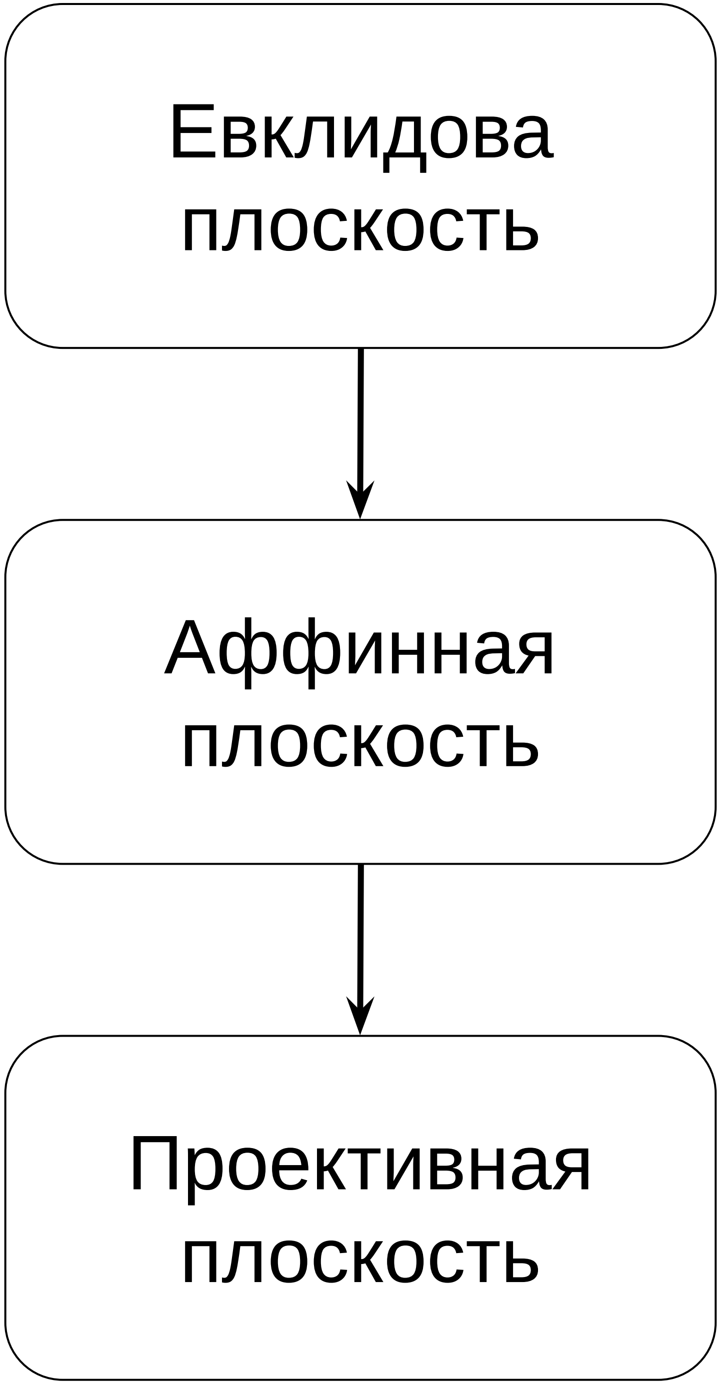
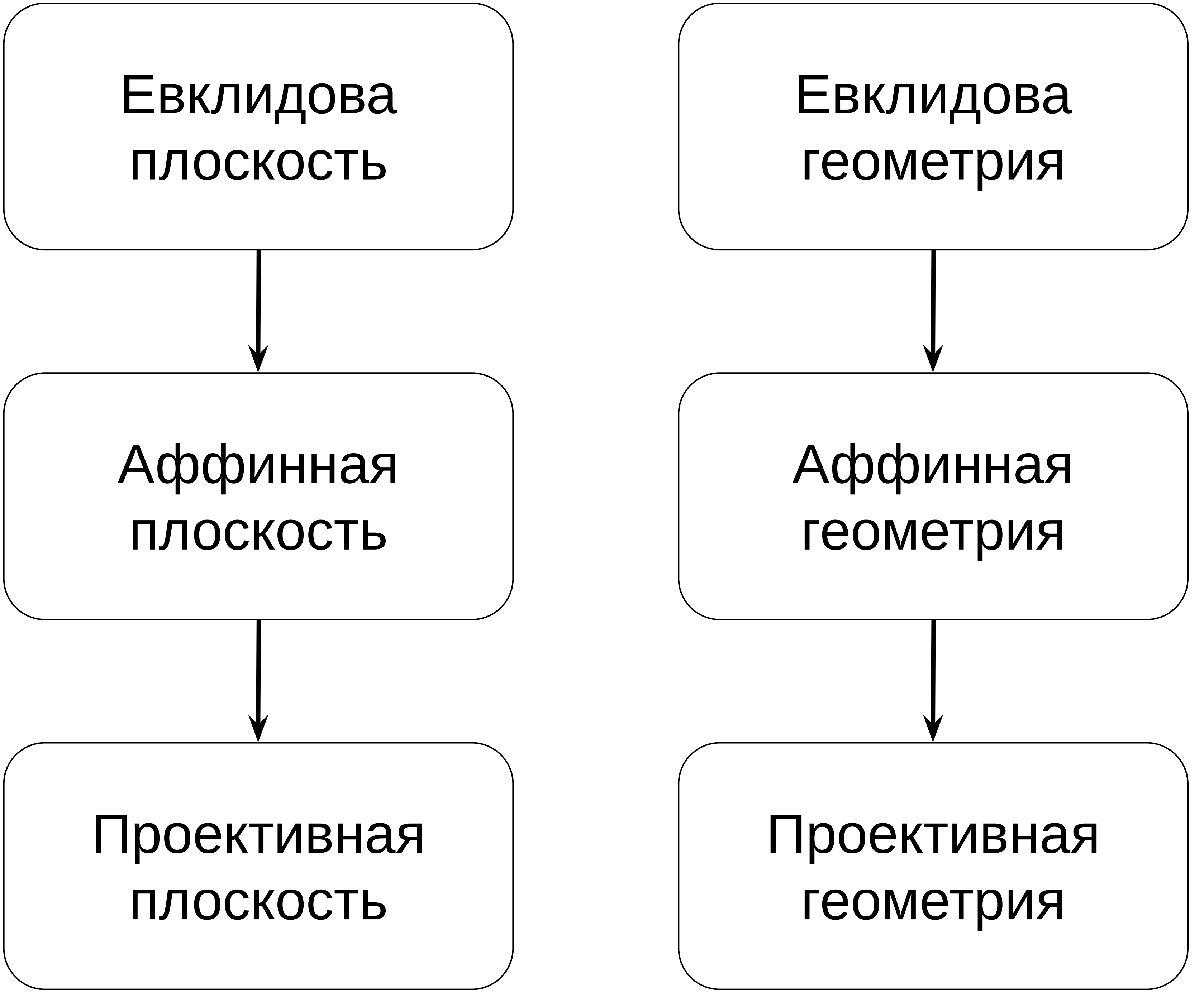
Основные понятия проективной геометрии (продолжение)

1. Некоторые воспоминания


Евклидова плоскость
Аффинная плоскость
Проективная плоскость


Евклидова плоскость
Евклидова геометрия
Аффинная плоскость
Аффинная геометрия
Проективная плоскость
Проективная геометрия

Проективные свойства (инварианты)

Проективные свойства (инварианты)

инцидентность
коллинеарность
конкуррентность

2. Принцип двойственности

Взаимно-двойственные элементы

точка

прямая

Взаимно-двойственные элементы

точка

прямая

Взаимно-двойственные операции

провести прямую через точку

отметить точку на прямой

Пример замены «точка ↔ прямая»

Через две различные **<u>точки</u>** можно провести единственную **<u>прямую</u>**

Пример замены «точка ↔ прямая»

Через две различные **<u>точки</u>** можно провести единственную **<u>прямую</u>**	Через две различные **<u>прямые</u>** можно провести единственную **<u>точку</u>**

Пример замены «точка $\leftrightarrow$ прямая»

Через две различные **точки** можно провести единственную **прямую**	Через две различные **прямые** можно провести единственную **точку**
Две различные **точки** ***инцидентны*** единственной **прямой**	

Пример замены «точка ↔ прямая»

Через две различные **<u>точки</u>** можно провести единственную **<u>прямую</u>**	Через две различные **<u>прямые</u>** можно провести единственную **<u>точку</u>**
Две различные **<u>точки</u>** ***инцидентны*** единственной **<u>прямой</u>**	Две различные **<u>прямые</u>** ***инцидентны*** единственной **<u>точке</u>**

Пример замены «точка ↔ прямая»

Через две различные **<u>точки</u>** можно провести единственную **<u>прямую</u>**	Через две различные **<u>прямые</u>** можно провести единственную **<u>точку</u>**
Две различные **<u>точки</u>** ***инцидентны*** единственной **<u>прямой</u>**	Две различные **<u>прямые</u>** ***инцидентны*** единственной **<u>точке</u>**

Принцип двойственности

Из каждого ***проективного предложения*** относительно <u>точек</u> и <u>прямых</u> на плоскости может быть получено ***второе предложение*** путём замены слова «**точка**» словом «**прямая**» и наоборот.

Жан Виктор Понселе
офицер инженерного корпуса.
Написано в г.Саратове
в 1812-1815 г.г.

Принцип двойственности

Две фигуры взаимно двойственны, если одна может быть получена из другой посредством замены каждого элемента и каждой операции двойственным элементом и двойственной операцией.

Принцип двойственности

Две теоремы взаимно двойственны, если одна превращается в другую при замене каждого элемента и каждой операции двойственным элементом и двойственной операцией.

Принцип двойственности

Явление двойственности резко отличает проективную геометрию
от элементарной (метрической),
в которой никакой двойственности не наблюдается.

Принцип двойственности

Явление двойственности резко отличает проективную геометрию
от элементарной (метрической),
в которой никакой двойственности не наблюдается.

<u>Например</u>, бессмысленно искать какое-нибудь «двойственное» утверждение по отношению к тому факту, что данный угол содержит 37° или
что данный отрезок равен 2 линейным единицам.

Принцип двойственности

Каждой верной теореме проективной геометрии сопоставляется двойственная ей, также верная теорема.

Принцип двойственности

Каждой верной теореме проективной геометрии сопоставляется двойственная ей, также верная теорема.

Следствие. Двойственную теорему можно не доказывать.

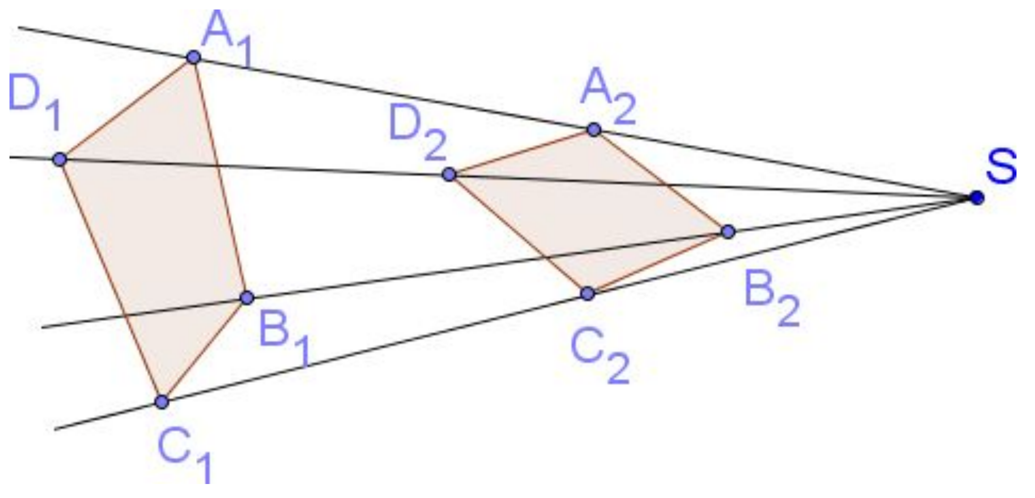
Перспективность относительно точки

Есть **<u>две</u>** конфигурации из точек
(могут быть и проходящие через них прямые).

Перспективность относительно точки

Есть **<u>две</u>** конфигурации из точек
(могут быть и проходящие через них прямые).

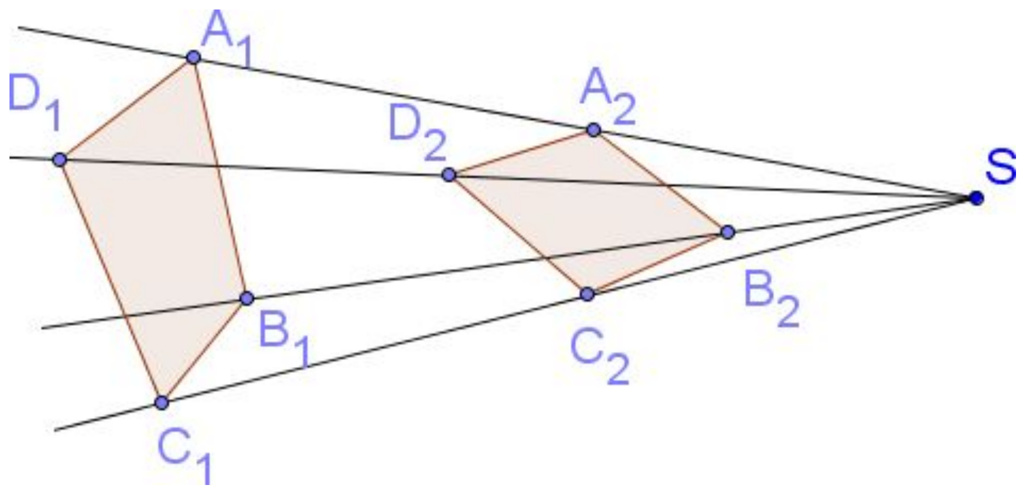
Соединим соответствующие точки прямыми попарно.



Перспективность относительно точки

Есть **<u>две</u>** конфигурации из точек (могут быть и проходящие через них прямые).

Соединим соответствующие точки прямыми попарно.



Если эти прямые пересекаются в одной точке, то такие две конфигурации ***перспективны относительно этой точки –***

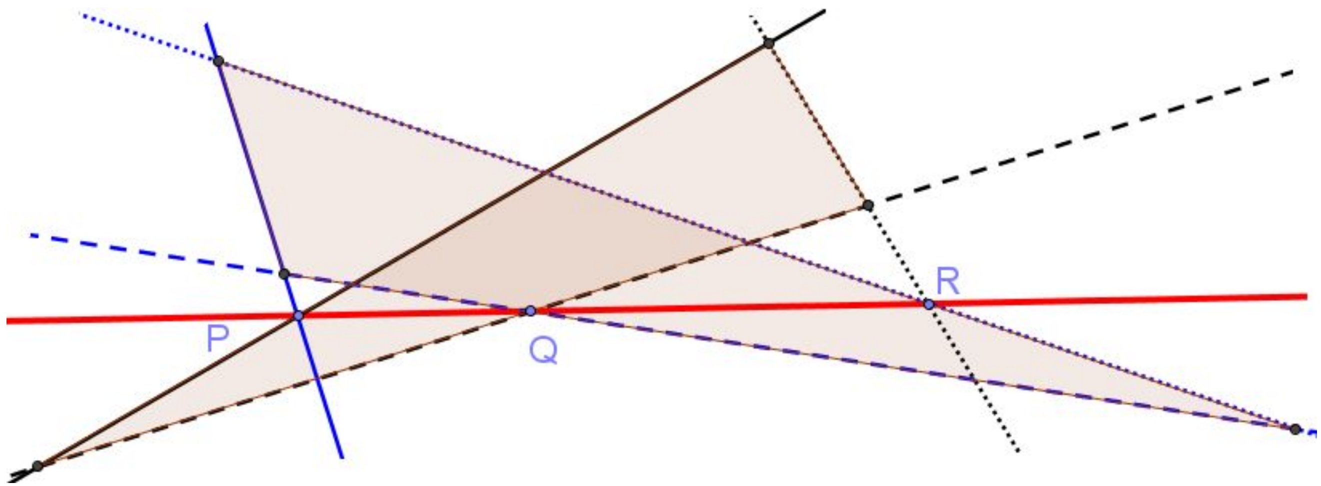
Перспективность относительно прямой

Есть <u>**две**</u> конфигурации из прямых
(могут быть выделены точки их пересечения).

Перспективность относительно прямой

Есть **<u>две</u>** конфигурации из прямых
(могут быть выделены точки их пересечения).

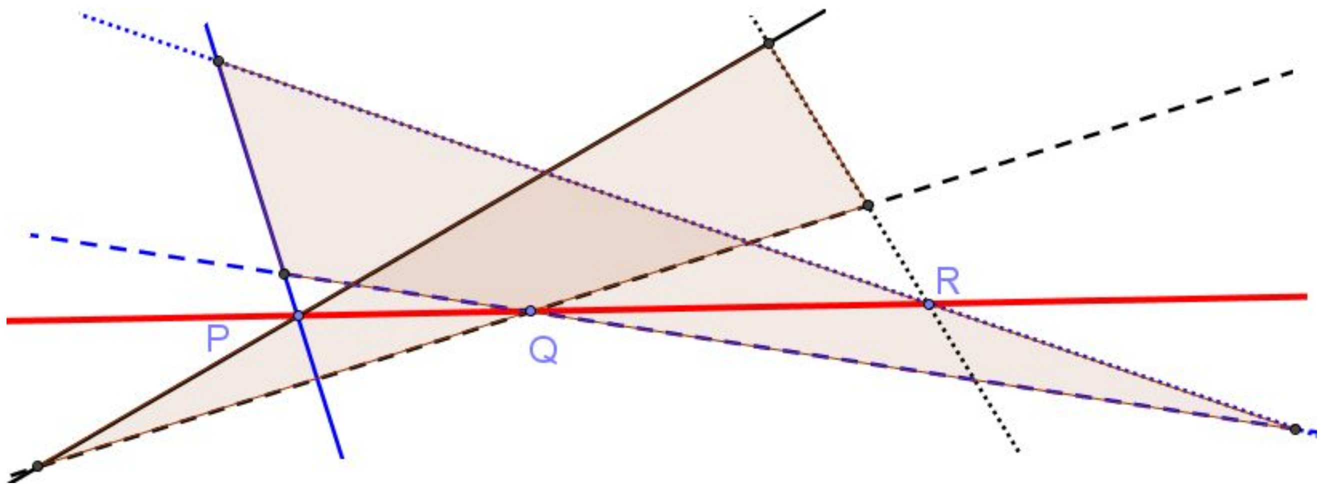
Выделим точки пересечения соответствующих прямых.



Перспективность относительно прямой

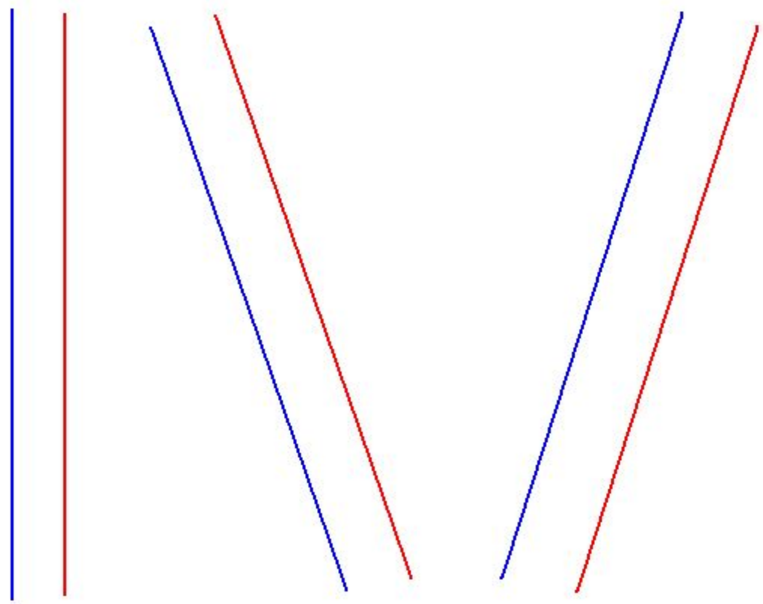
Есть **<u>две</u>** конфигурации из прямых (могут быть выделены точки их пересечения).

Выделим точки пересечения соответствующих прямых.

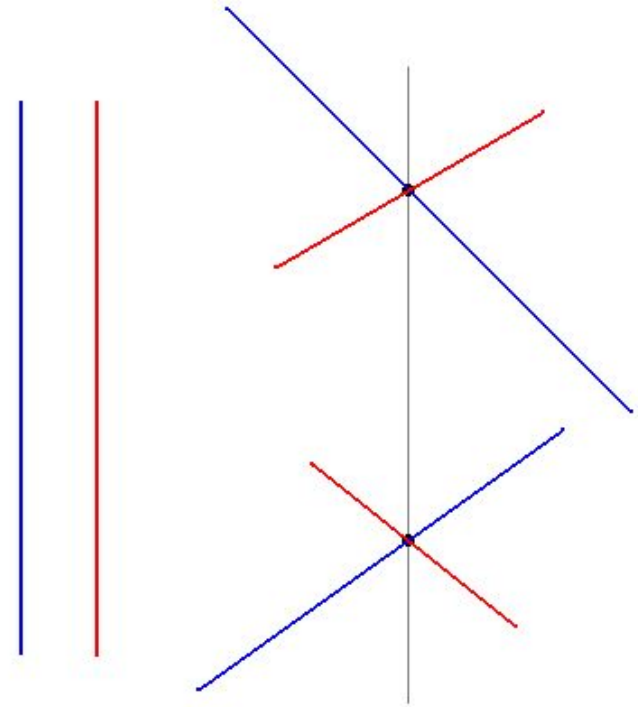


Если эти точки лежат на одной прямой, то такие две конфигурации ***перспективны относительно этой прямой –***

Экзотические случаи



Ось перспективы – несобственная прямая



Ось перспективы – светлая прямая (третья точка – несобственная)

Пример. Теорема Дезарга

Если два треугольника перспективны относительно точки, то три точки пересечения соответствующих их сторон коллинеарны.

Пример. Теорема Дезарга

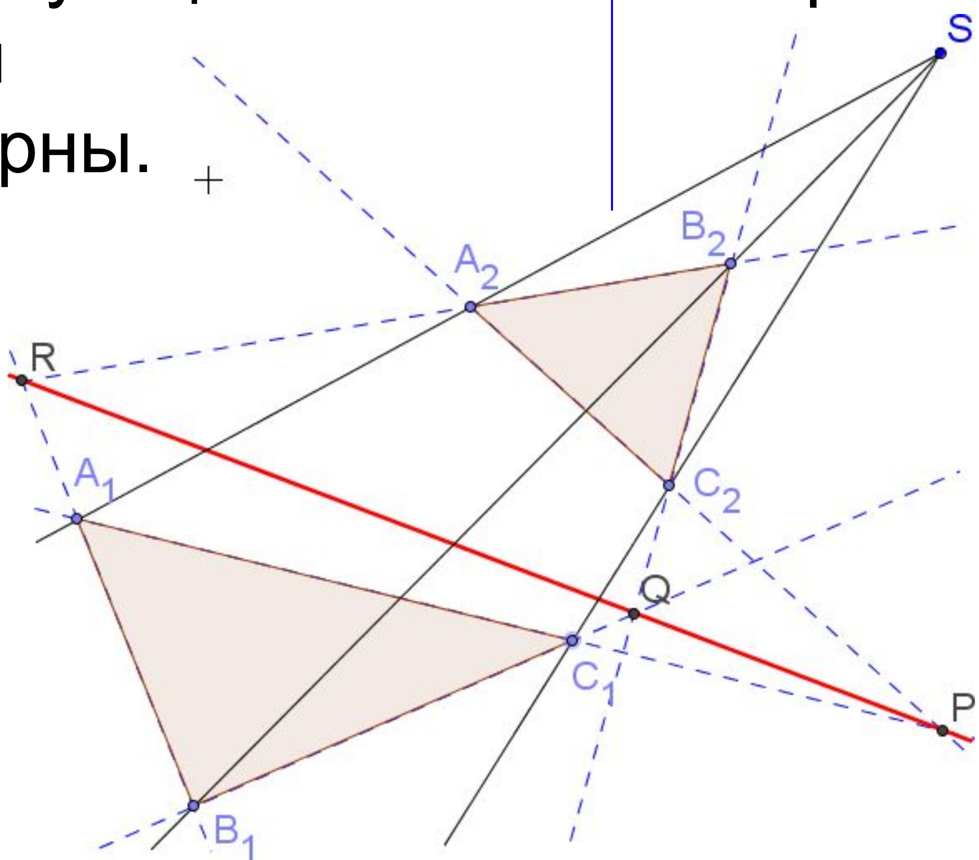
Если два треугольника перспективны относительно точки, то три точки пересечения соответствующих их сторон коллинеарны.

Если два треугольника перспективны относительно прямой, то три прямые, проходящие через соответствующие их вершины конкурентны.

Пример. Теорема Дезарга

Если два треугольника перспективны относительно точки, то три точки пересечения соответствующих их сторон коллинеарны.

Если два треугольника перспективны относительно прямой, то три прямые, проходящие через соответствующие их вершины конкуррентны.



<u>Пример</u>. Теорема Дезарга

Если два треугольника перспективны относительно точки, то они перспективны и относительно прямой.

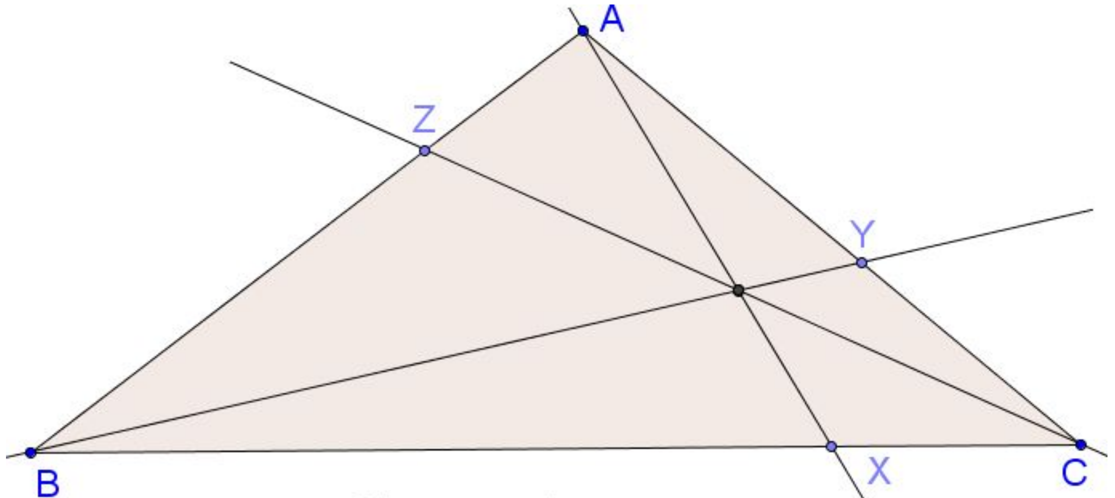
<u>Пример</u>. Теорема Дезарга

Если два треугольника перспективны относительно точки, то они перспективны и относительно прямой.

Если два треугольника перспективны относительно прямой, то они перспективны и относительно точки.

Вспомогательные теоремы

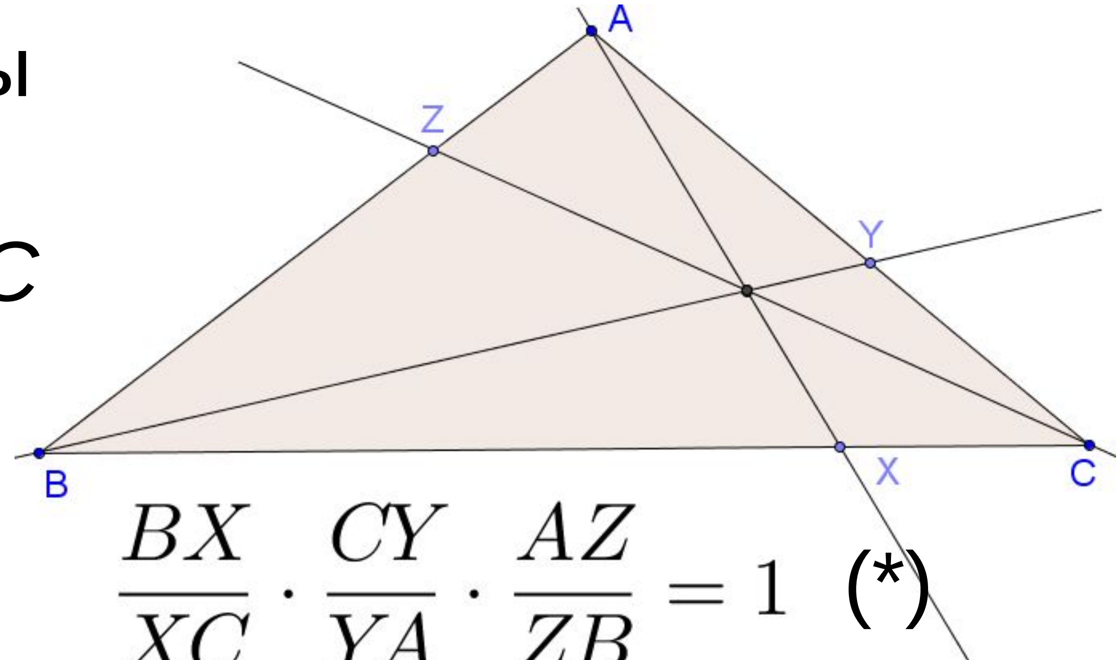
Теорема Чевы



$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1 \quad (*)$$

Теорема Чевы

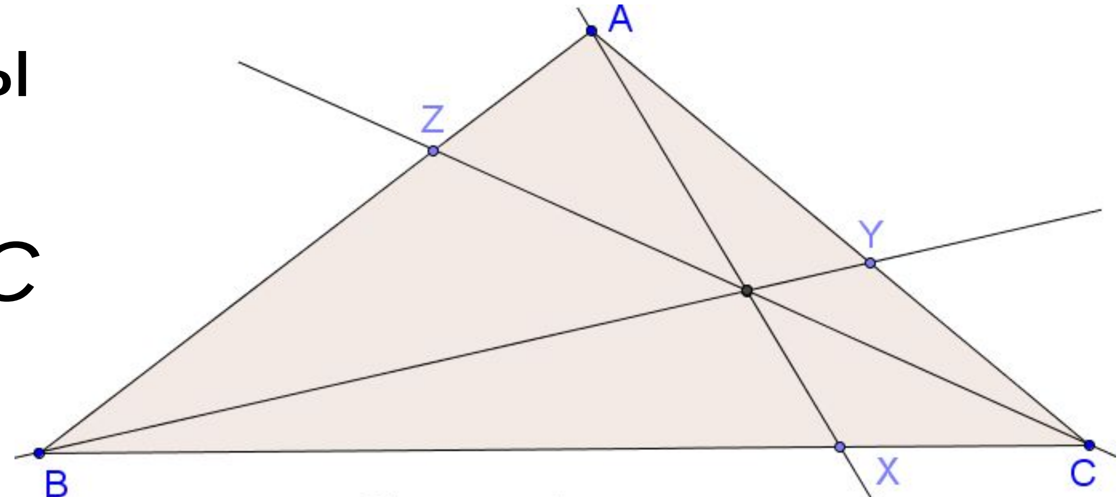
Если три чевианы *AX*, *BY*, *CZ* треугольника *ABC* конкуррентны, то выполняется соотношение (*).



$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1 \quad (*)$$

Теорема Чевы

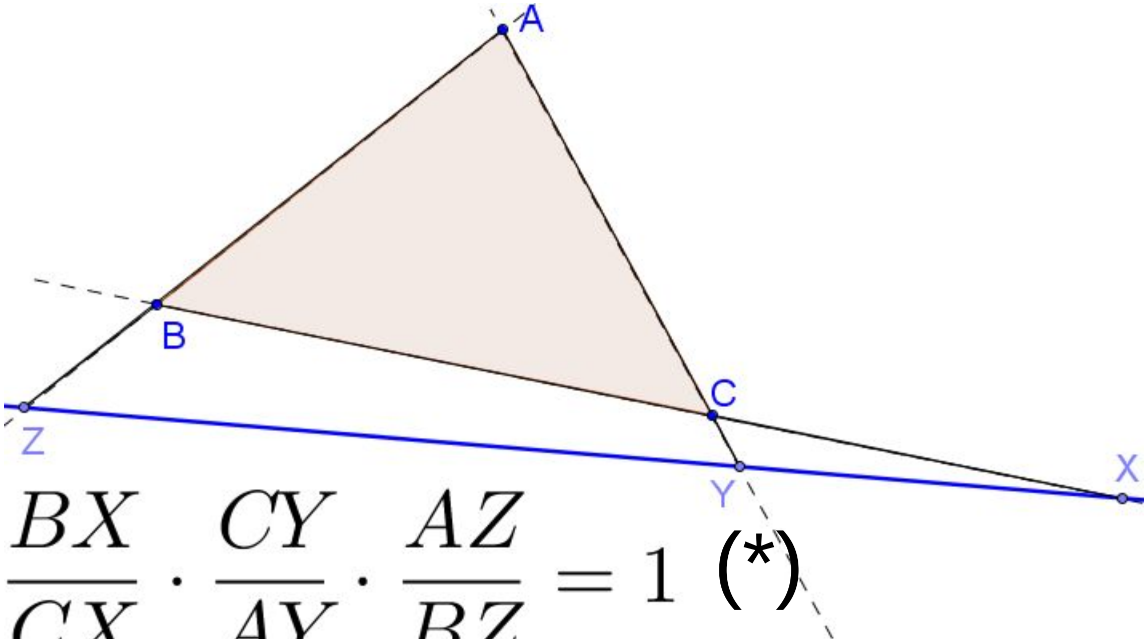
Если три чевианы *AX*, *BY*, *CZ* треугольника *ABC* конкуррентны, то выполняется соотношение (*).



$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1 \quad (*)$$

Если три чевианы *AX*, *BY*, *CZ* треугольника *ABC* удовлетворяют соотношению (*), то они конкуррентны.

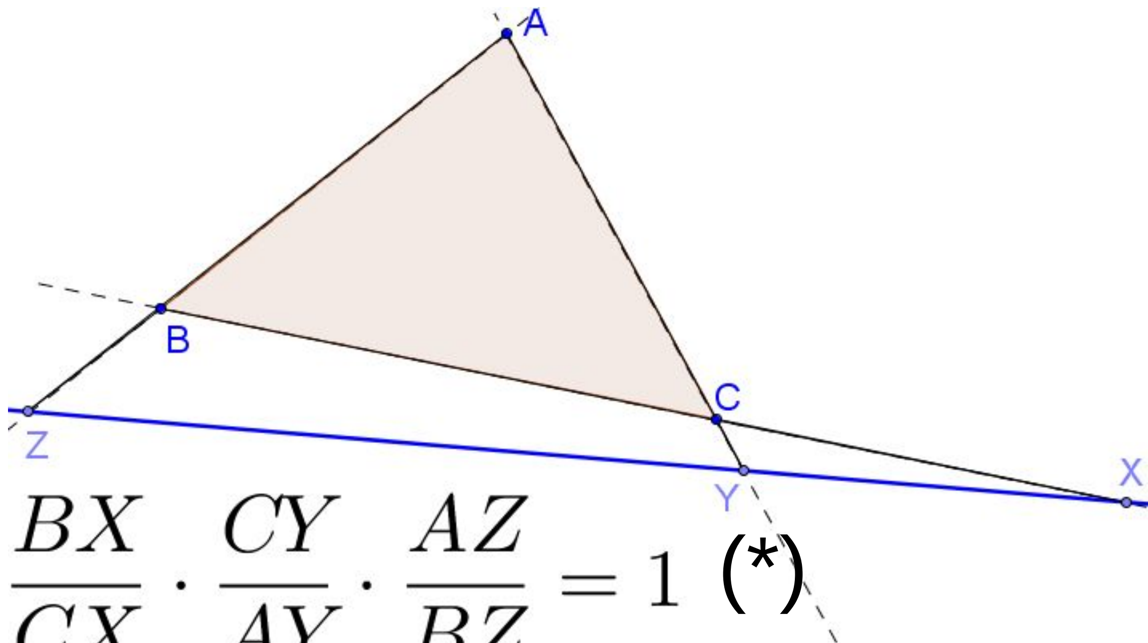
Теорема Менелая



$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1\ (*)$$

Теорема Менелая

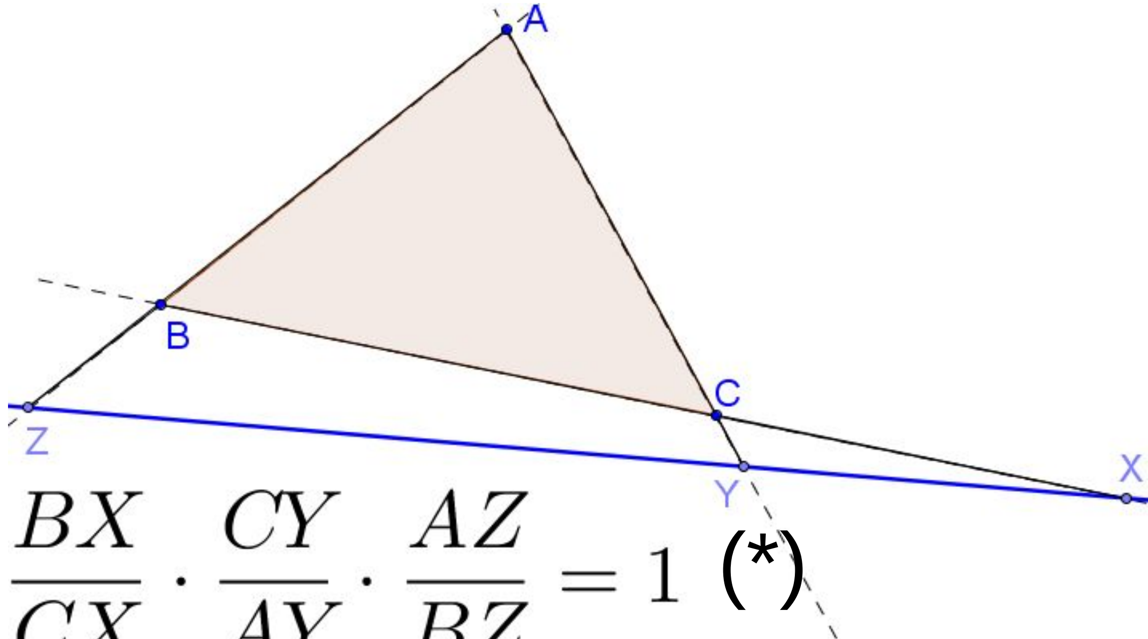
Если точки
X, *Y*, *Z*, лежащие
на сторонах
BC, *CA*, *AB*
треугольника *ABC*
коллинеарны,
то выполняется
соотношение (*).



$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1 \quad (*)$$

Теорема Менелая

Если точки
X, *Y*, *Z*, лежащие
на сторонах
BC, *CA*, *AB*
треугольника *ABC*
коллинеарны,
то выполняется
соотношение (*).



$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1 \quad (*)$$

Если соотношению (*) выполняется для точек
X, *Y*, *Z*, лежащих на трёх сторонах
треугольника *ABC*, то эти точки коллинеарны.

Резюме

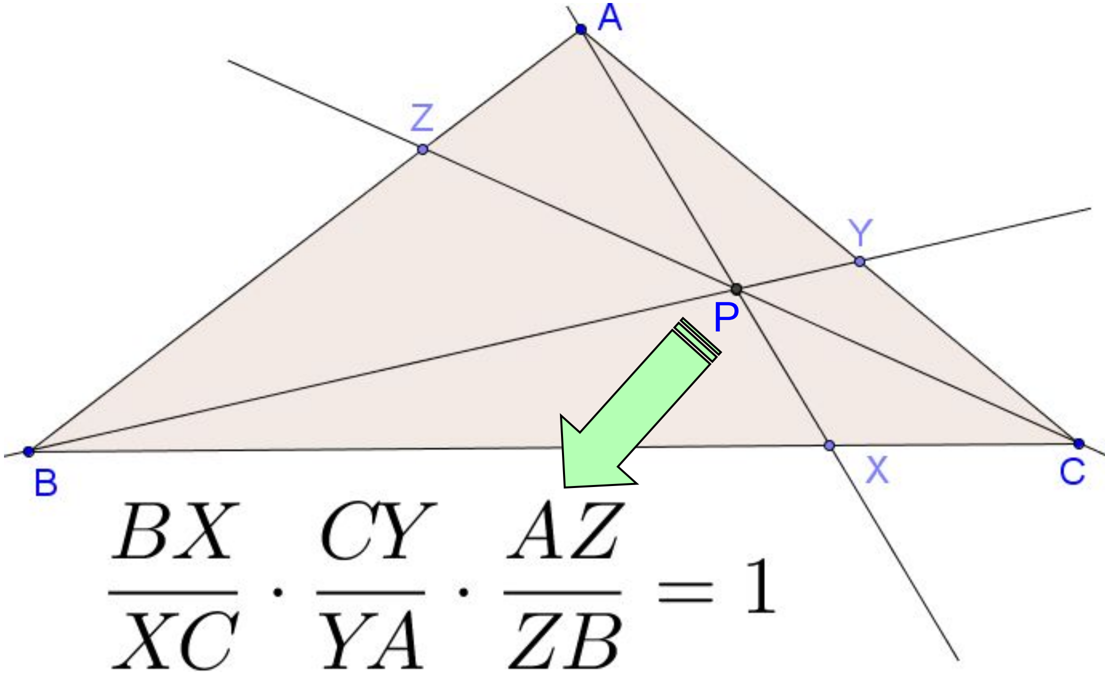
Теорема Чевы – критерий ***конкуррентности***.

Теорема Менелая – критерий ***коллинеарности***.

Домашнее задание

Доказать теоремы Чевы и Менелая (прямую и обратную).

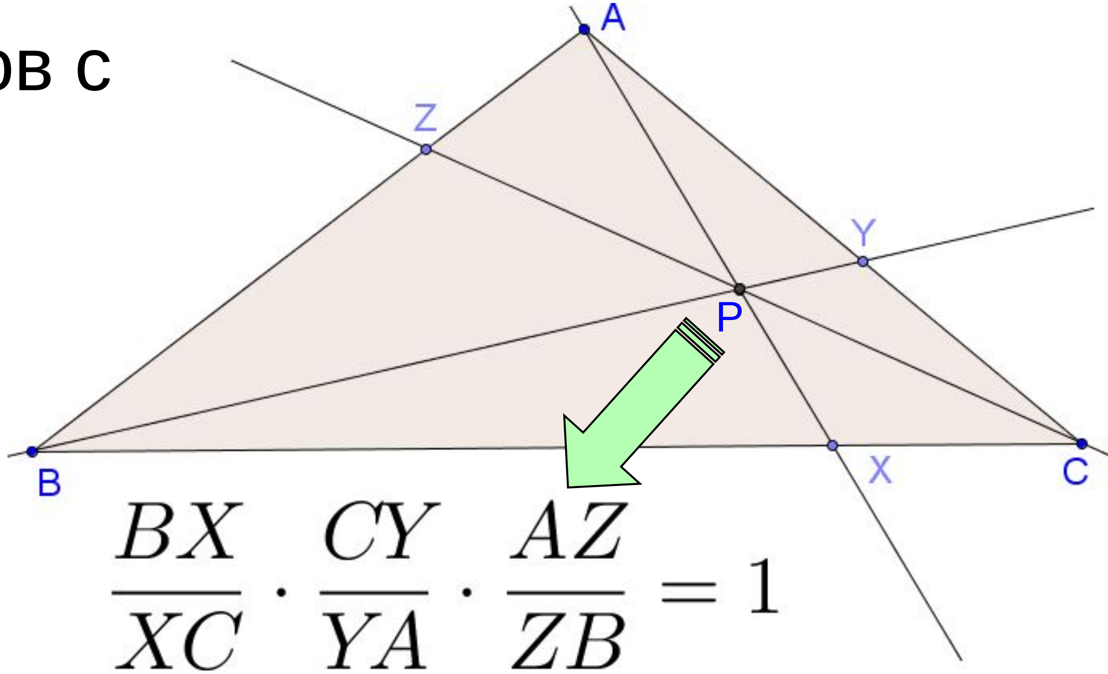
Теорема Чевы (доказательство)



$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

Теорема Чевы (доказательство)

Площади треугольников с равными высотами пропорциональны основаниям треугольников:

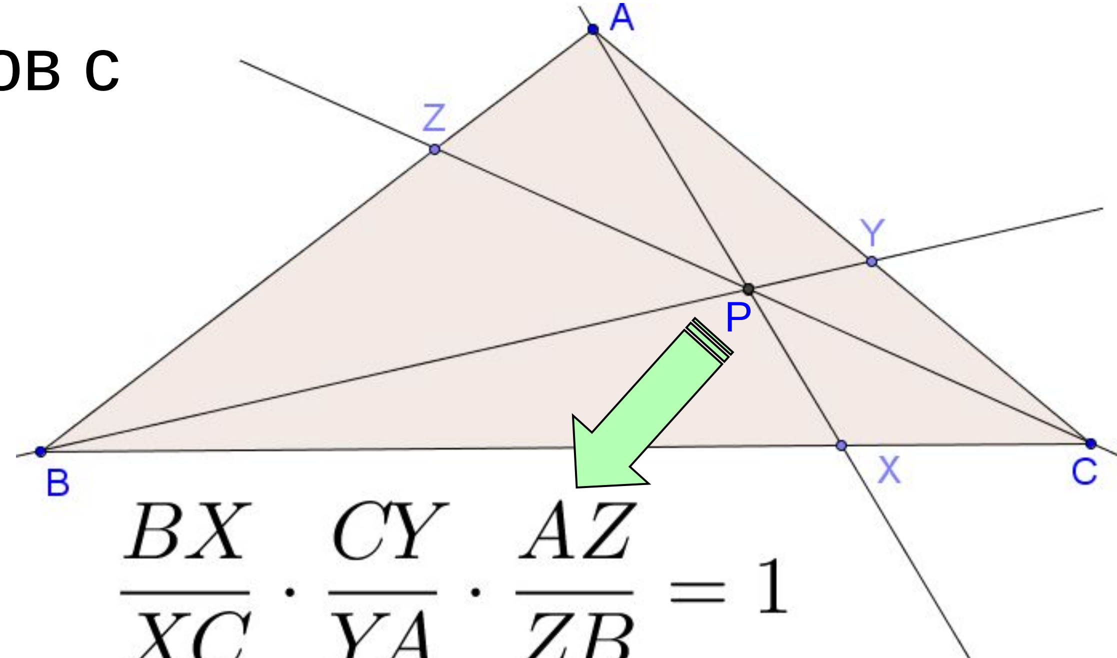


$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

Теорема Чевы (доказательство)

Площади треугольников с равными высотами пропорциональны основаниям треугольников:

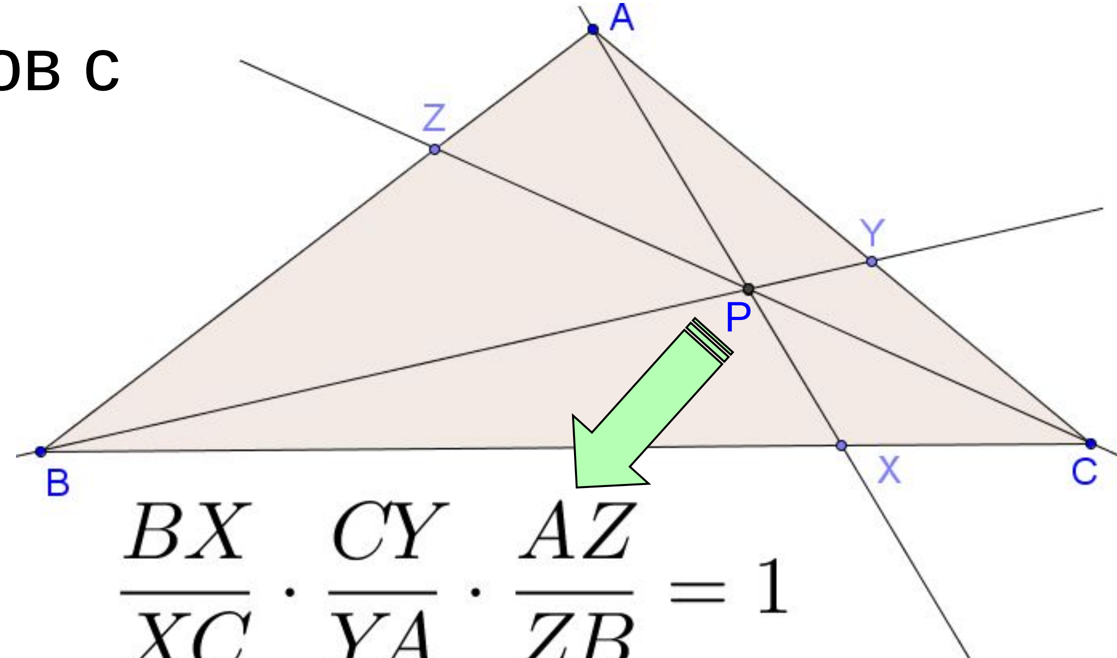
$$\frac{BX}{XC} = \frac{S_{ABX}}{S_{AXC}} = \frac{S_{PBX}}{S_{PXC}} =$$



$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

Теорема Чевы (доказательство)

Площади треугольников с равными высотами пропорциональны основаниям треугольников:



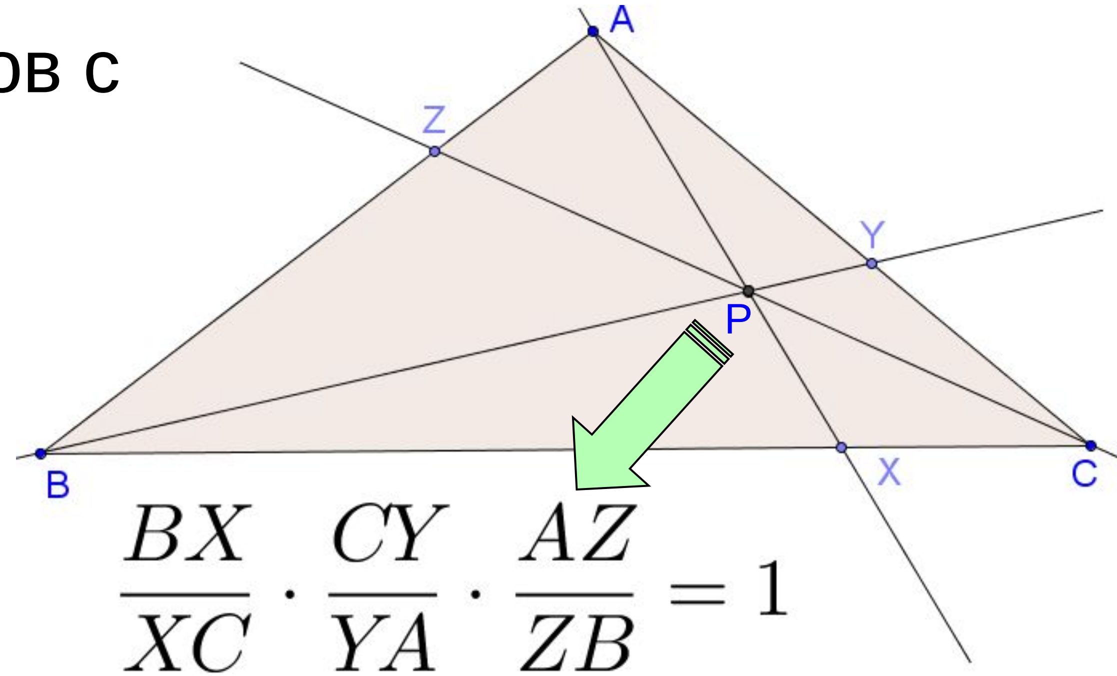
$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

$$\frac{BX}{XC} = \frac{S_{ABX}}{S_{AXC}} = \frac{S_{PBX}}{S_{PXC}} =$$

$$= \frac{S_{ABX} - S_{PBX}}{S_{AXC} - S_{PXC}} = \frac{S_{APB}}{S_{APC}}.$$

Теорема Чевы (доказательство)

Площади треугольников с равными высотами пропорциональны основаниям треугольников:



$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

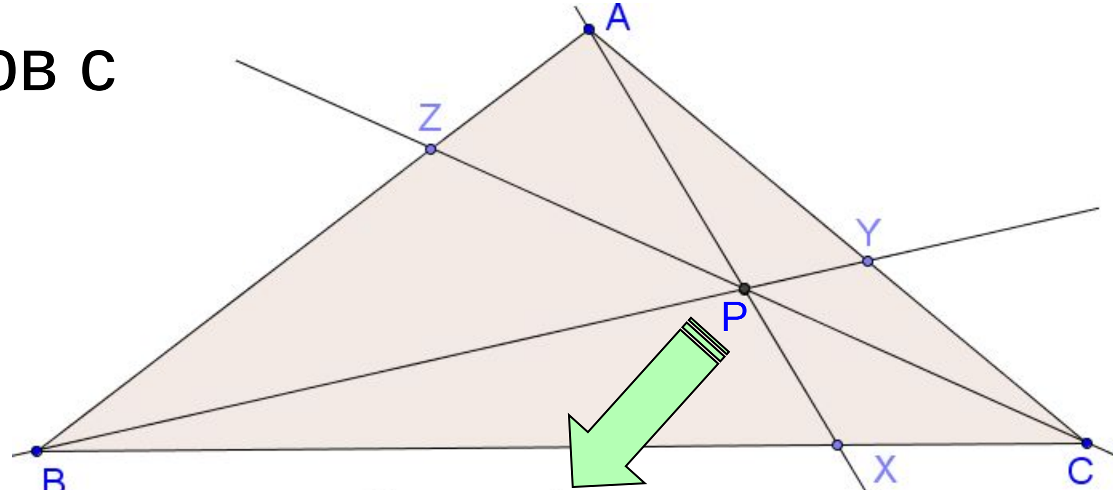
$$\frac{BX}{XC}=\frac{S_{ABX}}{S_{AXC}}=\frac{S_{PBX}}{S_{PXC}}=$$

$$=\frac{S_{ABX}-S_{PBX}}{S_{AXC}-S_{PXC}}=\frac{S_{APB}}{S_{APC}}.$$

Аналогично:

$$\frac{CY}{YA}=\frac{S_{BPC}}{S_{BPA}};\qquad \frac{AZ}{ZB}=\frac{S_{CPA}}{S_{CPB}}.$$

Теорема Чевы (доказательство)



$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

Площади треугольников с равными высотами пропорциональны основаниям треугольников:

$$\frac{BX}{XC}=\frac{S_{ABX}}{S_{AXC}}=\frac{S_{PBX}}{S_{PXC}}=$$

$$=\frac{S_{ABX}-S_{PBX}}{S_{AXC}-S_{PXC}}=\frac{S_{APB}}{S_{APC}}.$$

Перемножим

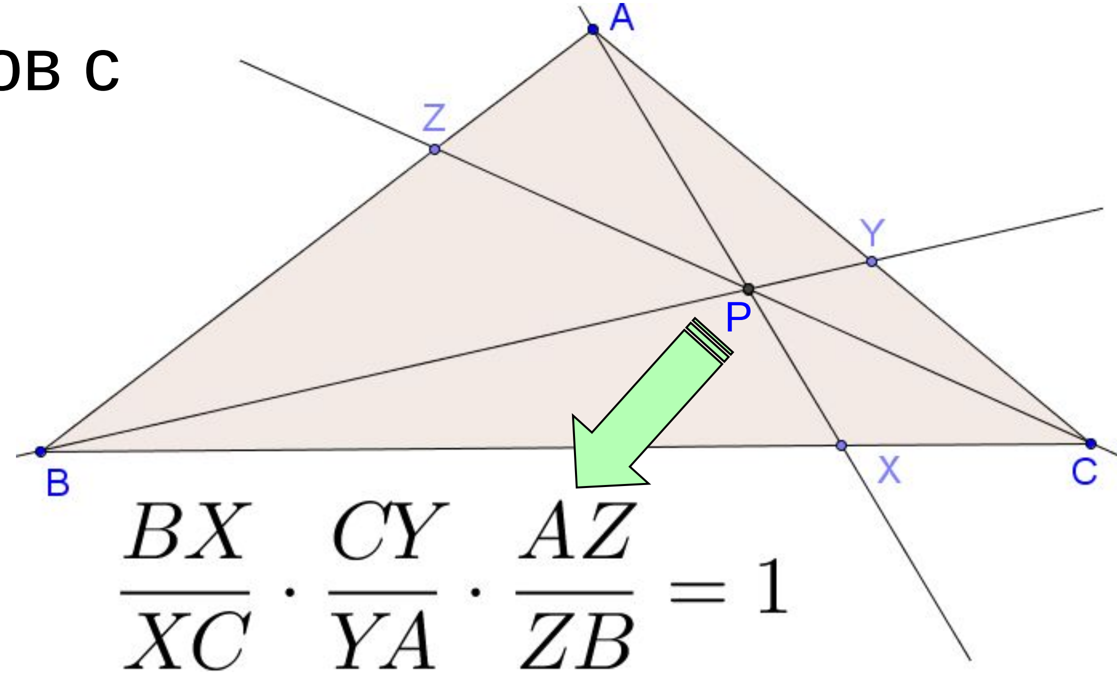
$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=$$

Аналогично:

$$\frac{CY}{YA}=\frac{S_{BPC}}{S_{BPA}};\qquad \frac{AZ}{ZB}=\frac{S_{CPA}}{S_{CPB}}.$$

Теорема Чевы (доказательство)

Площади треугольников с равными высотами пропорциональны основаниям треугольников:



$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

$$\frac{BX}{XC}=\frac{S_{ABX}}{S_{AXC}}=\frac{S_{PBX}}{S_{PXC}}=$$

$$=\frac{S_{ABX}-S_{PBX}}{S_{AXC}-S_{PXC}}=\frac{S_{APB}}{S_{APC}}.$$

Перемножим

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=$$

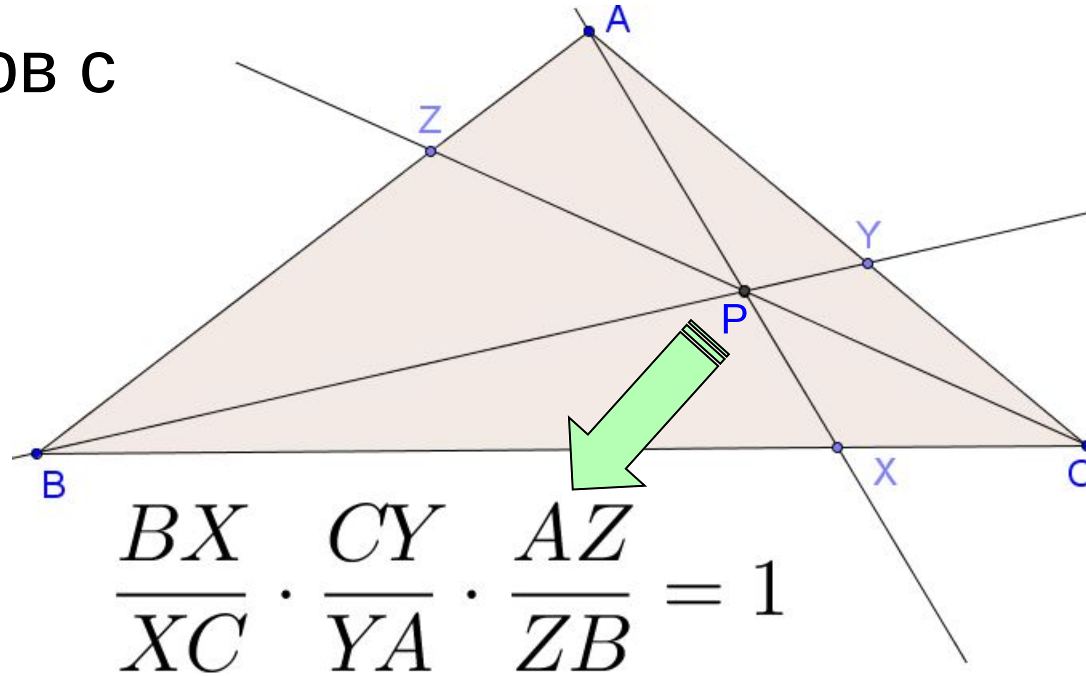
$$=\frac{S_{APB}}{S_{APC}}\cdot\frac{S_{BPC}}{S_{BPA}}\cdot\frac{S_{CPA}}{S_{CPB}}$$

Аналогично:

$$\frac{CY}{YA}=\frac{S_{BPC}}{S_{BPA}};\qquad \frac{AZ}{ZB}=\frac{S_{CPA}}{S_{CPB}}.$$

Теорема Чевы (доказательство)

Площади треугольников с равными высотами пропорциональны основаниям треугольников:



$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

$$\frac{BX}{XC}=\frac{S_{ABX}}{S_{AXC}}=\frac{S_{PBX}}{S_{PXC}}=$$

$$=\frac{S_{ABX}-S_{PBX}}{S_{AXC}-S_{PXC}}=\frac{S_{APB}}{S_{APC}}.$$

Перемножим

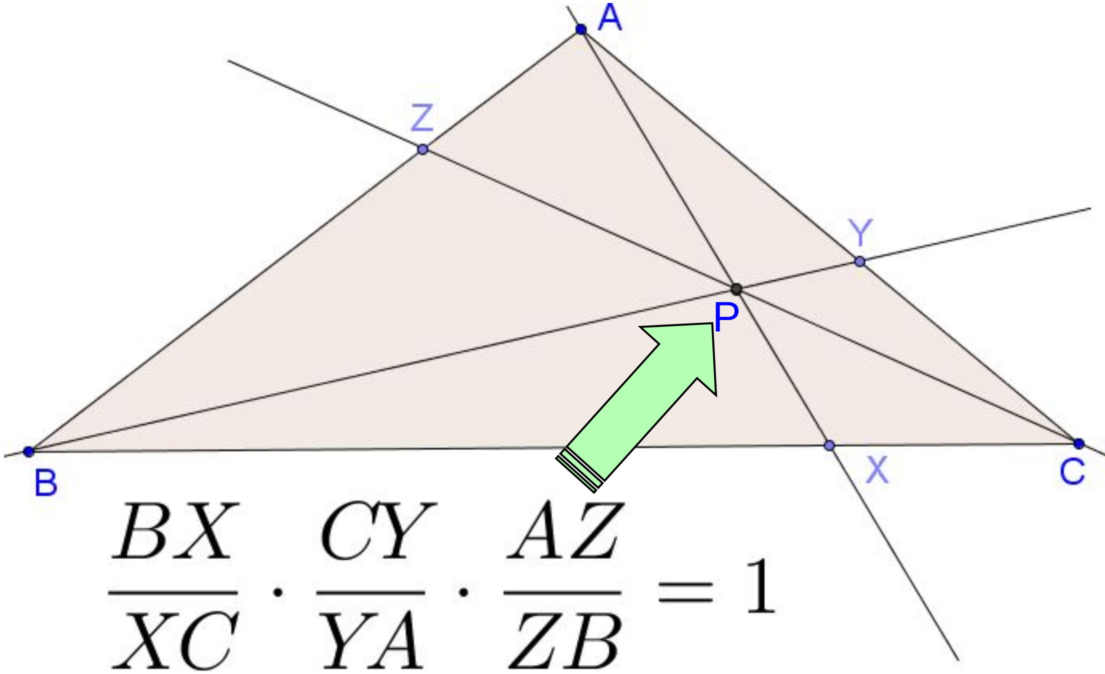
$$\boxed{\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=}$$

$$=\frac{\cancel{S_{APB}}}{\cancel{S_{APC}}}\cdot\frac{\cancel{S_{BPC}}}{\cancel{S_{BPA}}}\cdot\frac{\cancel{S_{CPA}}}{\cancel{S_{CPB}}}\boxed{=1}.$$

Аналогично:

$$\frac{CY}{YA}=\frac{S_{BPC}}{S_{BPA}};\qquad \frac{AZ}{ZB}=\frac{S_{CPA}}{S_{CPB}}.$$

Теорема Чевы (доказательство)

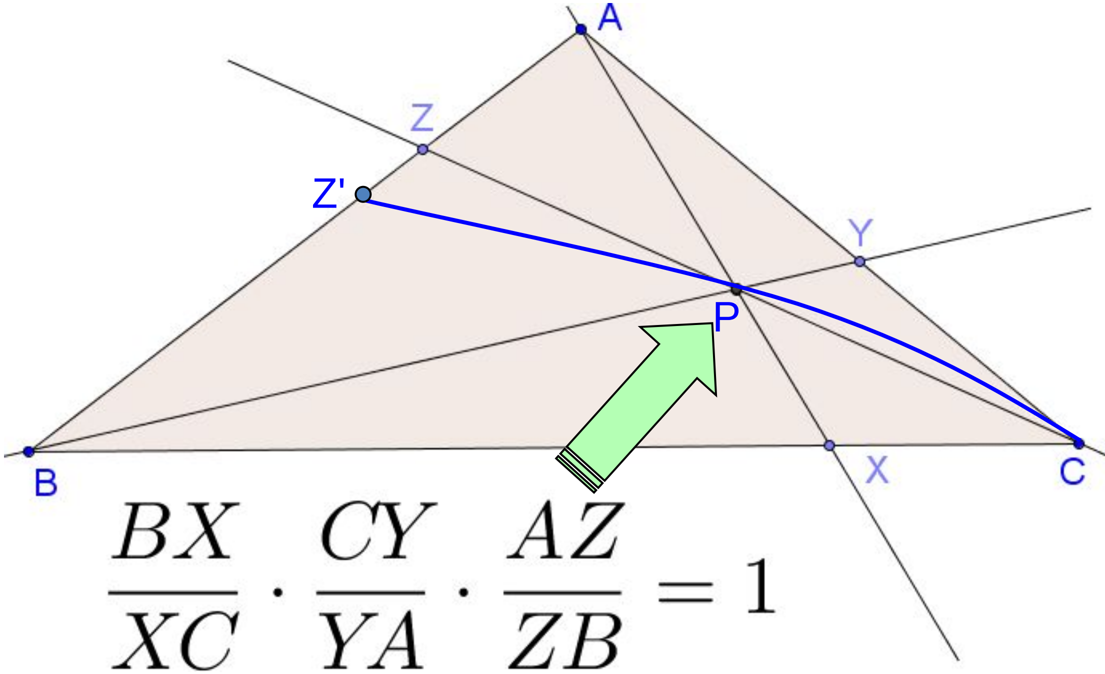


$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

Теорема Чевы (доказательство)

Пусть *AX* и *BY* пересекаются в т.*P*.

Третья Чевиана – *CZ'*.



$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

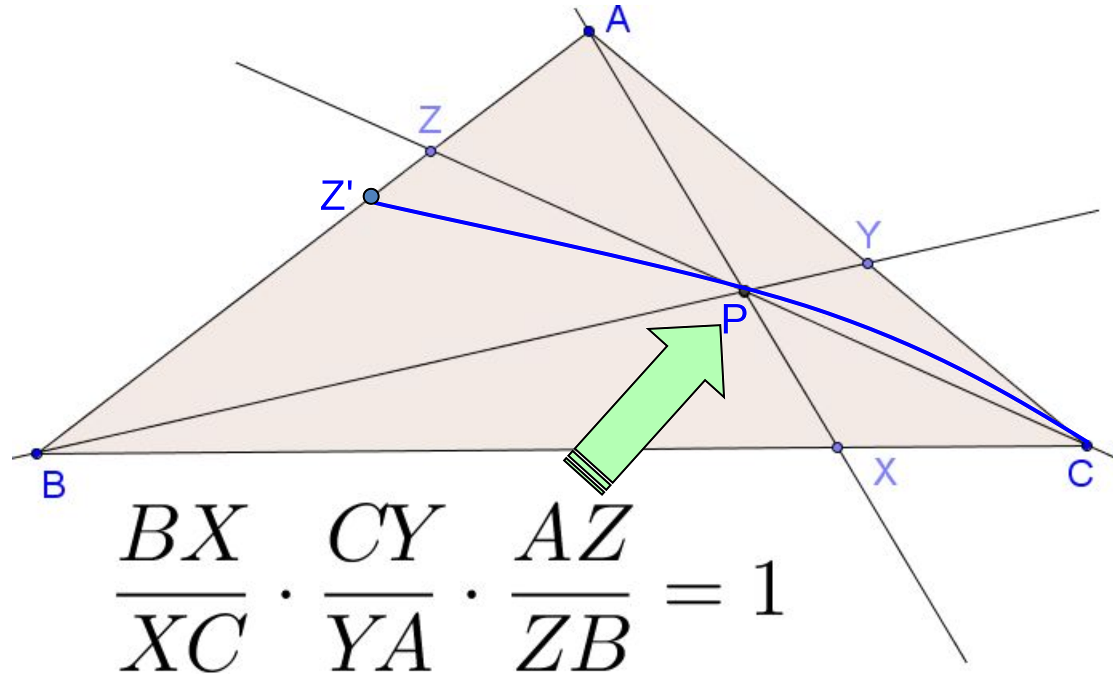
Теорема Чевы (доказательство)

Пусть *AX* и *BY* пересекаются в т.*P*.

Третья Чевиана – *CZ'*.

Тогда, по прямой теореме:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1$$

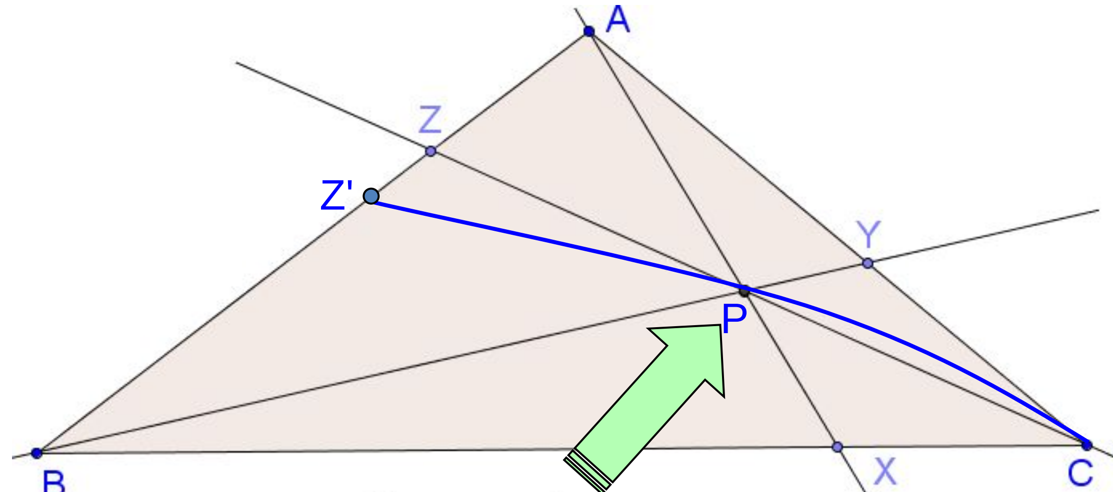


$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

Теорема Чевы (доказательство)

Пусть AX и BY пересекаются в т.P.

Третья Чевиана – CZ'.



$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

Тогда, по прямой теореме:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1$$

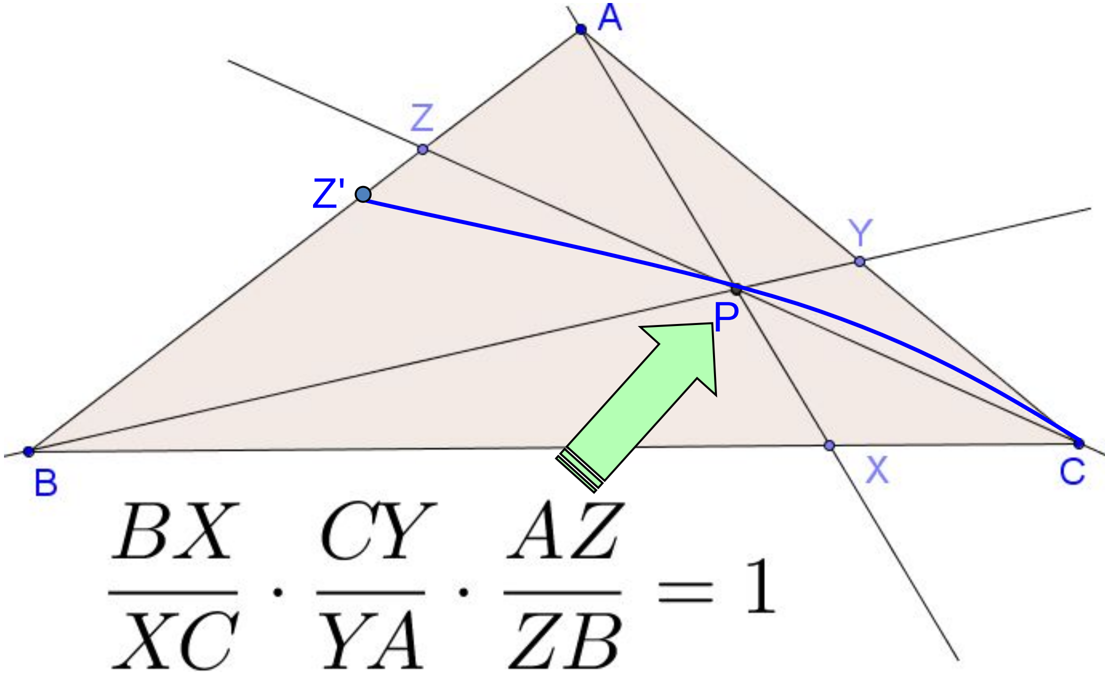
А по предположению:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

Теорема Чевы (доказательство)

Пусть *AX* и *BY* пересекаются в т.*P*.

Третья Чевиана – *CZ'*.



$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

Тогда, по прямой теореме:

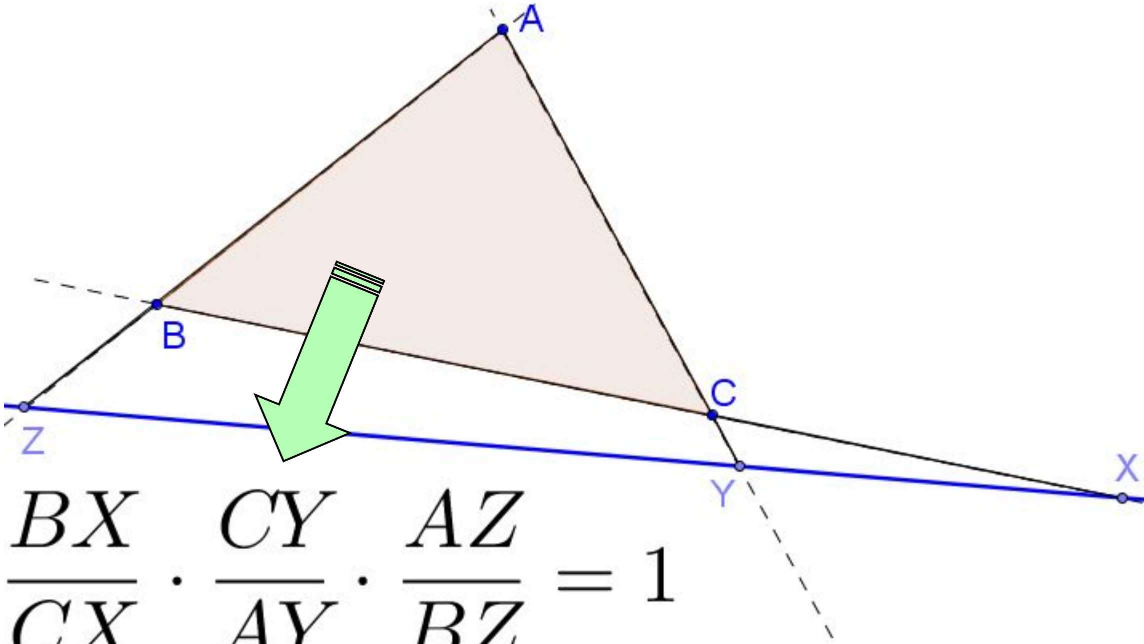
$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1$$

$$\boxed{\frac{AZ'}{Z'B}=\frac{AZ}{ZB}}$$

А по предположению:

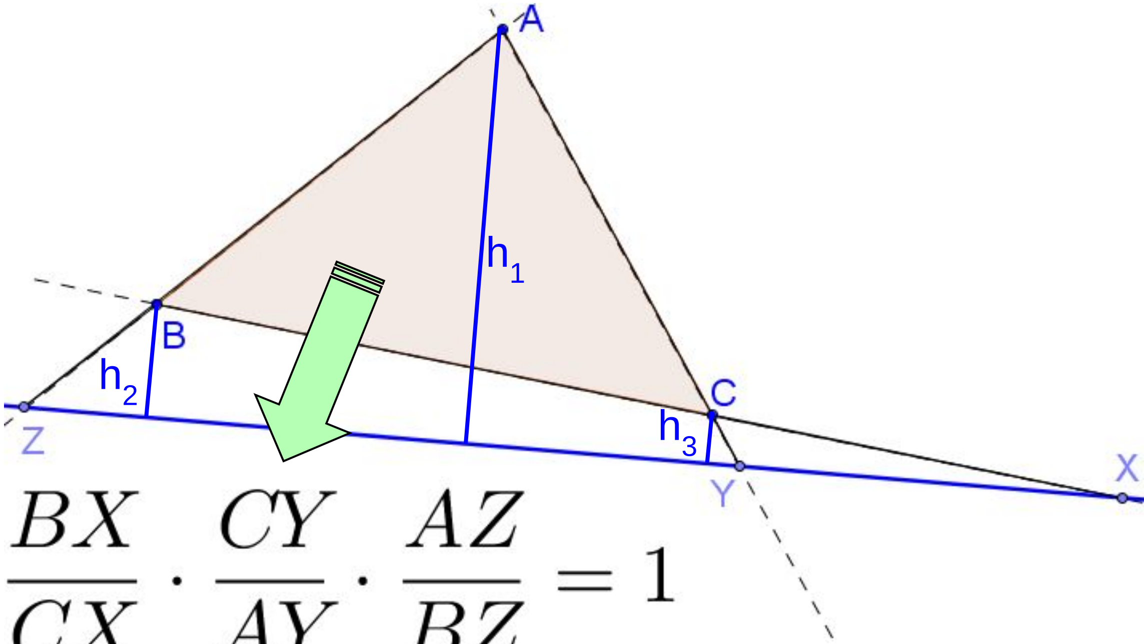
$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

Теорема Менелая (доказательство)



$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$$

Теорема Менелая (доказательство)



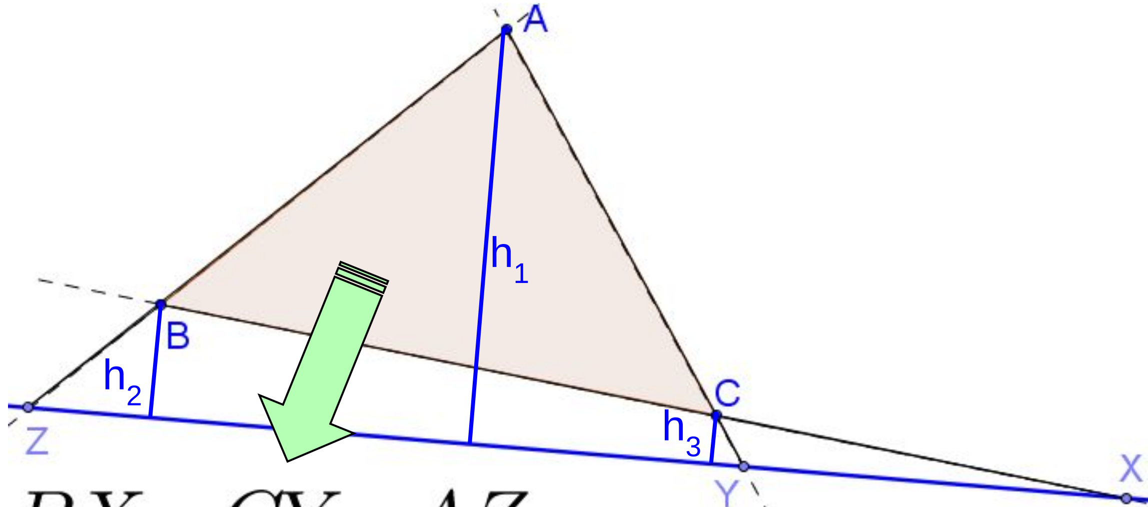
$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$$

Теорема Менелая (доказательство)

$$\frac{BX}{XC} = \frac{h_2}{h_3};$$

$$\frac{CY}{YA} = \frac{h_3}{h_1};$$

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{h_1}{h_2}.$$



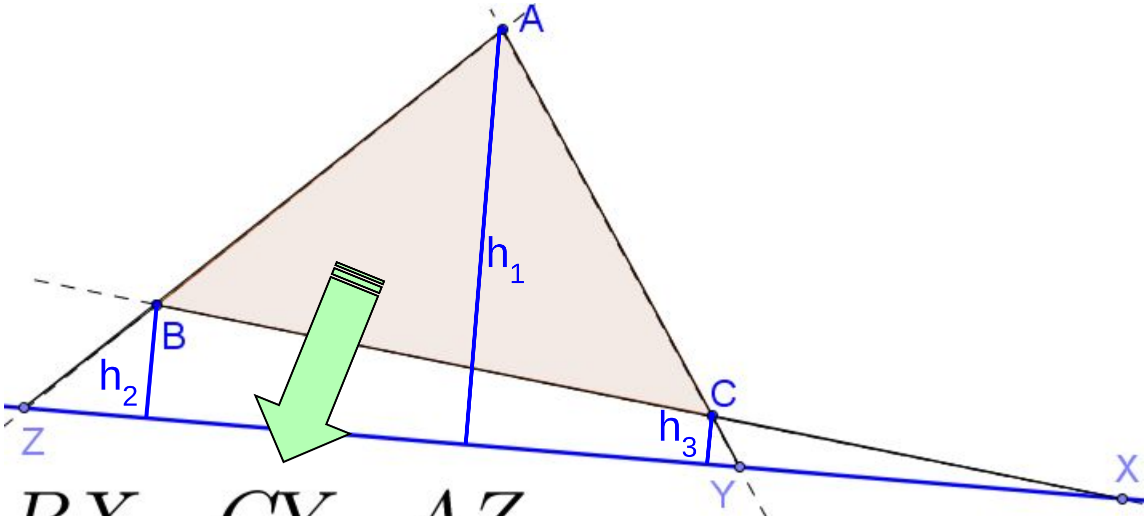
$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$$

Теорема Менелая (доказательство)

$$\frac{BX}{XC} = \frac{h_2}{h_3};$$

$$\frac{CY}{YA} = \frac{h_3}{h_1};$$

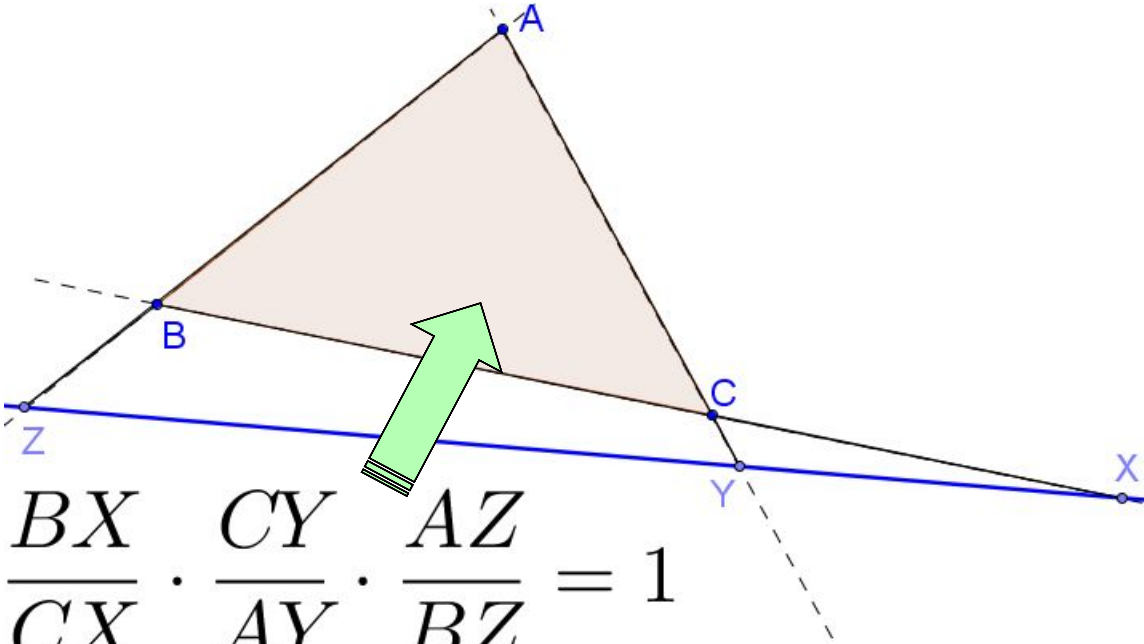
$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{h_1}{h_2}.$$



$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$$

Перемножим: $\boxed{\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB}} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_2} \boxed{= 1}$

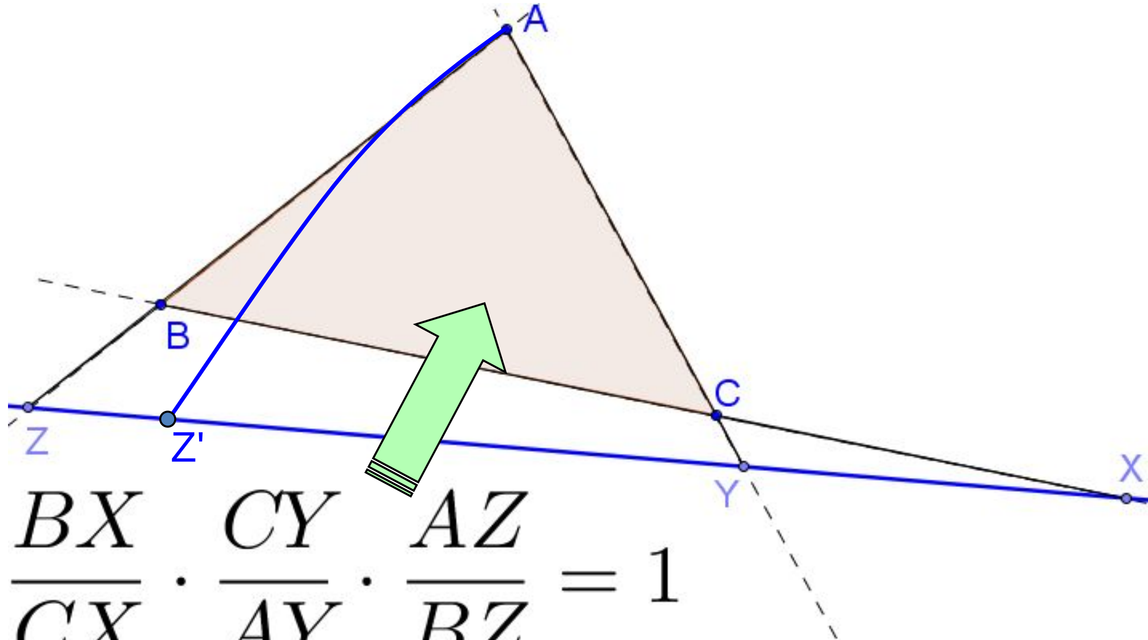
Теорема Менелая (доказательство)



$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$$

Теорема Менелая (доказательство)

Пусть *AB* и *XY* пересекаются в *Z′*.



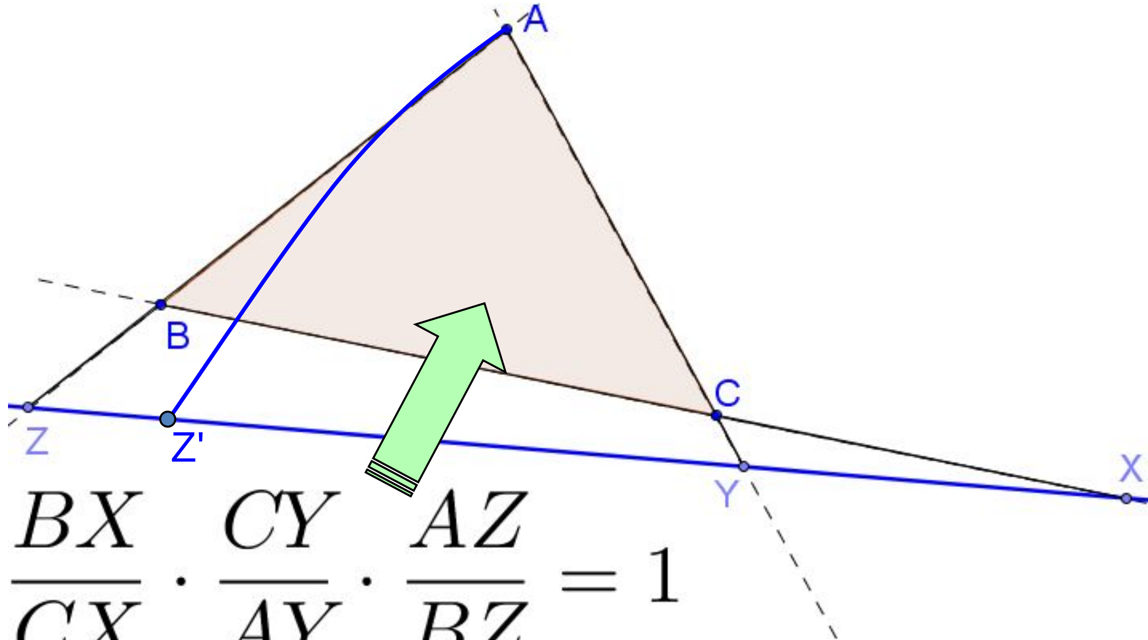
$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1$$

Теорема Менелая (доказательство)

Пусть *AB* и *XY* пересекаются в *Z′*.

Тогда по прямой теореме:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1$$



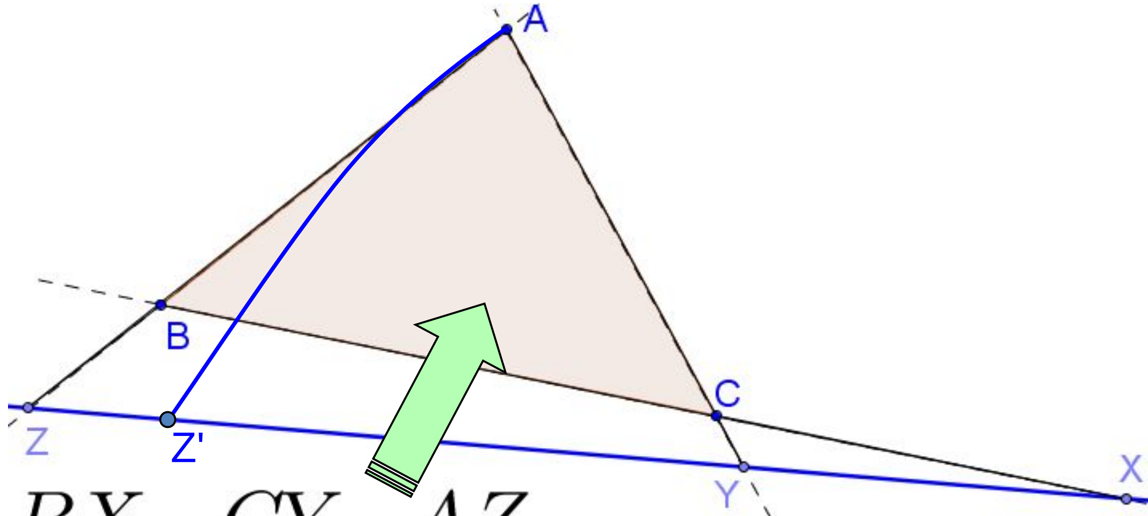
$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1$$

Теорема Менелая (доказательство)

Пусть AB и XY пересекаются в Z'.

Тогда по прямой теореме:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1$$



$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1$$

А по предположению:

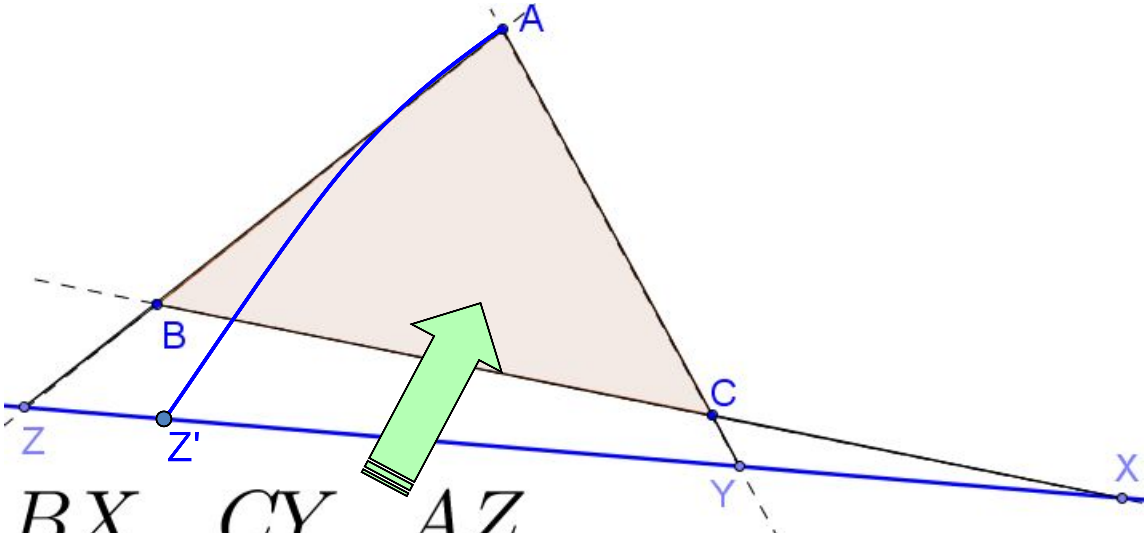
$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

Теорема Менелая (доказательство)

Пусть AB и XY пересекаются в Z'.

Тогда по прямой теореме:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1$$



$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1$$

$$\boxed{\frac{AZ'}{Z'B}=\frac{AZ}{ZB}}$$

А по предположению:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$