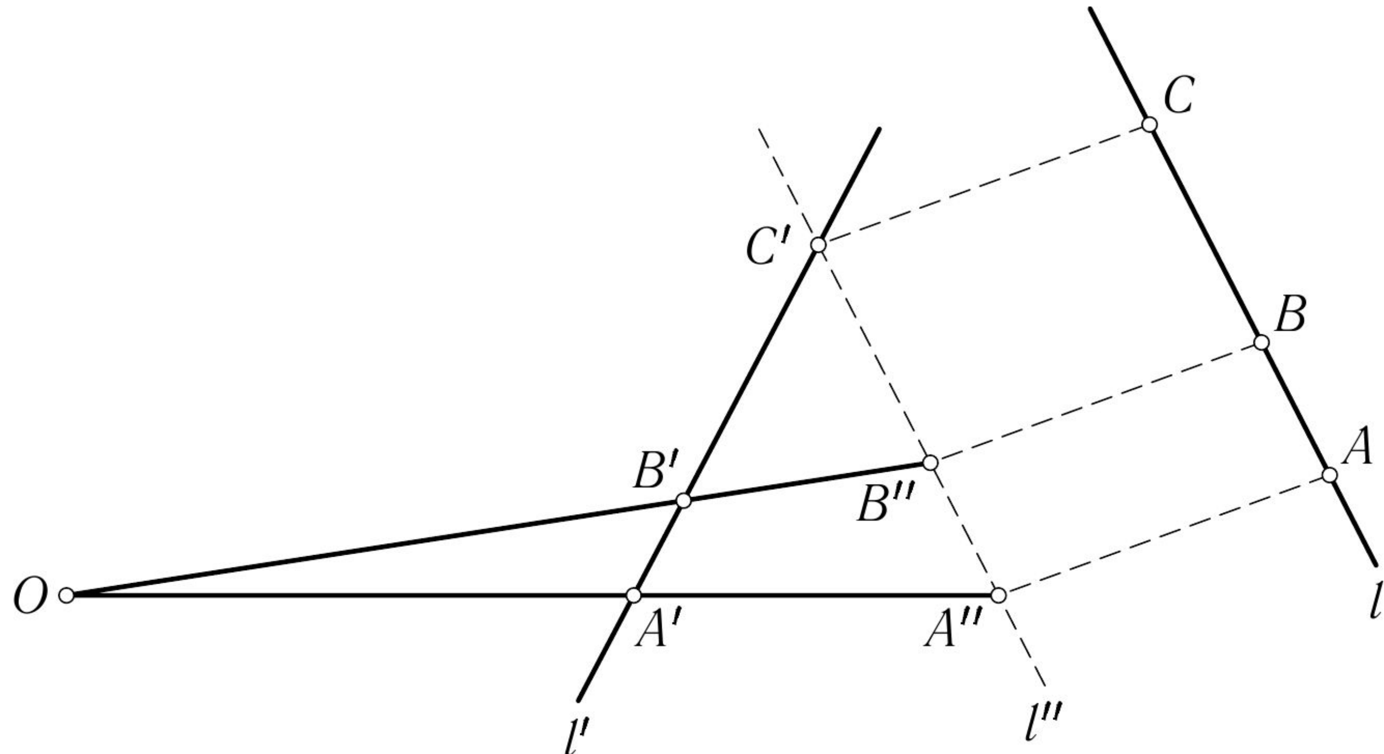
Повернём прямую l' около точки С$'$, до положения $l'' \parallel l$.



Проверим это

Повернём прямую l' около точки C′, до положения $l'' \parallel l$.

Затем, проектируя l на l'' параллельно CC′, получим три точки A″, B″ и C″ (≡C′).

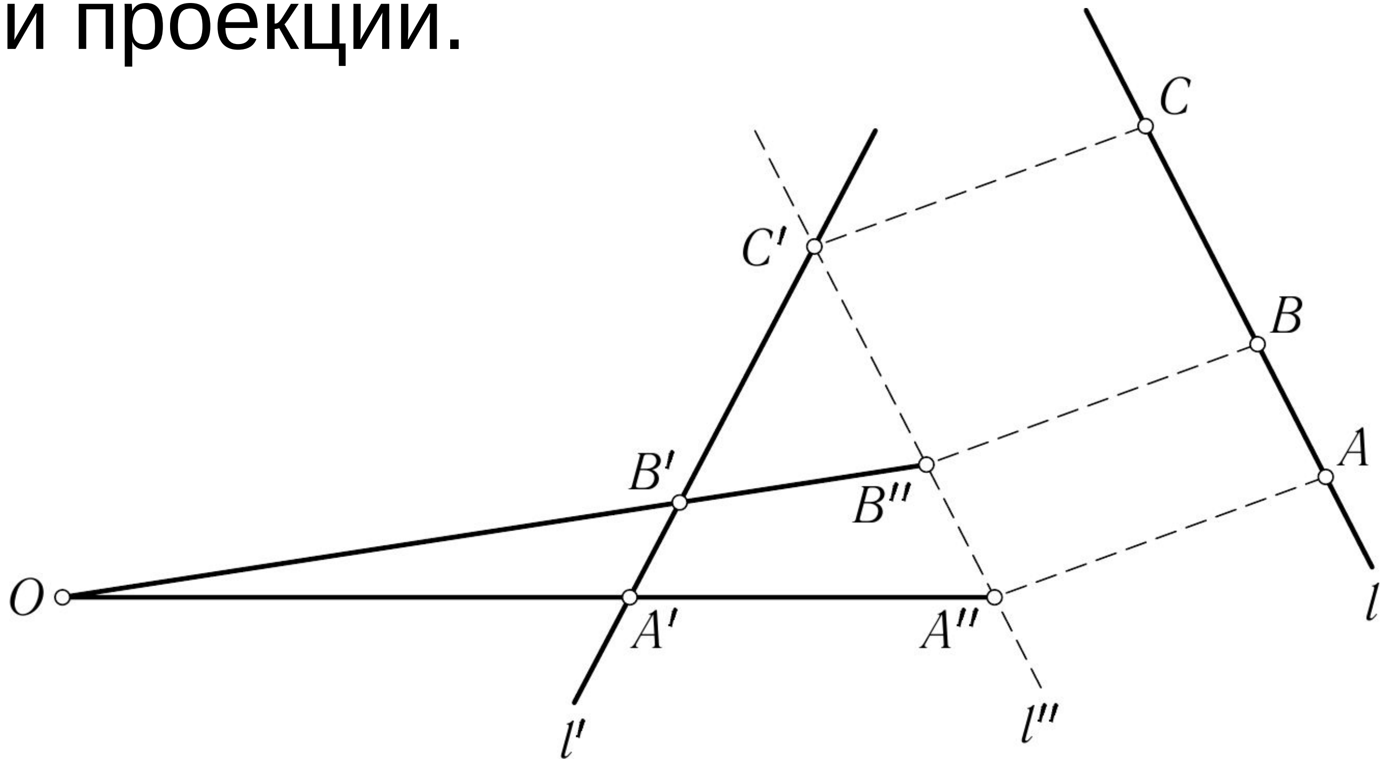


Проверим это

Повернём прямую l' около точки С′, до положения $l'' \parallel l$.

Затем, проектируя l на l'' параллельно СС′, получим три точки А″, В″ и С″ (≡С′).

Прямые А′А″ и В′В″ пересекутся в точке О – центре второй проекции.



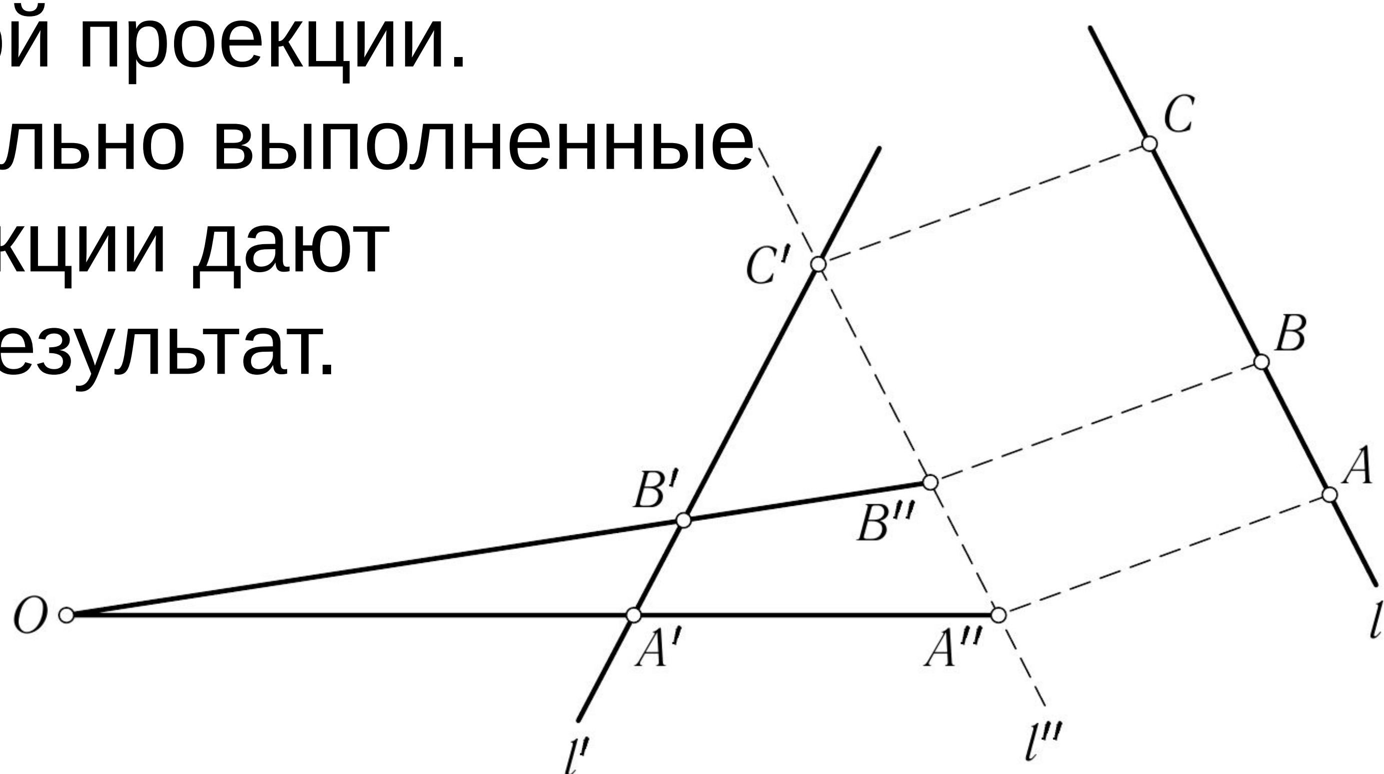
Проверим это

Повернём прямую l' около точки C′, до положения $l'' \parallel l$.

Затем, проектируя l на l'' параллельно CC′, получим три точки A″, B″ и C″ (≡C′).

Прямые A′A″ и B′B″ пересекутся в точке O – центре второй проекции.

Последовательно выполненные эти две проекции дают требуемый результат.



Вывод

Никакая величина,
определяемая только
тремя точками на прямой,
не может быть инвариантной
при проектировании.

Четыре точки на прямой

Пусть на прямой дано четыре точки A, B, C, D, которые при проектировании переходят в точки A', B', C', D' другой прямой.

Четыре точки на прямой

Пусть на прямой дано четыре точки A, B, C, D, которые при проектировании переходят в точки A', B', C', D' другой прямой.

Тогда некоторая величина, называемая ***двойным (сложным) отношением этих четырех точек***, при проектировании не изменяет числового значения.

Четыре точки на прямой

В этом состоит математическое свойство системы четырех точек на прямой.
Это свойство носит инвариантный характер и его можно обнаружить во всякой проекции рассматриваемой прямой.

Четыре точки на прямой

В этом состоит математическое свойство системы четырех точек на прямой.
Это свойство носит инвариантный характер и его можно обнаружить во всякой проекции рассматриваемой прямой.

Двойное отношение
не есть ни расстояние,
ни отношение расстояний,
а есть ***отношение двух таких отношений***.

Четыре точки на прямой

Составим отношения

$$\frac{CA}{CB} \quad \text{и} \quad \frac{DA}{DB}$$

Четыре точки на прямой

Составим отношения

$$\frac{CA}{CB} \quad \text{и} \quad \frac{DA}{DB}$$

тогда их отношение

$$x = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

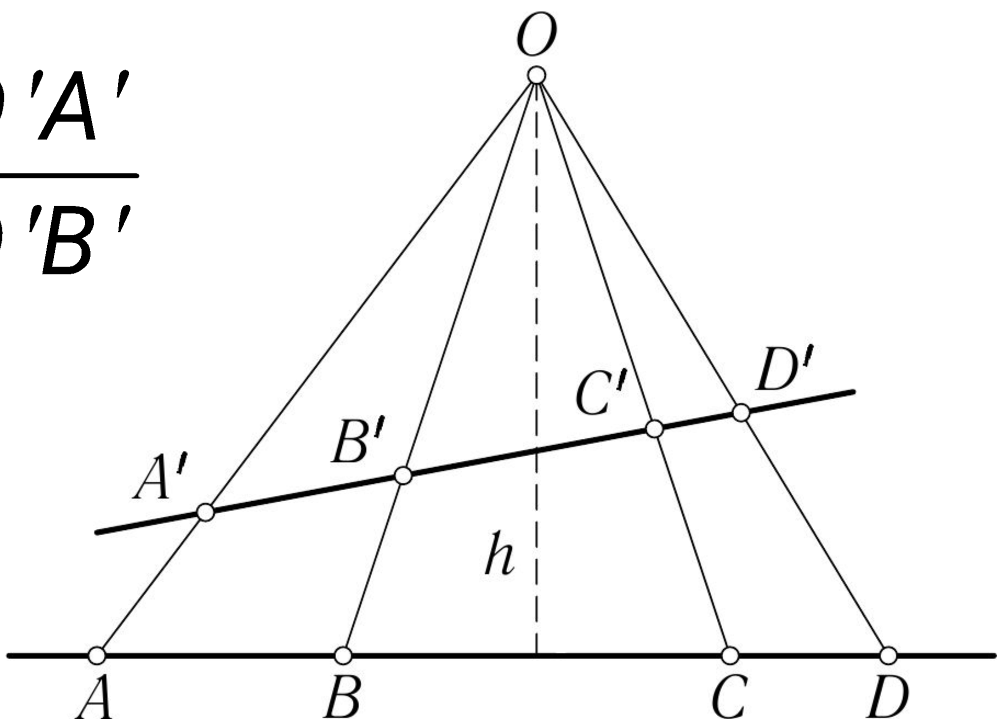
по определению есть
двойное отношение
четырех точек A, B, C, D,
взятых в ***указанном выше порядке***.

Убедимся, что двойное отношение четырех точек ***инвариантно при проектировании***.

Убедимся, что двойное отношение четырех точек ***инвариантно при проектировании***.

Это значит, что если A, B, C, D и A', B', C', D‘ – две четверки точек на двух прямых и между ними установлено проективное соответствие, то тогда справедливо равенство

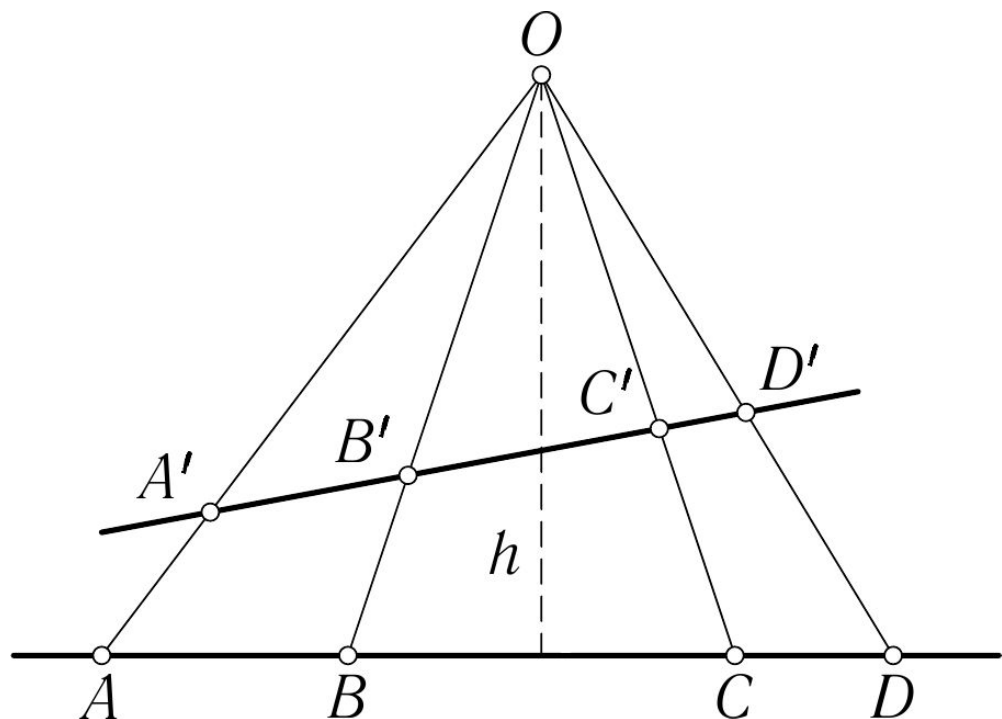
$$\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{C'A'}{C'B'}:\frac{D'A'}{D'B'}$$



Доказательство

Площадь треугольника равна:

1) половине произведения основания на высоту
2) половине произведения двух сторон на синус угла между ними.

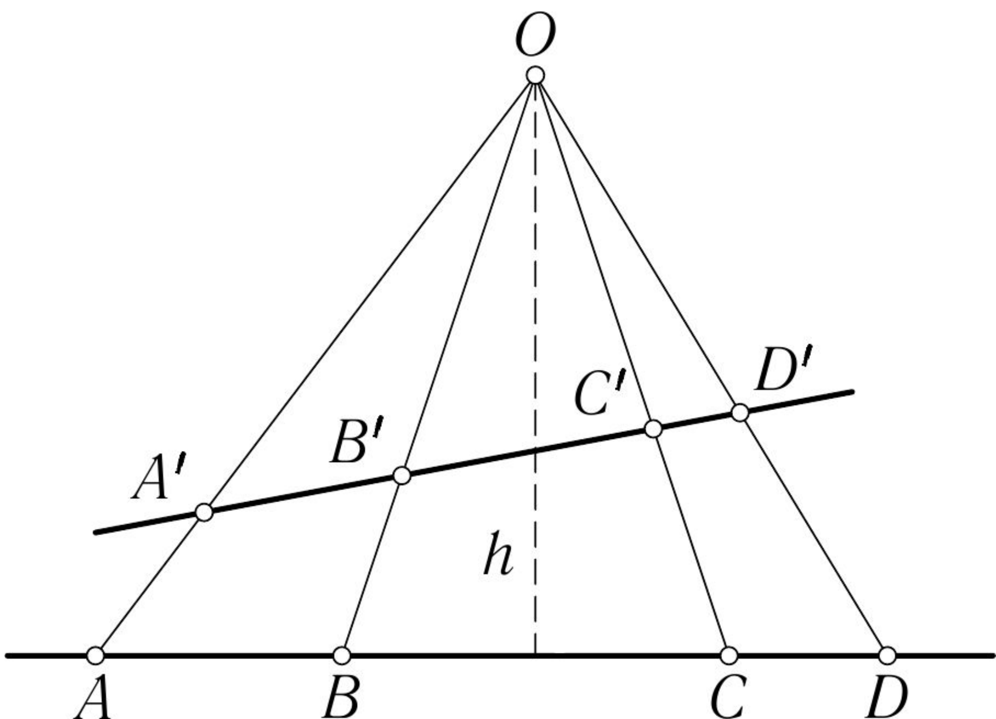


$$S_{OCA} = 1/2 \cdot h \cdot CA = 1/2 \cdot OA \cdot OC \cdot \sin \angle COA$$

$$S_{OCB} = 1/2 \cdot h \cdot CB = 1/2 \cdot OB \cdot OC \cdot \sin \angle COB$$

$$S_{ODA} = 1/2 \cdot h \cdot DA = 1/2 \cdot OA \cdot OD \cdot \sin \angle DOA$$

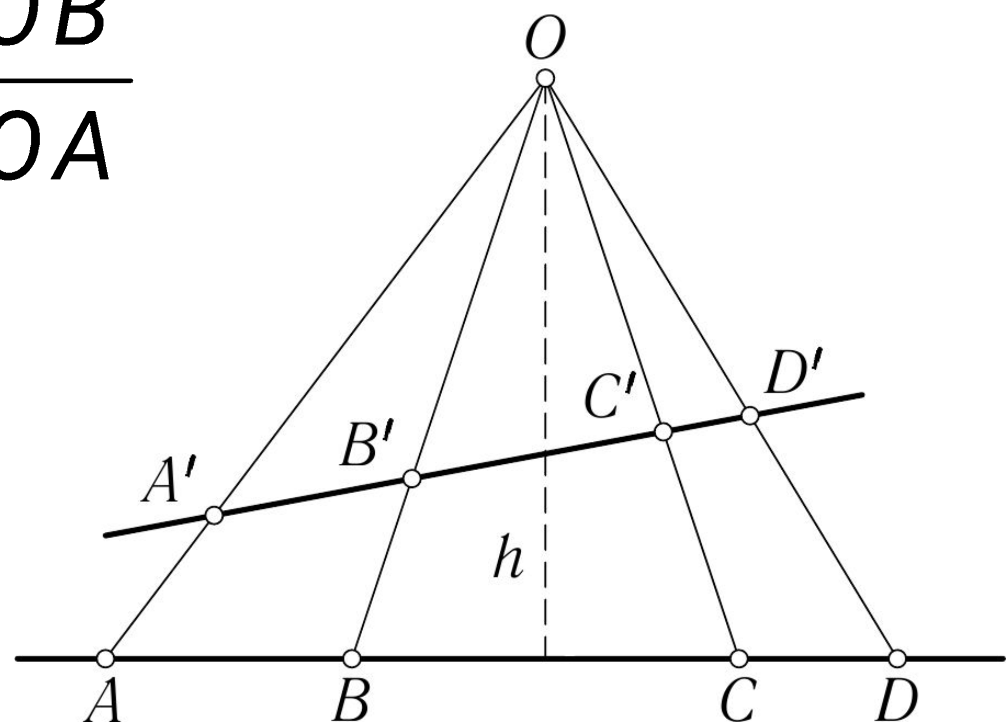
$$S_{ODB} = 1/2 \cdot h \cdot DB = 1/2 \cdot OB \cdot OD \cdot \sin \angle DOB$$



$$\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}\cdot\frac{DB}{DA}=$$

$$=\frac{OA\cdot OC\cdot\sin\angle COA}{OB\cdot OC\cdot\sin\angle COB}\cdot\frac{OB\cdot OD\cdot\sin\angle DOB}{OA\cdot OD\cdot\sin\angle DOA}=$$

$$=\frac{\sin\angle COA}{\sin\angle COB}\cdot\frac{\sin\angle DOB}{\sin\angle DOA}$$



Таким образом, двойное отношение точек A, B, C, D зависит ***только от углов***, образованных в точке O отрезками OA, OB, OC, OD.

Таким образом, двойное отношение точек
A, B, C, D зависит ***только от углов***,
образованных в точке O
отрезками OA, OB, OC, OD.
Так как эти углы – одни и те же,
каковы бы ни были четыре точки A', B�', C', D',
в которые при проектировании переходят
A, B, C, D, то ясно,
что двойное отношение
не изменяется при проектировании.

Двойное отношение не изменяется при параллельном проектировании.
Это следует из элементарных свойств подобных треугольников.

Доказать дома