Анализ деятельности сложных социально-экономических систем

Часть 1

проф. Кривоножко В.Е.

1. Простые коэффициенты эффективности

$$K = Y / X,$$

X – параметр затрат или ресурсов, входной параметр,

Y – результат деятельности, выходной параметр.

2. Набор простых коэффициентов эффективности

$$k_i = y_i / x_i, \quad i = 1, \dots , l$$

3. Построение функции оценки деятельности сложного объекта $F(k_1,\dots,k_l)$. Например, в виде линейной оценки вида

$$F(k_1,\dots,k_l) = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \dots + \alpha_l k_l$$

Предположения:

$$Z_j = (X_j, Y_j) \in E^{m+r}, \quad j = 1, \dots, n$$

$X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \geq 0$, вектор входных переменных (затрат)

$Y_j = (Y_{1j}, \dots, y_{rj}) \geq 0$, вектор выходных переменных (результат деятельности, выпуска)

Рассмотрим нелинейную задачу математического программирования:

$$\max h = \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i y_{io}\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{m} \omega_k x_{ko}\right)$$

при ограничениях

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i y_{ij}\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{m} \omega_k x_{kj}\right) \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \qquad (1)$$

$$\mu_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\omega_k \geq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, m.$$

Теорема 1. (Об инвариантности единиц измерения). Оптимальное значение функционала в задаче (1) не зависит от выбора единиц измерения для входных и выходных производственных параметров, если эти единицы измерения совпадают для всех производственных объектов.

Доказательство. Замена единиц измерения в задаче (1) означает переход к преобразованной задаче, которая имеет вид:

$$\max_{\mu,\omega} h' = \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i a_i y_{io}\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{m} \omega_k b_k x_{ko}\right)$$

при ограничениях

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i a_i y_{ij}\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{m} \omega_k b_k x_{kj}\right) \le 1, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

$$\mu_i \ge \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, r,$$

$$\omega_k \ge \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, m.$$

здесь $a_i, b_k > 0$ являются коэффициентами перехода от одних единиц измерения к другим.

Пусть h^*, μ_i^*, ω_k^*, $i = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, m$ будут оптимальным решением задачи (1). Но тогда, выбирая μ_i^* / a_i, ω_k^* / b_k, получим допустимое решение задачи (2) и при этом $h' = h^*$, следовательно, для оптимального решения (2) будет выполняться соотношение $h'^* \geq h^*$.

Рассмотрим теперь оптимальное решение h'^*, $\mu_i'^*$, $\omega_k'^*$, задачи (2). Положим $\mu_i = \mu_i'^* a_i$, $\omega_k = \omega_k'^* b_k$, тогда эти переменные являются допустимым решением для исходной задачи (1). Следовательно $h'^* \leq h^*$.

Таким образом, остается одна возможность $h'^* = h^*$.

Теорема доказана.

Введем новую переменную $t > 0$, такую, что

$$t\sum_{k=1}^{m}\omega_k x_{ko} = 1,$$

Умножим числитель и знаменатель соотношений (1) на t и сделаем замену переменных

$$u_i = t\mu_i,\ i = 1, \dots, r, \quad v_k = t\omega_k,\ k = 1, \dots, m.$$

В результате получим линейную задачу оптимизации.

$$\max h = \sum_{i=1}^{r} u_i y_{io}$$

при ограничениях

$$(\sum_{i=1}^{r} u_i y_{ij}) \le (\sum_{k=1}^{m} v_k x_{kj}), \quad j = 1, \dots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{m} v_k x_{ko} = 1,$$

$$u_i \ge \varepsilon, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$v_k \ge \varepsilon, \quad k = 1, \dots, m.$$

Теперь мы можем сформулировать следующий результат.

Утверждение 1. Решение задачи (3) эквивалентно решению задачи (1).

Соотношение двойственности в линейном программировании

Прямая задача: $\max\ c^{\mathrm{T}}x$

при ограничениях

$$\underbrace{\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}}_{n}$$

m_1 $A_1 x \le b_1$ u_1

m_2 $A_2 x = b_2$ u_2

$x \ge 0.$

Двойственная задача: $\min u_1^{\mathrm{T}} b_1 + u_2^{\mathrm{T}} b_2$

при ограничениях

$u_1^{\mathrm{T}} A_1 + u_2^{\mathrm{T}} A_2 \ge c,$

$u_1 \ge 0.$

$$n\left\{\begin{array}{cc} A_1^{\mathrm{T}} & A_2^{\mathrm{T}} \end{array}\right. \quad \underbrace{}_{m_1}\ \underbrace{}_{m_2}$$

Применяя соотношения двойственности к задаче (3) получим следующую задачу, модель CCR (Charnes, Cooper, Rhodes):

$$\min \theta - \varepsilon \left\{ \sum_{k=1}^{m} s_k^- + \sum_{i=1}^{r} s_i^+ \right\}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered}
\theta x_{ko} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj}\lambda_j - s_k^- = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \\
\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\lambda_j - s_i^+ = y_{io}, \quad i = 1, \ldots, r, \\
\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\
s_k^- \ge 0, \quad k = 1, \ldots, m, \\
s_i^+ \ge 0, \quad i = 1, \ldots, r.
\end{gathered} \tag{4}$$

Этап 1. Решается задача $\min\theta$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&\theta\, x_{ko} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj}\lambda_j - s_k^- = 0, \quad k = 1,\ldots,m,\\
&\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\lambda_j - s_i^+ = y_{io}, \quad i = 1,\ldots,r,\\
&\lambda_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n,\\
&s_k^- \ge 0, \quad k = 1,\ldots,m,\\
&s_i^+ \ge 0, \quad i = 1,\ldots,r.
\end{aligned} \tag{5}$$

Этап 2. На втором этапе фиксируется оптимальное значение функционала θ^*, полученное на первом этапе, затем решается следующая задача

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{m} s_k^- + \sum_{i=1}^{r} s_i^+\right\}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&\theta^* x_{ko} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj}\lambda_j - s_k^- = 0, \quad k = 1,\ldots,m,\\
&\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\lambda_j - s_i^+ = y_{io}, \quad i = 1,\ldots,r,\\
&\lambda_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n,\\
&s_k^- \ge 0, \quad k = 1,\ldots,m,\\
&s_i^+ \ge 0, \quad i = 1,\ldots,r.
\end{aligned} \tag{6}$$

Перепишем задачи в эквивалентном виде

Этап 1.

$$\min \theta$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j \le \theta X_o,$$
$$\sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j \ge Y_o \qquad (5')$$
$$\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

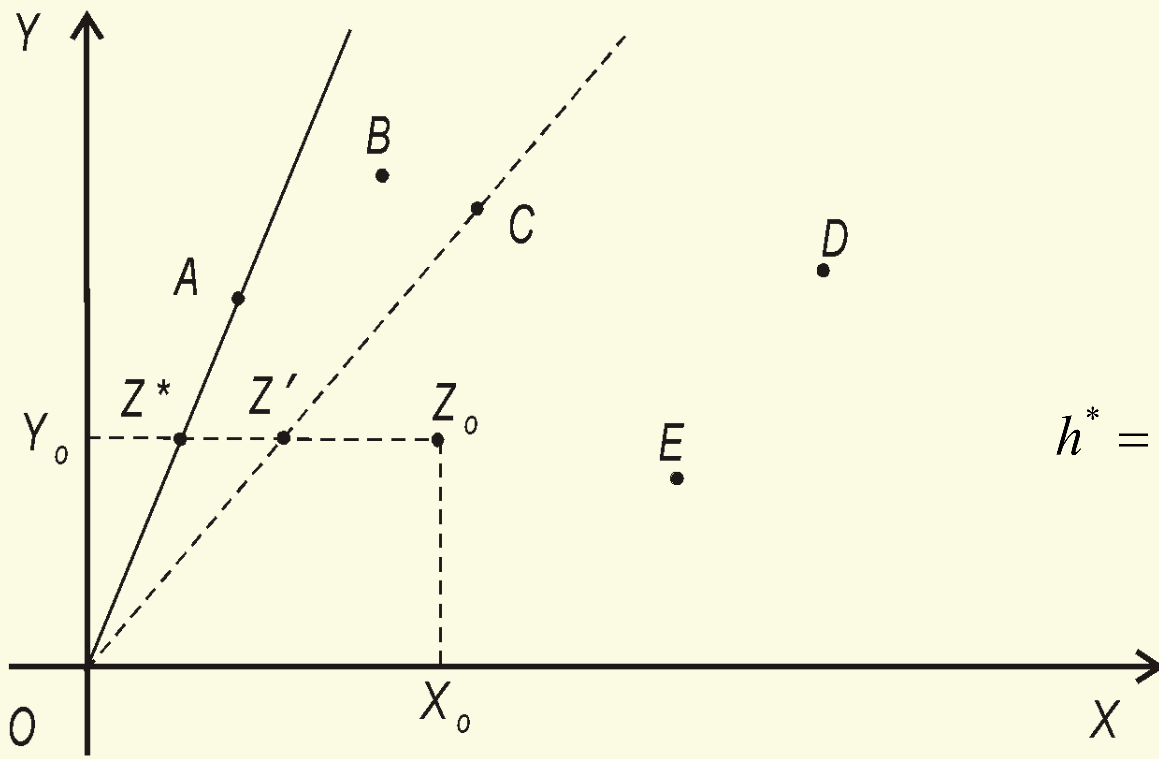
Этап 2.

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^{m} s_k^- + \sum_{i=1}^{r} s_i^+ \right\}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j = \theta^* X_o - S^-,$$
$$\sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j = Y_o + S^+, \qquad (6')$$
$$\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n,$$
$$s_k^- \ge 0, \quad k = 1, \dots, m,$$
$$s_i^+ \ge 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Из вида задачи (5) следует, что $0 < \theta^* \le 1$, так как исследуемый объект (X_o, Y_o), принадлежит множеству наблюдаемых объектов (X_j, Y_j), $j = 1, \dots, n$. Процесс решения задачи (5) повторяется для всех наблюдаемых объектов. Оптимальное решение θ^* задачи примем за меру эффективности исследуемого производственного объекта по входной модели CCR.



$$h^* = \frac{|Y_o Z^*|}{|Y_o Z_o|}.$$

Рис. 1. Изображение производственных объектов на плоскости

Определение 1. Производственный объект (X_o, Y_o) является эффективным по входной модели CCR, если в результате решения задачи (4), или последовательного решения задач (5) и (6) получено:

1. $\theta^* = 1$,

2. $S^{+*} = (s_1^*, \ldots, s_r^{+*}) = 0$ и $S^{-*} = (s_1^*, \ldots, s_m^{-*}) = 0$ для всех оптимальных решений.

Определение 2. Производственный объект (X_o, Y_o) является эффективным по входной модели CCR, если в результате решения задачи (3) получено:

1. $h^* = 1$,

2. существует, по крайней мере одно, оптимальное решение (u^*, v^*) такое, что $u_i^* > \varepsilon,\ i = 1, \ldots, r,\ v_k^* > \varepsilon,\ k = 1, \ldots, m$.

Теорема 2. Эффективность по входной модели CCR, данная в определении 1, эквивалентна эффективности по определению 2.

Доказательство. В силу условий слабой теоремы двойственности для оптимальных решений пары двойственных задач (3) и (4) Справедливы соотношения

$$(u_i^* - \varepsilon) s_i^{+*} = 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

$$(v_k^* - \varepsilon) s_k^{-*} = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Это означает, что если один из сомножителей не равен нулю, то тогда второй сомножитель обязательно равен нулю.

Покажем теперь, что из определения 1 следует определение 2. Возможны три случая.

а) Если $\theta^* < 1$, тогда объект (X_o, Y_o) не эффективен по определению 1. В силу теоремы двойственности $\theta^* = h^* < 1$ но тогда объект не эффективен также по определению 2.

б) Если $\theta^* = 1$ и некоторые s_i^{+*} или s_i^{-*} не равны нулю, то в силу соотношений двойственности обязательно найдутся $u^*_i = \varepsilon$ или $v^*_k = \varepsilon$, следовательно, объект не эффективен также по определению 2.

в) Если $\theta^* = 1$ и все $s_i^{+*} = 0$, $i =1, \ldots, r$, и $s_i^{-*} = 0$, $k = 1, \ldots, m$, то есть объект эффективен по определению 1, то в силу сильной теоремы двойственности найдется такое оптимальное решение (X^*, Y^*), что все $u_i > \varepsilon$, $i = 1, \ldots, r$, $v_k > \varepsilon$, $k = 1, \ldots, m$. Следовательно, объект эффективен по определению 2.

Точно также можно показать, что из определения 2 следует определение 1.

Теорема доказана.

Определение 3. Производственный объект (X_o, Y_o) будем называть слабо эффективным, если в результате решения задачи (3) получено:

$$\theta^* = 1$$

Третья возможность, которую можем получить в результате решения задачи (3), дает нам $0 < \theta^* < 1$. В таком случае производственный объект будет называться неэффективным.

Таким образом, решив задачу (4), мы можем повысить эффективность производственного объекта (X_o, Y_o), переведя его в состояние $(\theta^* X_o - S^{-*},\ Y_o + S^{+*})$. Это означает, что вектор затрат X_o следует пропорционально сократить до величины $\theta^* X_o$, затем вычесть из него лишние расходы $(\theta^* X_o - S^{-*})$, потом увеличить вектор выпуска Y_o до величины $(Y_o + S^{+*})$. Тем самым мы получим 100% эффективный объект.

Пусть производственные объекты (X_j, Y_j), $j = 1, \ldots, n$ имеют два входных и один выходной параметры. Перепишем задачу в виде

$$\min \theta$$

при ограничениях

$$X_1\lambda_1 + X_2\lambda_2 + \ldots + X_n\lambda_n \le \theta X_o,$$

$$y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + \ldots + y_n\lambda_n \ge y_0,$$

$$\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Разделим второе ограничение на y_o, затем разделим каждый вектор X_j на величину y_j / y_o.

Тем самым получим эквивалентную задачу, выходной параметр у всех объектов в новой задаче имеет одинаковое значение.

$$\min \theta$$

при ограничениях

$$X_1'\lambda_1' + X_2'\lambda_2' + \ldots + X_n'\lambda_n' \le \theta X_o',$$

$$\lambda_1' + \lambda_2' + \ldots + \lambda_n' \ge 1,$$

$$\lambda_j' \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Поскольку векторы затрат X_j' являются двумерными, изобразим их на плоскости.

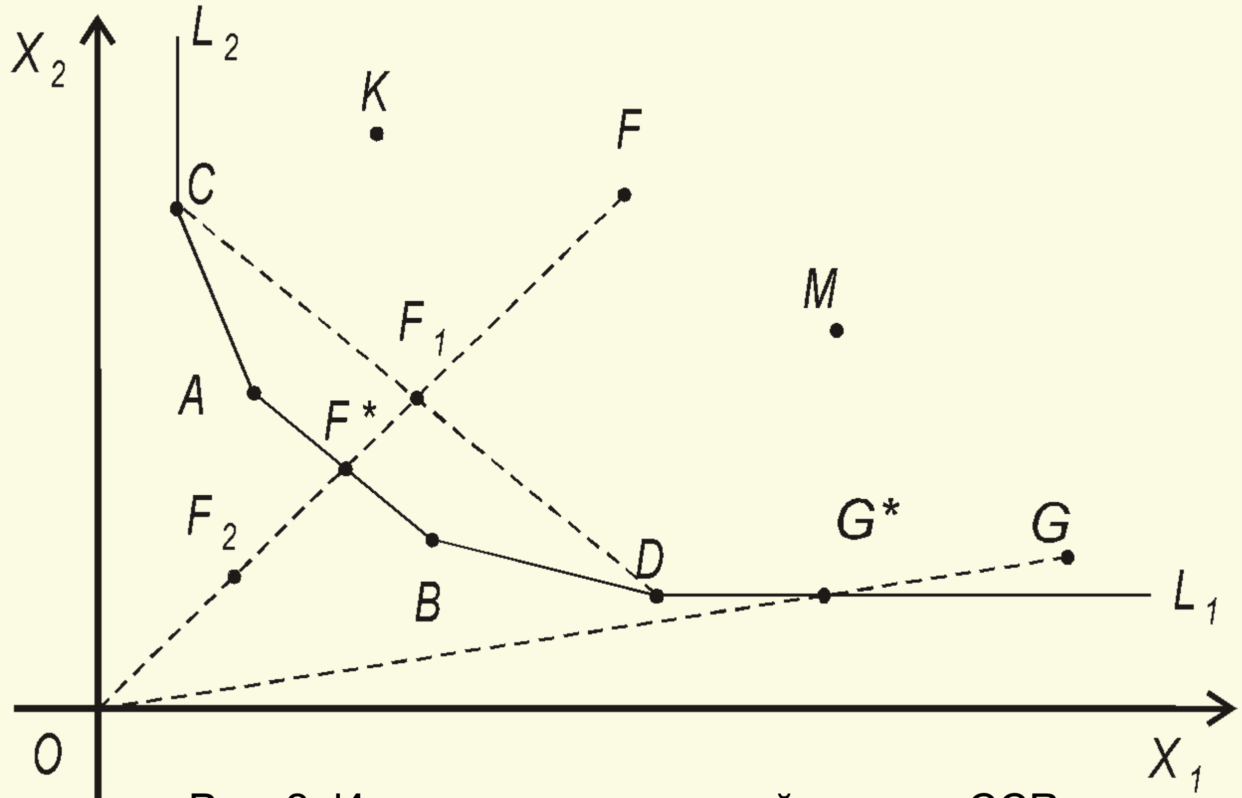


Рис. 2. Изокванта для входной модели CCR

Рассмотрим выходную модель CCR.

$$\max \eta$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j + S^- = X_o, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j - S^+ = \eta Y_o,$$

$$\lambda_j, s_j^-, s_k^+ \geq 0.$$

Как и для входной модели CCR, здесь исследуемый объект (X_o, Y_o) принадлежит множеству наблюдаемых объектов (X_j, Y_j), $j = 1, \ldots, n$. В данной модели вектор выходных параметров Y_o увеличивается пока это возможно, вектор затратных параметров X_o сохраняет свое значение.

Двойственная задача:

$$\min f = p^T X_0$$

при ограничениях

$$
\begin{aligned}
&p^T X_j - q^T Y_j \geq 0, \\
&q^T Y_j = 1, \quad j = 1,\dots,n, \\
&p_k \geq 0, \quad k = 1,\dots,m, \\
&q_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,r.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Для анализа моделей более удобно ввести привычную нам меру эффективности производственного объекта как $1/\eta^*$, которая будет находиться в пределах $0 < 1/\eta^* \leq 1$, эту меру иногда будем выражать в процентах.

Определение 4. Производственный объект (X_o, Y_o) будем называть эффективным по выходной модели CCR, если в результате решения задачи (1) получено:

1. $\eta^* = 1$,

2. $S^{+*} = (s_1^{\;*}, \dots, s_r^{\;+*}) = 0$ и $S^{-*} = (s_1^{\;*}, \dots, s_m^{\;-*}) = 0$ для всех оптимальных решений задачи (1).

Для двойственной задачи (2) определение эффективного объекта будет следующее.

Определение 5. Производственный объект (X_o, Y_o) является эффективным по выходной модели CCR, если в результате решения задачи (2) получено:

1. $f^* = 1$,

2. существует, по крайней мере одно, оптимальное решение (p^*, q^*) такое, что $p_k^{\;*} > 0$, $k = 1, \dots, m$, $q_i^{\;*} > 0$, $i = 1, \dots, r$.

Эквивалентность этих двух определений устанавливается в следующем утверждении.

Теорема 3. Эффективность по выходной модели CCR, данная в определении 4, эквивалентна эффективности по определению 5.

Теорема 3 доказывается точно так же как и теорема 2.

В результате решения задачи (1) может оказаться, что некоторые дополнительные переменные не равны нулю. Тогда определим эффективность следующим образом.

Определение 6. Производственный объект (X_o,Y_o) будем называть слабо эффективным, если в результате решения задачи (1) получено:

$$\eta^* = 1.$$

Оптимальное решение входной и выходной модели CCR связаны достаточно простыми соотношениями. Покажем это.

Теорема 4. Пусть оптимальное решение задачи (1) будет (η', λ'). Тогда соотношения

$$\eta' = 1/\theta^*, \quad \mu' = \left(1/\theta^*\right)\lambda^*$$

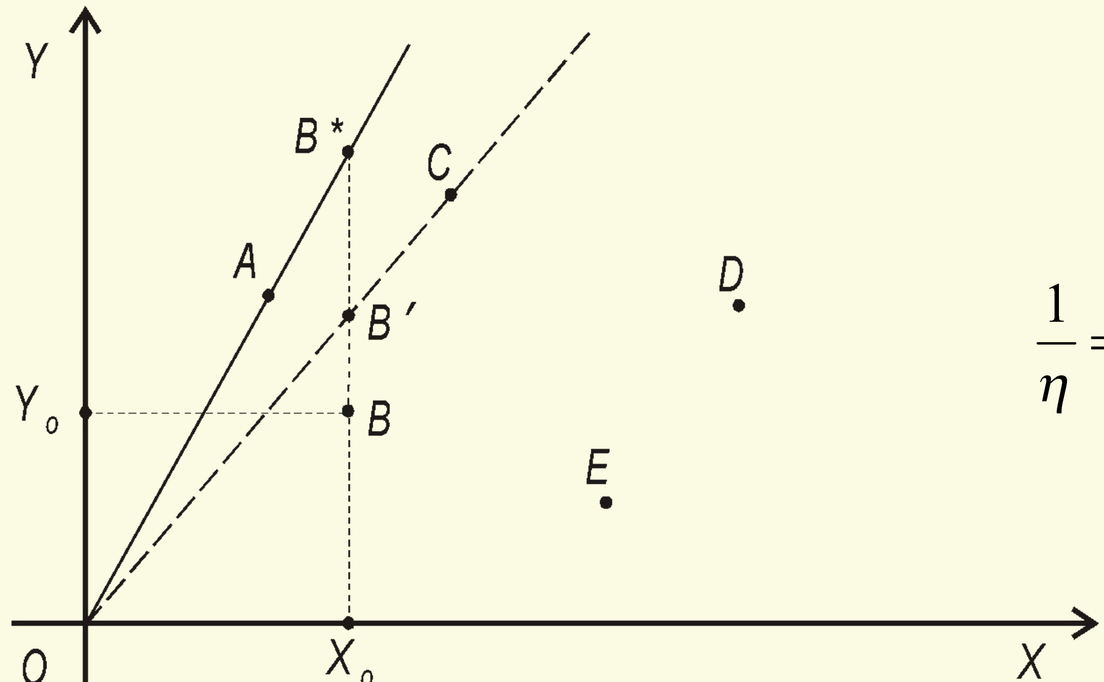
определяют взаимно однозначное соответствие оптимальных решений задач (4) и (1).

Перепишем задачу (1) в виде

$$\max \eta$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j \le X_o$$
$$\sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j \ge \eta Y_o \qquad (3)$$
$$\mu_j \ge 0$$



$$\frac{1}{\eta} = \frac{|X_o B|}{|X_o B^*|}$$

Рис. 3. Анализ эффективности объекта по выходной модели

Множество производственных возможностей

В нашем исследовании анализировались не только наблюдаемые производственные объекты (X_j, Y_j), но другие возможные (умозрительные) производственные объекты, существование которых не противоречит экономическим законам.

На основе наблюдаемых векторов (X_j, Y_j), $j = 1, \dots, n$, множество производственных возможностей T эмпирически задается следующими постулатами.

Постулат 1. (Выпуклость) Если $(X_1, Y_1) \in T$ и $(X_2, Y_2) \in T$, тогда и $\{\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2, \lambda Y_1 + (1-\lambda) Y_2\} \in T$ для всех $\lambda \in [0,1]$.

Постулат 2. (Монотонность) Если $(X, Y) \in T$ и $X' \geq X$, $Y' \leq Y$ тогда $(X', Y') \in T$.

Постулат 3. (Условие конуса) Если $(X, Y) \in T$ тогда $k(X, Y) \in T$ для любого положительного числа $k > 0$.

Постулат 4. (Минимальная экстраполяция) Множество T является пересечением всех множеств T' удовлетворяющих Постулатам 1, 2 и 3 при условии, что $(X_j, Y_j) \in T'$ для всех $j = 1, \dots, n$.

Формально множество T можно записать в следующем виде

$$T = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, X \ge k\sum_{j=1}^{n} X_j \mu_j,\; Y \le k\sum_{j=1}^{n} Y_j \mu_j,\; \forall \mu_j \ge 0,\; \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1,\; k > 0 \right\} \qquad (1)$$

Остановимся на некоторых свойствах множества T.

1. Если точка (X',Y') принадлежит T, то $X' \neq 0$. Действительно, $x_j \neq 0$ для любого j, по крайней мере одно и $k > 0$, как следует из (1). Поэтому начало координат не принадлежит множеству T.

2. Если все наблюдаемые объекты (X_j,Y_j), $j = 1, \dots, n$, такие что $x_j > 0$ для любого j, тогда вектор X', содержащий хотя бы одну нулевую компоненту не может принадлежать множеству T.

3. Любая точка (X',Y'), у которой $X' > 0$ и $Y' = 0$ принадлежит T.

Рассмотрим теперь условия, при которых объект (X',Y'), не принадлежащий множеству наблюдаемых объектов, будет входить в множество T.

Найти

$$\min\theta$$

при ограничениях

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} X_j\lambda_j \le \theta X' \\ \sum_{j=1}^{n} Y_j\lambda_j \ge Y' \\ \lambda_j \ge 0\end{gathered} \qquad (2)$$

Задача отличается от входной модели CCR тем, что в ней объект (X',Y') уже не принадлежит множеству наблюдаемых объектов.

Теорема 1. Если производственный объект $(X',Y') \in T$, тогда задача (2) допустима, и оптимальное значение функционала находится в пределах $0 \le \theta^* \le 1$.

Доказательство. Действительно, пусть $(X',Y') \in T$. Тогда существуют и $k > 0$, $j = 1, \ldots, n$ такие что

$$X' \ge k \sum_{j=1}^{n} X_j \mu_j, \quad Y' \le k \sum_{j=1}^{n} Y_j \mu_j.$$

Положим $\lambda' = k\,\mu_j$, $j = 1, \ldots, n$ и $\theta = 1$, тогда получим допустимое решение задачи (2). Поскольку это решение допустимое, то для оптимального решения получим .

Вспоминая свойства множества T получим, что $X' > 0$. Поэтому соотношение $\theta^* < 0$ невозможно, так как положительная линейная комбинация не может дать отрицательные значения. Следовательно, получим $0 \le \theta^* \le 1$.

Теорема 2. Если оптимальное решение задачи (2) такое, что $0 < \theta^* \leq 1$, тогда вектор $(X', Y') \geq 0$ принадлежит T.

Доказательство. Пусть будет оптимальным решением задачи (2). Так как по условию теоремы $\theta^* > 0$, то получаем

$$\sum_j \lambda_j^* > 0 \qquad (3)$$

В силу допустимости оптимального решения имеем

$$\sum_{j=1}^n X_j \lambda_j^* \leq \theta^* X', \quad \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j^* \geq Y'. \qquad (4)$$

Введем обозначения

$$\mu = \lambda_j^* \Big/ (\sum_{j=1}^n \lambda_j^*), \quad k^* = \sum_{j=1}^n \lambda_j^*. \qquad (5)$$

В силу соотношений (3) и (4), получаем

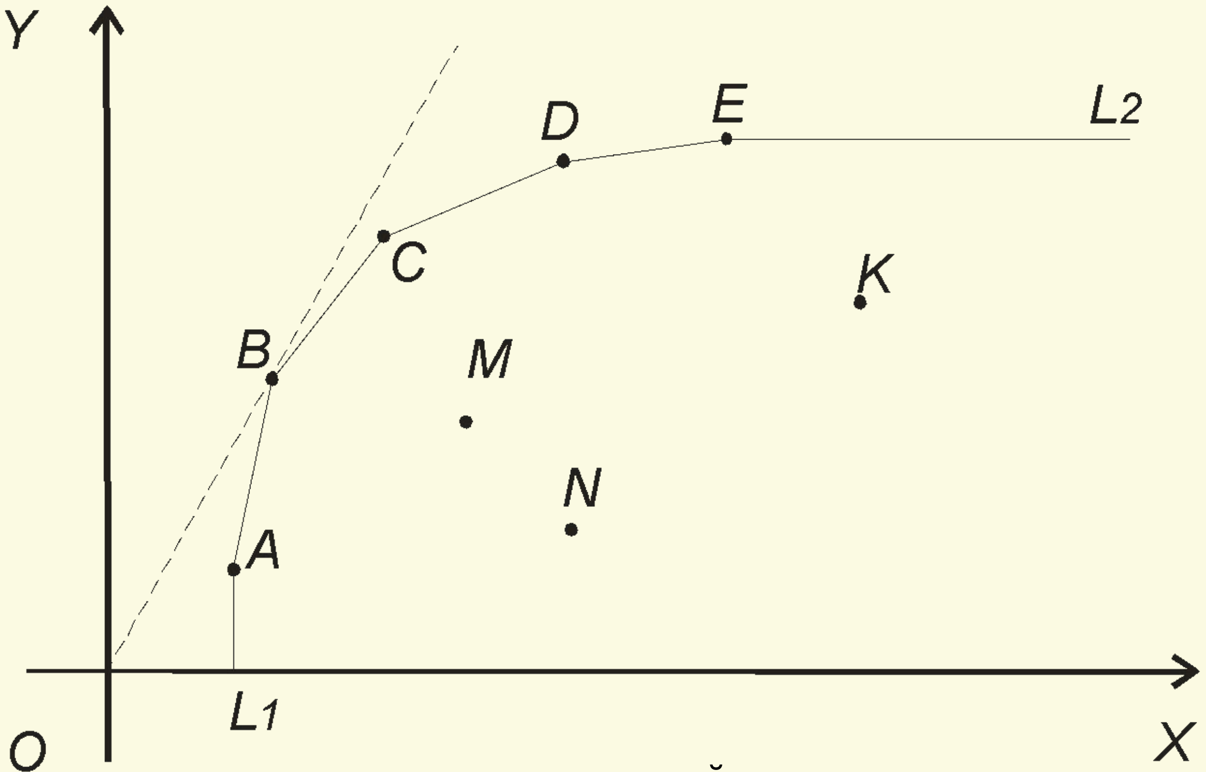
$$\mu_j^* > 0, \quad j = 1, \ldots, n \quad и \quad k^* > 0.$$

Подставляя (5) в формулу (4) и с учетом (1) видно, что вектор $(\theta^* X', Y') \geq 0$ принадлежит множеству T. Следовательно $(X', Y') \in T$ в силу постулата монотонности, так как $X' \geq \theta^* X'$.

6. Модели BCC (Banker, Charnes, Cooper)

В данном разделе остановимся на моделях, которые более адекватно отражают нелинейные зависимости в реальной экономике.

Но сначала рассмотрим пример.



Множество производственных возможностей в двухмерном пространстве для моделей CCR и BCC

Прямая оптимизационная задача в ВСС модели, ориентированной по входу, запишется следующим образом

$$\min \theta$$

при ограничениях

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j + S^- = \theta X_o, \\ \sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j - S^+ = Y_o, \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\ \lambda_j \ge 0, \quad S^- \ge 0, \quad S^+ \ge 0.\end{gathered} \tag{6.1}$$

Здесь, также как и ранее, множество наблюдаемых векторов состоит из пар (X_j, Y_j), $j = 1, \ldots, n$. При этом соблюдаются условия $X_j = (x_{1j}, \ldots, x_{mj}) \ge 0$, $Y_j = (Y_{1j}, \ldots, y_{rj}) \ge 0$, и каждый вектор X_j и вектор Y_j имеют, по крайней мере, одну положительную компоненту. Производственный объект (X_o, Y_o), который в данный момент исследуется, принадлежит множеству наблюдаемых объектов.

Задачу (6.1) также будем решать в два этапа для того чтобы избежать вычислений с бесконечно малой величиной ε.

Этап 1

Решаем задачу (6.1).

Этап 2

Фиксируем оптимальное значение θ^*, полученное на первом этапе. Решаем задачу с функционалом

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{m} s_k^{+} + \sum_{i=1}^{r} s_i^{-}\right\}$$

при ограничениях задачи (6.1).

Определение 6.1. Производственный объект (X_o, Y_o) является эффективным, если в результате решения задачи (6.1) получено:

1. Оптимальное значение функционала $\theta^* = 1$.

2. Вектор дополнительных переменных $S^{-*} = 0$ и $S^{+*} = 0$ для всех оптимальных решений задачи (6.1).

Определение 6.2. Производственный объект (X_o, Y_o) считается слабо эффективным, если в результате решения задачи (6.1) оптимальное значение функционала $\theta^* = 1$.

В случае если в результате решения задачи (6.1) получено $\theta^* < 1$, то объекты считаются неэффективными. В любом случае величину θ^*, иногда выраженную в процентах, будем считать мерой эффективности по входной модели ВСС для объекта (X_o, Y_o).

Задача двойственная к задаче (6.1), запишется в виде:

$$\max h = u^T Y_0 - u_0$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} u^T Y_j - v^T X_j - u_0 \le 0, &\quad j = 1,\ldots,n, \\ v^T X_0 = 1, & \\ v_k \ge 0, &\quad k = 1,\ldots,m, \\ u_i \ge 0, &\quad i = 1,\ldots,r. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Задача (6.2) отличается от соответствующей двойственной задачи для CCR модели тем, что здесь присутствует переменная u_o, которая не имеет ограничений на знак. Эта переменная играет большую роль при интерпретации результатов решения, на этом остановимся чуть позже. А пока дадим определение эффективного объекта по модели (6.2).

Определение 6.3. Производственный объект (X_o, Y_o) считается эффективным, если в результате решения задачи (6.2) получено:

1. Оптимальное значение функционала $h^* = 1$.

2. Существует оптимальное решение (u^*, v^*) задачи (6.2), такое что $v_k^* > 0$, $k = 1, \ldots, m$, $u_i^* > 0$, $i = 1, \ldots, r$.

Эквивалентность определения 6.1 и 6.3 устанавливается в следующей теореме.

Теорема 6.1. Эффективность по входной модели BCC, данная в определении 6.1 эквивалентна эффективности по определению 6.3.

Теорема доказывается с использованием соотношений двойственности для пары задач линейного программирования (6.1) и (6.2) аналогично утверждению для CCR модели (Теорема 2). Поэтому здесь приводить доказательство не будем.

Множество производственных возможностей для модели ВСС на основе наблюдаемых векторов (X_j, Y_j), $j = 1, \ldots, n$, задается следующими постулатами.

Постулат 1. (Выпуклость) Если $(X_1,Y_1) \in T$ и $(X_2,Y_2) \in T$, тогда и $\{\lambda X_1+(1-\lambda)X_2, \lambda Y_1+(1-\lambda)Y_2\} \in T$ для всех $\lambda \in [0,1]$.

Постулат 2. (Монотонность) Если $(X,Y) \in T$ и $X' \geq X$, $Y' \leq Y$ тогда $(X',Y') \in T$.

Постулат 3. (Минимальная экстраполяция) Множество T является пересечением всех множеств T' удовлетворяющих Постулатам 1 и 2 при условии, что $(X_j,Y_j) \in T'$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

В соответствии с постулатами множество производственных возможностей T записывается формально в следующем виде

$$T = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, X \geq \sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j,\ Y \leq \sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n \right\} \qquad (6.3)$$

Рассмотрим задачу

$$\min \theta$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j \le \theta X', \\ &\sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j \ge Y', \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\ &\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6.4}$$

По виду задача (6.4) также является моделью ВСС, ориентированной по входу, но здесь в правой части стоит производственный объект (X', Y'), не принадлежащий множеству наблюдаемых объектов.

Теорема 6.2. Производственный объект (X', Y') $\in T$ тогда и только тогда, когда задача (6.4) допустима и оптимальное значение функционала для неё удовлетворяет условиям $0 < \theta^* \le 1$.

Покажем, что оптимальные значения переменных (u^*, v^*, $u_o{}^*$) в задаче (6.2) определяют опорную гиперплоскость к множеству T (6.3) в точке (X_o,Y_o).

Напомним, что опорной гиперплоскостью H_o в евклидовом пространстве E^{m+r} к выпуклому множеству T в граничной точке $Z_o \in T$ называется такая гиперплоскость, для которой выполняются соотношения

$$H_o\colon\ (C, Z_o) = b,$$
$$(C, Z) \le b,$$

для любого $Z \in T$.

Поскольку в данной работе рассматривается вектор Z, состоящий из пары векторов (X_o,Y_o) $\in E^{m+r}$ то уравнение гиперплоскости H_o можно записать в виде

$$u^{\mathrm{T}} Y_o - v^{\mathrm{T}} X_o - u_o = 0. \qquad (6.5)$$

Как видно из уравнения (6.5), вектор (u, v, u_o) , задающий гиперплоскость, определяется с точностью до некоторого множителя. Поэтому наложим дополнительное условие на этот вектор

$$v^{\mathrm{T}} X_o = 1, \tag{6.6}$$

которое назовем нормализующим условием.

Из соотношений (6.5) и (6.6) получим

$$u^{\mathrm{T}} Y_o - u_o = 1. \tag{6.7}$$

Далее, так как вектор (u, v, u_o) является опорным к множеству производственных возможностей T, то для наблюдаемых производственных векторов (X_j, Y_j) выполняются неравенства

$$u^{\mathrm{T}} Y_j - v^{\mathrm{T}} X_j - u_o \le 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{6.8}$$

Сравнивая условия двойственной задачи (6.2) с соотношениями (6.5)-(6.8) получим, что <u>вектор</u> (u, v, u_o) <u>является оптимальным двойственным решением задачи</u> (6.2).

Обратно. Пусть вектор (u^*, v^*, $u_o{}^*$) является оптимальным двойственным решением задачи (6.2), и объект (X_o, Y_o), оказался эффективным по ВСС модели. Тогда для вектора (u^*, v^*, $u_o{}^*$) выполняется соотношения (6.6) и (6.7).

Далее, согласно (6.3) любой вектор (X', Y') $\in$ T можно представить в виде

$$X' = \sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j + S^-, \quad Y' = \sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j - S^+, \tag{6.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j > 0, \quad S^- = (s_1^-, ..., s_m^-) \geq 0, \quad S^+ = (s_1^+, ..., s_r^+) \geq 0.$$

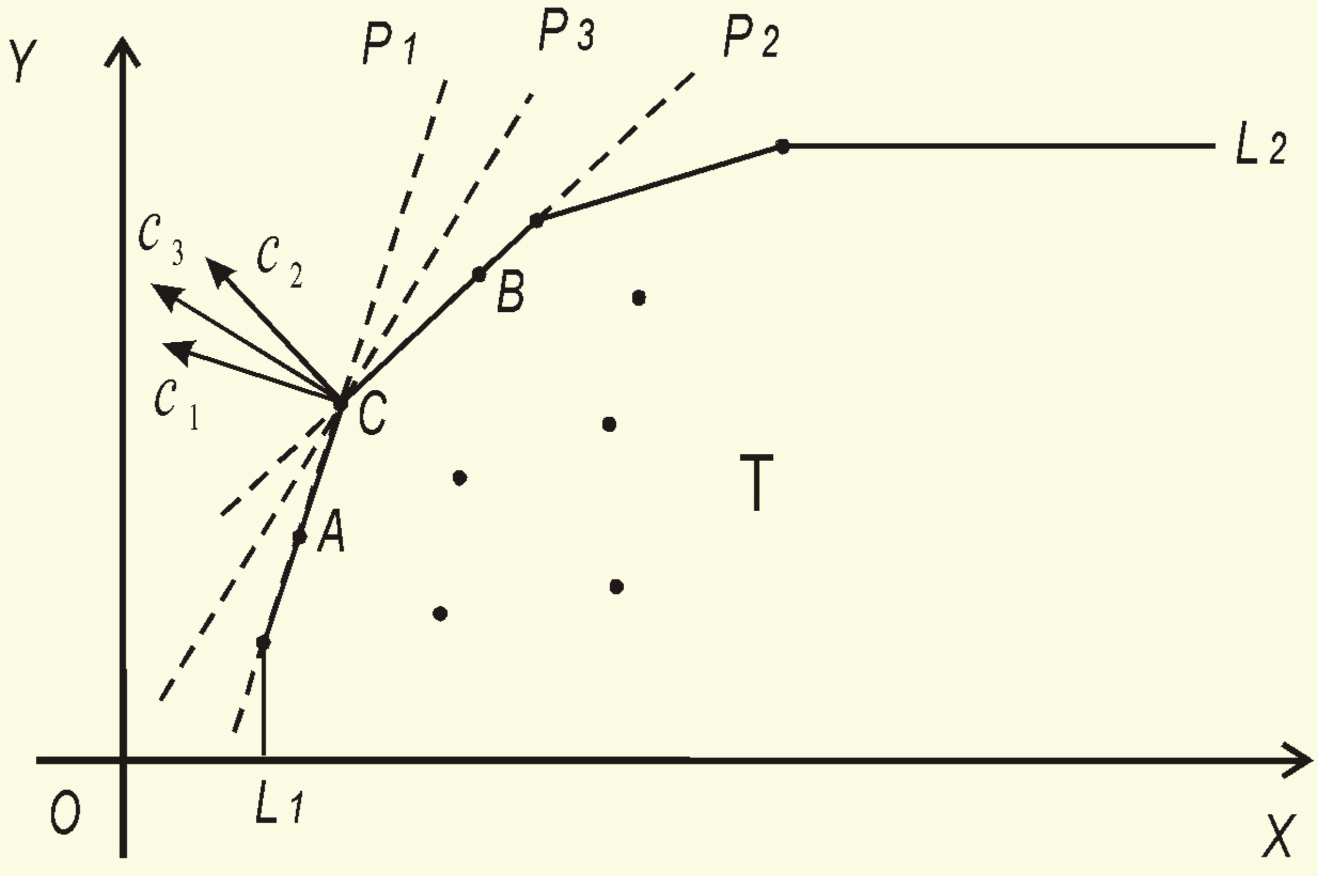
Для оптимальных двойственных переменных ($u^*, v^*, u_o{}^*$) и наблюдаемых векторов (X_j, Y_j), j = 1, … , n выполняются неравенства (6.8). Поэтому

$$\boldsymbol{u}^{*T} \boldsymbol{Y}' - \boldsymbol{v}^{*T} X' - \boldsymbol{u}_o^* =$$

$$= \boldsymbol{u}^{*T} (\sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j - S^+) - \boldsymbol{v}^{*T} (\sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j + S^-) - \boldsymbol{u}_o^* \leq 0. \tag{6.10}$$

Следовательно, для любого вектора (X', Y') $\in$ T и оптимальных переменных (u^*, v^*, $u_o{}^*$) выполняются соотношения (6.6), (6.7) и (6.10). Таким образом, вектор (u^*, v^*, $u_o{}^*$) определяет опорную гиперплоскость к множеству T в точке (X_o, Y_o).

Теорема 6.3. Пусть вектор (X_o,Y_o) будет эффективным по ВСС модели (6.1). Вектор (u, v, u_o), удовлетворяющий условию (6.6), будет определять опорную гиперплоскость к множеству T в точке (X_o,Y_o) тогда и только тогда, когда он является оптимальным решением двойственной задачи (6.2).



Опорные гиперплоскости к множеству производственных возможностей T

7. Выходная модель BCC

Выходная модель BCC может быть представлена в следующем виде

$$\max \eta$$

при ограничениях

$$
\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j + S^- = X_o \\
\sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j - S^+ = \eta Y_o \\
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
\lambda_j \ge 0, \quad S^+ = (s_1^+, \ldots, s_r^+) \ge 0, \quad S^- = (s_1^-, \ldots, s_m^-) \ge 0.
\end{gathered}
\qquad (7.1)
$$

Смысл данной модели состоит в том, чтобы стремиться пропорционально увеличивать вектор выпуска при постоянном векторе затрат до тех пор пока, пока еще производственный объект $(X_o, \eta Y_o)$ принадлежит множеству производственных возможностей T. Исследуемый объект (X_o, Y_o) принадлежит множеству наблюдаемых объектов.

Определение 7.1. Производственный объект (X_o, Y_o) называется эффективным по выходной модели ВСС, если в результате решения задачи (7.1) получено:

1. $\eta^* = 1$.

2. $S^{+*} = (s_1^{+*}, \ldots, s_r^{+*}) = 0$ и $S^{-*} = (s_1^{-*}, \ldots, s_m^{-*}) = 0$ для всех оптимальных решений задачи (7.1).

Определение 7.2. Производственный объект (X_o, Y_o) называется слабо эффективным по выходной модели ВСС, если в результате решения задачи (7.1) получено $\eta^* = 1$.

Как видно из ограничений задачи (7.1) оптимальное значение переменной $\eta^* \geq 1$. Поэтому, если в результате решения задачи (7.1) получено $\eta^* > 1$, то объект (X_o, Y_o) считается неэффективным. Величина $(1/\eta^*)$ принимается за меру эффективности для объекта (X_o, Y_o), иногда эта величина выражается в процентах. Неэффективный объект (X_o, Y_o) можно сделать эффективным, если перевести его в состояние $(X_o - S^{-*}, \eta^* Y_o + S^{+*})$.

Двойственная задача к (7.1) запишется в виде

$$
\begin{gathered}
\min f = v^T X_0 - u_0, \\
v^T X_j - u^T Y_j - u_0 \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\
u^T Y_0 = 1, \\
v_k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, m, \\
u_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, r.
\end{gathered} \tag{7.2}
$$

Для задачи (7.2) также сформируем определение эффективности объекта.

Определение 7.3. Производственный объект (X_o, Y_o) называется эффективным по выходной модели ВСС, если в результате решения задачи (7.2) получено:

1. $f^* = 1$.

2. Существует оптимальное решение (u^*, v^*) задачи (7.2), такое, что $v^* > 0$, $u^* > 0$.

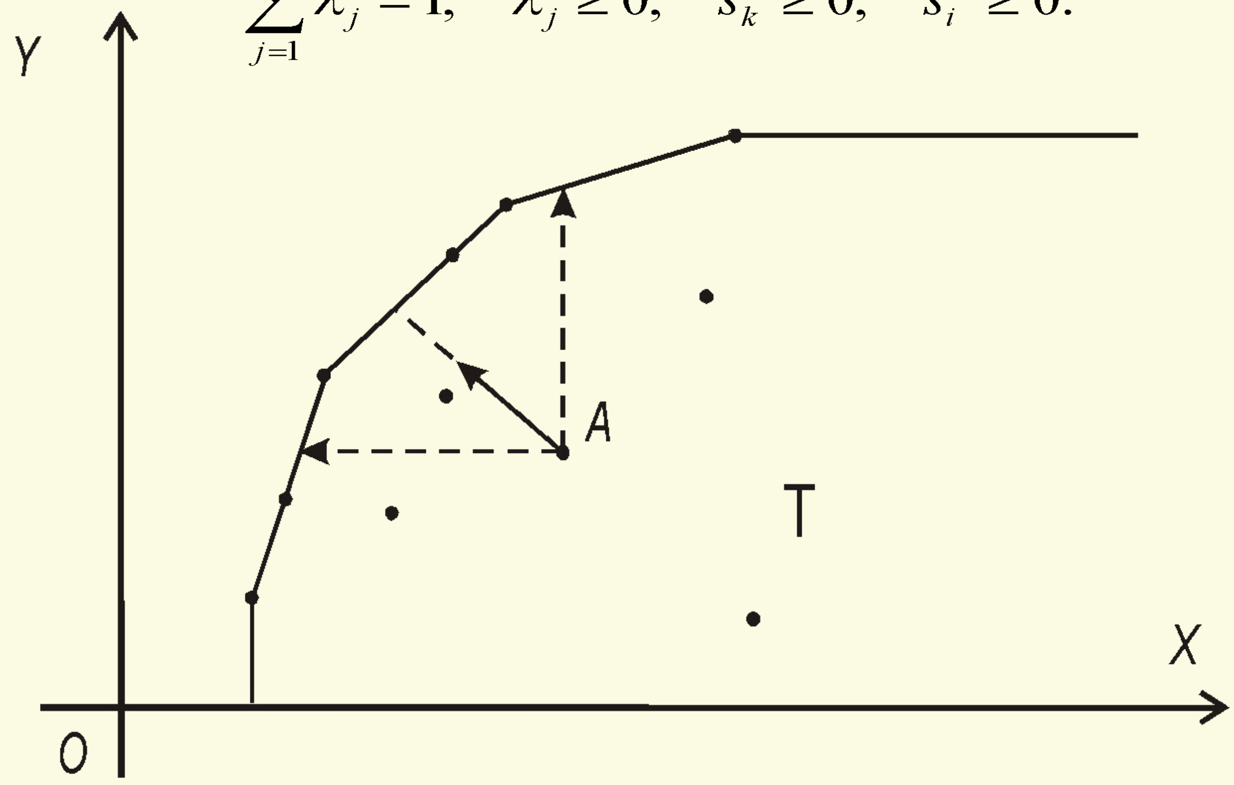
8. Аддитивная модель

$$\max z = \sum_{k=1}^{m} s_k^- + \sum_{i=1}^{r} s_i^+$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j = X_o - S^-,$$

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j = Y_o + S^+, \tag{8.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad s_k^- \geq 0, \quad s_i^+ \geq 0.$$



Двойственная задача

$$
\begin{aligned}
&\min w = v^T X_o - u^T Y_o + u_o \\
&v^T X_j - u^T Y_j + u_o \ge 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
&u_i \ge 1, \quad i = 1, \dots, r, \\
&v_k \ge 1, \quad k = 1, \dots, m.
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

Определение 1. ПО является эффективным по аддитивной модели тогда и только тогда, когда $S^{-*} = 0$ и $S^{+*} = 0$.

Определение 2. (Парето-Купманса эффективность). ПО является полностью эффективным тогда и только тогда, когда нельзя улучшить ни один показатель, не ухудшив при этом другие показатели.

Определение 3. ПО (X^*, Y^*) эффективен, если $(X^*, Y^*) \in T$ и не существует вектора $(X, Y) \in T$, отличного от (X^*, Y^*), и такого, что $X \leq X^*, Y \geq Y^*$.

Определение 4. ПО $(X^*, Y^*) \in T$ является слабо эффективным по Парето, если не существует вектора $(X, Y) \in T$, такого что $X < X^*, Y > Y^*$.

Теорема 8.1. ПО эффективен по аддитивной модели (8.1) тогда и только тогда, когда он эффективен по Парето.

Теорема 8.2. ПО (X_o, Y_o) эффективен по ВСС модели тогда и только тогда, когда он эффективен по аддитивной модели.