Обратная задача теории аппроксимации

Дипломная работа

Осипович Анастасия Леонидовна

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук
профессор А. А. Пекарский

Обратная задача теории аппроксимации

F – банахово пространство над полем $\mathbb{R}$.

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ – замкнутая линейно независимая последовательность элементов F.

$$E_n(x) = \inf\left\{\left\|x - \sum_{k=0}^{n} c_k x_k\right\| : c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\right\}$$

–n-е наилучшее полиномиальное приближение элемента $x \in F$.

$$¥_0 := ¥ \text{ U } \{0\}.$$

Обратная задача теории аппроксимации

Теорема 1.1 *(С.Н. Бернштейн). Для всякой невозрастающей бесконечно малой последовательности чисел*

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots, \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

найдётся элемент $x \in F$ *такой, что* $E_n(x) = a_n$ *при любом* $n \in \mathbb{N}_0$.

Существование функции, непрерывной на отрезке, с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями

$C \coloneqq C[-1,1]$ – банахово пространство непрерывных функций на отрезке $[-1,1]$,
$\|f\|_C = \max\{|\mathrm{f(x)}|: \mathrm{x} \in [-1,\ 1]\}$.

$\mathcal{R}_n$ – множество всех алгебраических рациональных функций r_n, над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, степени не выше n, таких что $r_n = \frac{p_n}{q_n}$, где p_n и $q_n \in \mathcal{P}_n$.

$R_n(f, C) = \inf\ \{\|f - r\|_C \mid r \in \mathcal{R}_n\}$ – наилучшее рациональное приближение функции $f \in C[-1,1]$.

Существование функции, непрерывной на отрезке, с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями

Теорема 2.1 (А.А. Пекарский). *Для любой строго убывающей к нулю последовательности* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *существует комплексная функция* $g \in C$ *такая, что* $R_n(g, C) = a_n$ *при* $n = 0, 1, 2, \ldots$

Существование функции с заданными наилучшими рациональными приближениями в пространстве C_A

C_A – пространство функций, аналитических в круге $|z|<1$ и непрерывных в его замыкании.

$R_n(f,\ C_A) = \inf\left\{\|f-r\|_{C_A} \mid r \in \mathcal{R}_n\right\}$ – наилучшее рациональное приближение функции $f \in C_A$.

$$||f||_{C_A} = max\{|f(z)|: |z| \le 1\}$$

Существование функции с заданными наилучшими рациональными приближениями в пространстве C_A

Теорема 3.1 *(М.А. Назаренко). Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*

a) Строго убывает к нулю;

b) Существует $N \in \mathbb{N}_0$ такое, что

$a_0 > a_1 > \ldots > a_N > 0$ *и* $a_n = 0$ *при всех* $n \geq N + 1$.

Тогда существует $f \in C_A$ *такая, что*

$$R_n(f,\ C_A) = a_n \text{ при } n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Результаты о сравнении наилучших равномерных полиномиальных и рациональных приближений

Теорема 4.1(*В. Воет*) *Если* $f \in C[-1,1]$ *и* $R_n(f,C) = E_n(f,C)$ *для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$, *то существуют такие* $a, b \in \mathbb{R}$ *и* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, *что* $f(x) = aT_{n_0}(x) + b$ *при* $x \in [-1,1]$, *где* $T_{n_0}(x)$ *– многочлен П. Л. Чебышева* I *рода степени* n_0.

Результаты о сравнении наилучших равномерных полиномиальных и рациональных приближений

Теорема 4.2 *(А.А. Пекарский). Для любой невозрастающей бесконечно малой* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *последовательности существует функция* $f_1 \in C[-1,1]$ *для которой*

$$R_{2^k-1}(f_1) = E_{2^k-1}(f_1) = a_{2^k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Спасибо за внимание!