Лекция 9

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§§ Система отсчета

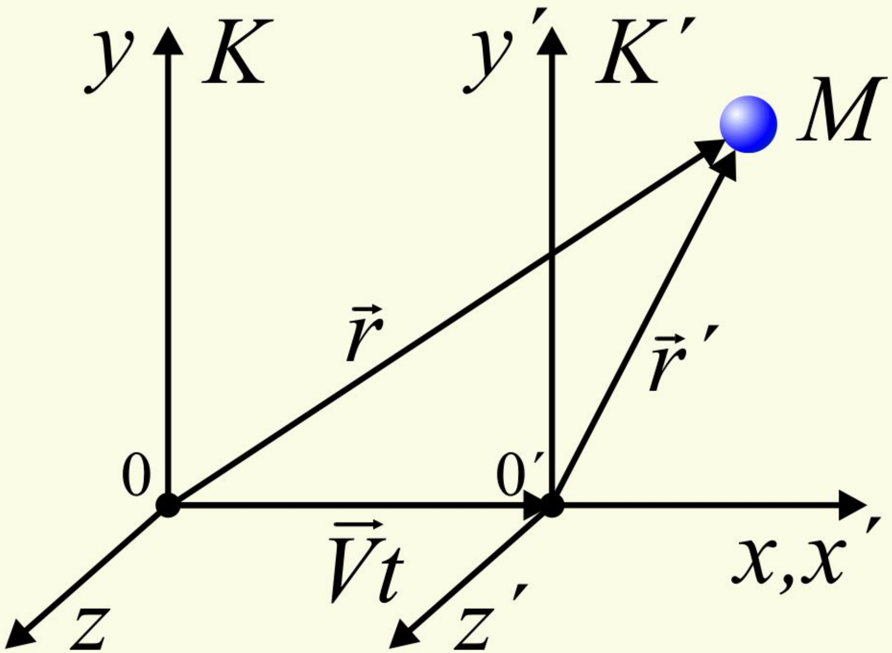
Тело отсчета, система координат и часы составляют ***система отсчета***.

Существует СО, в которой все свободные тела двигаются прямолинейно и равномерно. Такая СО называется ***инерциальной системой отсчета***.

Только опытным путем можно установить, какая СО является инерциальной, а какая – нет.

§§ Принцип относительности

Рассмотрим ИСО K и вторую СО K', двигающуюся относительно K поступательно с постоянной скоростью V



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t,\ t = t'$$

<u>преобразования Галилея:</u>

$$x = x' + Vt,$$
$$y = y', z = z', t = t'$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V} \Rightarrow \boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}}$$

закон сложения скоростей

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} \quad (\vec{V} = \mathrm{const}) \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}'}$$

т.е. ускорение ***инвариантно*** относительно преобразований Галилея.

Т.к. K – инерциальная, то свободная м.т. двигается без ускорения. Так как $\vec{a} = \vec{a}'$, то в K' движение м.т. будет также неускоренным, следовательно K' – также ИСО.

Сила и ускорение, а, значит, и уравнения механики Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея.

<u>Принцип относительности Галилея</u>

Во всех ИСО механические явления протекают одинаково

Принцип относительности является ***постулатом***, т.е. основополагающим допущением, выходящем за пределы экспериментальной проверки.

§§ Преобразования Лоренца

Рассмотрим преобразования, отвечающие двум принципам:

1) принципу относительности

   Во всех ИСО ***все*** физические явления протекают одинаково

2) принципу постоянства скорости света

   Скорость света не зависит от движения его источника или приемника.

Рассмотрим две инерциальные СО K и K'.
Пусть K' двигается относительно K поступательно с постоянной скоростью V

В общем случае

$$x' = \Phi_1(x, y, z, t), \quad y' = \Phi_2(x, y, z, t),$$
$$z' = \Phi_3(x, y, z, t), \quad t' = \Phi_4(x, y, z, t)$$

Из однородности пространства и времени следует, что преобразования должны быть линейными:

$$\Phi_1(x, y, z, t) = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t + a_5$$

Пусть при $t = t' = 0$ начала СК совпадают, тогда $a_5 = 0$. Получаем

$$y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 t$$

$$z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 t$$

Поскольку оси x и x' совпадают, то

$$y = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow 0 = b_1 x + b_3 z + b_4 t,$$

$$z = 0 \Leftrightarrow z' = 0 \Rightarrow 0 = c_1 x + c_2 y + c_4 t,$$

для любых $x, y, z, t.$

Тогда

$$b_1 = b_3 = b_4 = 0 \text{ и } c_1 = c_2 = c_4 = 0$$

Получаем

$$y' = b_2 y, \ z' = c_3 z,$$

где b_2 и c_3 – величины, показывающие во сколько раз длина промежутка больше в K' по сравнению с K.

Обратный переход: $$y = \frac{1}{b_2} y', \ z = \frac{1}{c_3} z'.$$

Согласно принципу относительности обе СК равноправны, следовательно

$$b_2 = \frac{1}{b_2} \Rightarrow b_2 = \pm 1, \quad c_3 = \frac{1}{c_3} \Rightarrow c_3 = \pm 1.$$

Запишем преобразования для x и t.

Они линейны и т.к. координата начала K' $(x'=0)$ в K имеет координату $x=Vt$, то

$$x' = \alpha(x - Vt)$$

Если K' считать неподвижной, то

$$x = \alpha'(x' + Vt')$$

Коэффициенты α и α' определим из принципа относительности.

Рассмотрим стержень длиной L в ИСО.

а) Стержень неподвижен в K'

$$x_2' - x_1' = L$$ – его длина

В K стержень двигается со скоростью V.

Его длина – расстояние между двумя точками неподвижной СК, с которыми в один и тот же момент времени t_0 совпадает начало и конец стержня:

$$x_2' = \alpha(x_2 - Vt_0), \quad x_1' = \alpha(x_1 - Vt_0),$$

Получаем $$x_2 - x_1 = \frac{L}{\alpha}.$$

б) Стержень неподвижен в K

$$x_2 - x_1 = L$$ – его длина

Скорость стержня в K' равна $-V$.

$$x_2 = \alpha'(x_2' + Vt_0), \quad x_1 = \alpha'(x_1' + Vt_0),$$

Получаем $$x_2' - x_1' = \frac{L}{\alpha'}.$$

Согласно принципу относительности обе СК равноправны и длина стержня одинакова в K и K', следовательно

$$\frac{L}{\alpha} = \frac{L}{\alpha'} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Воспользуемся постулатом постоянства скорости света.

Пусть в момент времени $t = t' = 0$ из начала K и K' испускается световой сигнал

$$x' = ct',$$

$$x = ct,$$

где c – скорость света, принимающая в обеих системах одинаковое значение

$$\begin{cases} ct' = \alpha(x - Vt) \\ ct = \alpha'(x' + Vt') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct' = \alpha t(c - V) \\ ct = \alpha t'(c + V) \end{cases}$$

умножая уравнения друг на друга, получим

$$c^2 t' t = \alpha\, t t' (c^2 - V^2) \Rightarrow \boxed{\alpha = 1 \Big/ \sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$

Учитывая, что $\alpha = \alpha'$, запишем

$$\begin{cases} x' = \alpha(x - Vt) \\ x = \alpha(x' + Vt') \end{cases} \quad \Rightarrow x' = \frac{x}{\alpha} - Vt'$$

$$\alpha x - \alpha V t = \frac{x}{\alpha} - Vt'$$

$$\Rightarrow t' = \frac{\alpha}{V}\left[\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)x + Vt\right]$$

Получаем $t' = \alpha\left[t - \frac{V}{c^2}x\right]$

<u>Преобразования Лоренца:</u>

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

§§ Длина двигающегося тела

Рассмотрим стержень, который покоится относительно K'. Его длина

$$L = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{L'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Отсюда длина движущегося стержня:

$$L' = L\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

§§ Темп хода часов

Пусть в K' происходят два события в моменты времени t'_1 и t'_2.
В K они происходят в моменты t_1 и t_2 в разных точках.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2}x'_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2}x'_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$= \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

интервал времени $\Delta t'$ между событиями, измеренный движущимися часами меньше, чем интервал времени Δt между теми же событиями, измеренный покоящимися часами.

Темп хода движущихся часов замедлен относительно неподвижных.

§§ Сложение скоростей

Рассмотрим обратное преобразование

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$dy = dy',\ dz = dz',$$

$$t = \frac{t' + \dfrac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow dt = \frac{dt' + \dfrac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Скорость м.т.
в системе K:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\upsilon'_x + V}{1 + \frac{V\upsilon'_x}{c^2}}$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V\upsilon'_x}{c^2}}\upsilon'_y$$

$$\upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V\upsilon'_x}{c^2}}\upsilon'_z$$

Результат сложения скоростей ***никогда*** не превышает скорости света.

§§ Сложение ускорений

Запишем дифференциал скорости υ_x:

$$d\upsilon_x = \frac{d\upsilon'_x\left(1+\frac{V\upsilon'_x}{c^2}\right) - (\upsilon'_x + V)\frac{V}{c^2}d\upsilon'_x}{\left(1+\frac{V\upsilon'_x}{c^2}\right)^2}$$

$$d\upsilon_x = d\upsilon'_x\frac{\left(1 - V^2/c^2\right)}{\left(1+V\upsilon'_x/c^2\right)^2}$$

Пусть начальная скорость точки в K' равна нулю $(\upsilon'_x = \upsilon'_y = \upsilon'_z = 0)$, тогда

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \left(1 - V^2/c^2\right)^{3/2} a'_x$$

аналогично

$$a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \left(1 - V^2/c^2\right) a'_y$$

$$a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \left(1 - V^2/c^2\right) a'_z$$

§§ Уравнение движения

Релятивистский импульс

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon},$$

где $m = m_0 \Big/ \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}$ – релятивистская масса частицы,

m_0 – масса покоя.

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}}$$

– ***релятивистское уравнение движения частицы***

Замечание. В релятивистском случае ускорение и сила ***не сонаправлены***.

§§ Энергия

По закону сохранения энергии:

$$dE = dA = (\vec{F} \cdot \vec{\upsilon})dt = \left(\frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \vec{\upsilon} \right) dt$$

$$= d\left(\frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} \right) \vec{\upsilon}$$

$$= \left(\frac{m_0 d\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} + \frac{1}{c^2} \frac{m_0 \vec{\upsilon}\, \upsilon d\upsilon}{(1 - \upsilon^2 / c^2)^{3/2}} \right) \vec{\upsilon}$$

$$= \left| \; \upsilon\, d\upsilon = \vec{\upsilon}\, d\vec{\upsilon} \; \right| = \frac{m_0\, \vec{\upsilon}\, d\vec{\upsilon}}{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{3/2}} =$$

$$= d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \right)$$

<u>Полная энергия частицы:</u>

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} + \mathrm{const}$$

Эйнштейн положил $\mathrm{const} = 0$.

$E_0 = m_0 c^2$ – **<u>энергия покоя частицы</u>**.

Кинетическая энергия частицы

$$E_k = E - E_0 = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} - 1 \right]$$

При малых скоростях ($\upsilon << c$) получаем

$$E_k \approx \frac{m_0 \upsilon^2}{2}$$

Связь энергии и импульса:

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

Закон пропорциональности массы и энергии

всякое изменение энергии тела ΔE сопровождается изменением массы тела $\Delta m = \Delta E / \mathrm{c}^2$ и, наоборот, всякое изменение массы Δm сопровождается изменением энергии $\Delta E = \Delta m \mathrm{c}^2$.