Дифференциальные уравнения

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Однородные** Д.У. с постоянными коэффициентами.
  - Рассмотрим уравнение
    $$Ly \equiv y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$
  - где $a_0, \dots, a_{n-1}$ - постоянные действительные числа
  - Пусть функция $\varphi(x) = e^{rx}$ - решение Д.У.

$$\Rightarrow \varphi'(x) = re^{rx}, \dots, \varphi^{(n)}(x) = r^n e^{rx}$$

$$\Rightarrow e^{rx}(r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_0) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \boxed{r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_0 = 0}$$

$\Rightarrow$ r - корень алгебраического уравнения

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Определение.**
- Алгебраическое уравнение

$$\boxed{r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_0 = 0}$$

- соответствующее данному ЛОДУ,
- называется **характеристическим уравнением**.

- **Обратное утверждение:**
- Пусть r - корень характеристического уравнения.
- Тогда функция $\varphi(x) = e^{rx}$ - частное решение ЛОДУ.

  - **Замечание.** Алгебраическое уравнение степени n с действительными коэффициентами имеет n решений.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- Примеры.
- 1. $y'' - 4y = 0$
- Замена: $y'' \to r^2, \;\; y \to r^0 = 1$
- Характеристическое уравнение:

$$r^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; r_{1,2} = \pm 2$$

- $\varphi_1(x) = e^{2x}, \;\; \varphi_2(x) = e^{-2x}$
- \- частные решения ЛОДУ.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- Примеры.
- 2. $y'' + 4y' + 3y = 0$
- Замена: $y'' \to r^2,\ \ y' \to r,\ \ y \to 1$
- Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 4r + 3 = 0 \ \Rightarrow \ r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = -1, -3$$

- $\Rightarrow \varphi_1(x) = e^{-x},\ \ \varphi_2(x) = e^{-3x}$
- \- частные решения ЛОДУ.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Свойства решений ЛОДУ.**
- **1. Линейность.**
- $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ **-** решения **ЛОДУ** $Ly = 0$

$$\Downarrow$$

- $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \dots + C_k\varphi_k(x)$- решение **ЛОДУ.**

$$(C_1, C_2, \dots, C_k - \textit{произвольные постоянные})$$

- Доказать самостоятельно.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Свойства решений ЛОДУ.**
- **1. Линейность.**
- $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ - решения **ЛОДУ** $Ly = 0$

$$\Downarrow$$

- $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_k\varphi_k(x)$- решение **ЛОДУ.**

$(C_1, C_2, \ldots, C_k - \text{произвольные постоянные})$

- Доказать самостоятельно.

- Примеры.
- 1. $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ - решение ЛОДУ $y'' - 4y = 0$
- при любых постоянных C_1 и C_2.
- 2. $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ - решение ЛОДУ $y'' + 4y' + 3y = 0$
- при любых постоянных C_1 и C_2.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **2. Критерий линейной независимости системы решений ЛОДУ.**
- *Пусть* $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$
- **- частные решения ЛОДУ порядка n** *в* (a,b)
- **Теорема.**
- Система функций $\{\varphi_i(x),\ i=1,2,\ldots,n\}$
- **линейно независимая** в (a,b)

$\Updownarrow$

$$W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Определение ФСР.**
- **Фундаментальной системой решений (ФСР)**
- **ЛОДУ** $Ly = 0$ **- порядка n**
- называется система $\{\varphi_i(x), i = 1, 2, ..., n\}$
- **n линейно независимых решений ЛОДУ.**

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Определение ФСР.**
- **Фундаментальной системой решений (ФСР)**
- **ЛОДУ** $Ly = 0$ **- порядка n**
- называется система $\{\varphi_i(x), i = 1,2,\ldots,n\}$
- **n линейно независимых решений ЛОДУ.**

- **Примеры.**

- **1.** $\varphi_1(x) = e^{2x},\ \varphi_2(x) = e^{-2x}$ **- ФСР ЛОДУ** $y'' - 4y = 0$
- **2.** $\varphi_1(x) = e^{-x},\ \varphi_2(x) = e^{-3x}$ **- ФСР ЛОДУ** $y'' + 4y' + 3y = 0$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Теорема о структуре общего решения ЛОДУ.**
- Пусть при $x \in (a,b)$ система $\{\varphi_i(x),\, i = 1,2,\ldots,n\}$
- образует **ФСР ЛОДУ порядка n.**
- Тогда общее решение ЛОДУ порядка n
- имеет вид

$$\boxed{Y(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)}$$

- с произвольными постоянными $C_1, C_2, \ldots, C_n$

- **Примеры.**

- **1.** $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, \forall C_1, C_2$, **- общее решение ЛОДУ** $y'' - 4y = 0$
- **2.** $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}, \forall C_1, C_2$, **- общее решение ЛОДУ** $y'' + 4y' + 3y = 0$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **ФСР** в случае **различных** действительных корней.

$$r_1, r_2, \ldots, r_n - \textit{корни характеристического уравнения}$$
$$\textit{действительные различные } (r_i \neq r_j)$$

$$\varphi_1 = e^{r_1 x}, \varphi_2 = e^{r_2 x}, \ldots, \varphi_n = e^{r_n x} - \textit{ФСР ЛОДУ порядка } n$$

Доказательство (при n=2).

1. $\varphi_1 = e^{r_1 x}$ и $\varphi_2 = e^{r_2 x}$ $-$ *два частных решения ЛОДУ порядка* 2

2. $W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0 \Longrightarrow \varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ $-$ *линейно независимые функции*

$\Longrightarrow$ **образуют ФСР**

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- Случай **кратных** действительных корней.
- Пусть действительное число r - корень уравнения
- кратности $k \geq 2$
- $\Longrightarrow$ В **ФСР** ЛОДУ ему соответствуют k решений вида

$$e^{rx},\ xe^{rx},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{rx}$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- Случай **кратных** действительных корней.
- Пусть действительное число r - корень уравнения
- кратности $k \geq 2$
- $\Longrightarrow$ В **ФСР** ЛОДУ ему соответствуют k решений вида

$$e^{rx},\ xe^{rx},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{rx}$$

- Пример.
- 1. $y'' + 4y' + 4y = 0$
- 2. Замена: $y'' \to r^2,\ y' \to r,\ y \to 1$
- 3. Характеристическое уравнение:
- $r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 0}{2} = -2$ (кратность 2)
- 4. **ФСР:** $\varphi_1(x) = e^{-2x},\ \varphi_2(x) = x \cdot e^{-2x}$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- ФСР в случае, когда некоторые корни **комплексные**.
  - **1. Случай простого** комплексного корня**.**
  - Пусть $r = \alpha + \beta i$ - комплексный корень характеристического уравнения
  - тогда $\overline{r} = \alpha - \beta i$ - также корень этого уравнения.
    - Функции $\widetilde{\varphi}_1(x) = e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $\widetilde{\varphi}_2(x) = e^{(\alpha-\beta i)x}$
    - - решения ЛОДУ.
    - Функции $\widetilde{\varphi}_1(x)$ и $\widetilde{\varphi}_2(x)$ линейно независимые, так как

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{(\alpha+\beta i)x} & e^{(\alpha-\beta i)x} \\ (\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)x} & (\alpha-\beta i)e^{(\alpha-\beta i)x} \end{vmatrix} = -2\beta i e^{2\alpha x} \neq 0$$

- *Функции $\widetilde{\varphi}_1(x)$ и $\widetilde{\varphi}_2(x)$ вместе с другими (n-2) - линейно независимыми решениями ЛОДУ образуют* ***ФСР.***

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- Преобразуем функции $\widetilde{\varphi}_1(x)\ и\ \widetilde{\varphi}_2(x)$
- с помощью формулы Эйлера: $\boxed{e^{\beta x i} = \cos\beta x + i\sin\beta x}$

$$\pm\begin{array}{l} e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \end{array}$$

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{\widetilde{\varphi}_1(x) + \widetilde{\varphi}_2(x)}{2};\quad e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{\widetilde{\varphi}_1(x) - \widetilde{\varphi}_2(x)}{2i}$$

- Функции

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x\ \ и\ \ \varphi_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

  - являются **действительными функциями** переменной x;
  - являются **решениями** ЛОДУ;
  - являются **линейно независимыми**

Образуют (вместе с другими) **ФСР**

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- Примеры.
- 1. Найти **ФСР** уравнения $y'' + y = 0$
- Шаг 1. Запишем характеристическое уравнение и решим его:

$$y'' \to r^2, y \to 1 \Longrightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

- Шаг 2. Запишем ФСР ЛОДУ: $\boxed{\alpha + \beta i = 0 + 1i}$

$$\longrightarrow \varphi_1 = \cos x, \varphi_2 = \sin x$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- Примеры.
- 2. Найти **ФСР** уравнения $y'' + 4y' + 8y = 0$
- Шаг 1. Запишем характеристическое уравнение и решим его:

$$y'' \to r^2, y' \to r, y \to 1 \Longrightarrow r^2 + 4r + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \ r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-4 \pm 4i}{2} = -2 \pm 2i$$

- Шаг 2. Запишем ФСР ЛОДУ: $\boxed{\alpha + \beta i = -2 + 2i}$

$$\longrightarrow \varphi_1 = e^{-2x} \cos 2x \, , \varphi_2 = e^{-2x} \sin 2x$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **2. Случай кратных** комплексных корней**.**
- Пусть комплексное число $r = \alpha + \beta i$
- корень кратности $m \geq 2$
- $\Longrightarrow$ число $\overline{r} = \alpha - \beta i$ - тоже корень кратности $m \geq 2$
- $\Longrightarrow$ В **ФСР** ЛОДУ им соответствуют $2m$ решений вида

$$e^{\alpha x} \cos \beta x\,,\ e^{\alpha x} \sin \beta x\,,$$

$$x e^{\alpha x} \cos \beta x\,,\ x e^{\alpha x} \sin \beta x\,,$$

$$\vdots\ ,\quad \ldots,$$

$$x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x\,,\ x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Неоднородные** уравнения с постоянными коэффициентами.
- **Свойства решений ЛНДУ.** .
- **1**. $y_1(x)\ и\ y_2(x)$ **- частные решения ЛНДУ** $Ly = q(x)$

$$\Downarrow$$

- $y_1(x) - y_2(x)$ **- решение ЛОДУ** $Ly = 0$ **,**
- соответствующего данному ЛНДУ.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Неоднородные** уравнения с постоянными коэффициентами.
- **Свойства решений ЛНДУ.** .
- 1. $y_1(x)\ u\ y_2(x)$ **- частные решения ЛНДУ** $Ly = q(x)$

$$\Downarrow$$

- $y_1(x) - y_2(x)$ **- решение ЛОДУ** $Ly = 0$ **,**
- соответствующего данному ЛНДУ.

- Доказательство.

$$\begin{aligned} Ly_1 &\equiv q(x) \\ Ly_2 &\equiv q(x) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad L(y_1 - y_2) = Ly_1 - Ly_2 \equiv 0$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **2. Принцип суперпозиции.**

$$\boxed{y_i(x) - \text{частные решения ЛНДУ} \quad Ly_i = q_i(x),\ i = 1,2,\ldots,k}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\overline{y(x)} = \sum_{i=1}^{k} y_i(x) - \text{частное решение ЛНДУ } Ly = \sum_{i=1}^{k} q_i(x)}$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **2. Принцип суперпозиции.**

$$y_i(x) - \text{частные решения ЛНДУ } \; Ly_i = q_i(x),\, i = 1,2,\ldots,k$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{y(x)} = \sum_{i=1}^{k} y_i(x) - \text{частное решение ЛНДУ } \; Ly = \sum_{i=1}^{k} q_i(x)$$

Доказательство.

$$L(\overline{y(x)}) = L\left(\sum_{i=1}^{k} y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{k} L(y_i(x)) \equiv \sum_{i=1}^{k} q_i(x)$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Теорема о структуре общего решения ЛНДУ.**

- 1. $\overline{y(x)}$ **- частное** решение **ЛНДУ** $Ly = q(x)$ порядка **n.**
- 2. $\{\varphi_i(x), i = 1,2,\dots,n\}$ **- ФСР ЛОДУ** $Ly = 0$,
- соответствующего данному ЛНДУ.

Общее решение ЛНДУ имеет вид

$$Y(x) = \overline{y(x)} + \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x)$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ - произвольные постоянные

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Неоднородные** уравнения с постоянными коэффициентами.
- **Метод неопределенных коэффициентов.**
- Рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = q(x)$$

- где $a_0, \dots, a_{n-1}$ - постоянные коэффициенты и $q(x) \not\equiv 0$ имеет специальный вид.

Правило.

$$q(x) = e^{\mu x}\left(P_{m_1}(x)\cos\nu x + P_{m_2}(x)\sin\nu x\right)$$

где $P_{m_1}(x)$ и $P_{m_2}(x)$ многочлены степени m_1 и m_2, соответственно.

$$\bar{y} = x^s e^{\mu x}\left(Q_l(x)\cos\nu x + R_l(x)\sin\nu x\right)$$

– частное решение ЛНДУ.

Q_l, R_l – многочлены степени l с неопределенными коэффициентами, $l = \max(m_1, m_2)$, s – кратность корня $\mu + \nu i$ характеристического уравнения.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- Примеры.
- 1. Найти общее решение уравнения $y'' + y = 2e^x$
- Шаг 1. Решим ЛОДУ, соответствующее данному ЛНДУ:

$$y'' + y = 0 \Longrightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$$

$$\Longrightarrow \Phi CP: \ y_1 = \cos x, \ y_2 = \sin x$$

$$\Longrightarrow y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

- Шаг 2. Найдем частное решение ЛНДУ:

$$\bar{y} = Ae^x \ ? \ \bar{y}' = Ae^x, \bar{y}'' = Ae^x$$

$$\boxed{\mu + \nu i = 1 \neq \pm i \Rightarrow s = 0}$$

$$Ae^x + Ae^x = 2e^x \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \bar{y} = e^x$$

- Шаг 3. Запишем общее решение ЛНДУ:

$$y = \bar{y} + y_{oo} = e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- 2. Найти общее решение ЛНДУ $y'' - y = 2e^{x}$
- Шаг 1. Решим ЛОДУ, соответствующее данному ЛНДУ:

$$y'' - y = 0 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 1$$

$$\Longrightarrow \text{ФСР}: \; y_1 = e^{x}, \; y_2 = e^{-x}$$

$$\Longrightarrow \quad y_{oo} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

- Шаг 2. Найдем частное решение ЛНДУ:

$$\bar{y} = Axe^{x} \; ? \Rightarrow \bar{y}' = Ae^{x} + Axe^{x}$$

$$\mu + \nu i = 1 = r_1 \Rightarrow s = 1$$

$$\bar{y}'' = 2Ae^{x} + Axe^{x}$$

$$2Ae^{x} + Axe^{x} - Axe^{x} = 2e^{x}$$

$$\Longrightarrow \quad A = 1 \; , \; \bar{y} = xe^{x}$$

- Шаг 3. Запишем общее решение ЛНДУ: $y = xe^{x} + C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- Пример 3. Найти общее решение ЛНДУ $y'' + 2y' = 2\cos x$
- Шаг 1. Решим ЛОДУ, соответствующее данному ЛНДУ:

$$y'' + 2y' = 0 \Rightarrow r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0\,,\; r_2 = -2$$

$$\Longrightarrow \Phi CP:\; y_1 = e^{0x} \equiv 1,\;\; y_2 = e^{-2x}$$

$$\Longrightarrow y_{oo} = C_1 + C_2 e^{-2x}$$

- Шаг 2. Найдем частное решение ЛНДУ:

$$\bar{y} = A\cos x + B\sin x \quad ? \quad \bar{y}' = -A\sin x + B\cos x \quad \boxed{\mu + \nu i = i \neq r_{1,2}}$$

$$\bar{y}'' = -A\cos x - B\sin x$$

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) = 2\cos x$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -A + 2B = 2 \\ -B - 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{2}{5},\;\; B = \frac{4}{5}\;,\;\; \bar{y} = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x$$

- Шаг 3. Запишем общее решение ЛНДУ:

$$y = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x + C_1 + C_2 e^{-2x}$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- Пример 4. Найти общее решение ЛНДУ $y'' + y = 2\cos x$
- Шаг 1. Решим ЛОДУ, соответствующее данному ЛНДУ:

$$y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$$

$$\Longrightarrow \Phi CP: y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$$

$$\Longrightarrow y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

- Шаг 2. Найдем частное решение ЛНДУ:

$$\overline{y} = x(A\cos x + B\sin x) \quad ?$$

$$\boxed{\mu + \nu i = i = r_1 \Rightarrow s = 1}$$

$$\overline{y}' = (A\cos x + B\sin x) + x(-A\sin x + B\cos x)$$

$$\overline{y}'' = 2(-A\sin x + B\cos x) + x(-A\cos x - B\sin x)$$

$$2(-A\sin x + B\cos x) - \cancel{x(A\cos x + B\sin x)} +$$

$$+ \cancel{x(A\cos x + B\sin x)} = 2\cos x$$

$$\longrightarrow \begin{cases} -2A = 0 \\ 2B = 2 \end{cases} \Rightarrow A = 0, B = 1 \Rightarrow \overline{y} = x\sin x$$

- Шаг 3. Запишем общее решение::

$$y = x\sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

резонанс

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- Линейные **неоднородные** Д.У.
- Метод **вариации произвольных постоянных** (метод Лагранжа).
- **Теорема.**
- $Ly = q(x)$ - ЛНДУ порядка n с непрерывными коэффициентами.

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ - ФСР ЛОДУ, соответствующего данному ЛНДУ

$$\exists C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x) \ \text{такие, что}$$

$$\bar{y}(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n(x)$$

$$-\ \text{решение ЛНДУ}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i' \varphi_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i' \varphi_i' = 0 \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i' \varphi_i^{(n-1)} = q(x). \end{cases}$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Частный случай.**
- Рассмотрим **ЛНДУ второго порядка**

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = q(x)$$

- Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ **- ФСР соответствующего ЛОДУ .**
- **Тогда**

$$\exists\, C_1(x) \text{ и } C_2(x) \text{ такие, что}$$
$$C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x) -$$
$$-\text{частное решение ЛНДУ}$$

$$\Leftarrow \quad \begin{cases} C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 = 0 \\ C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2' = q(x) \end{cases}$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Пример.**

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

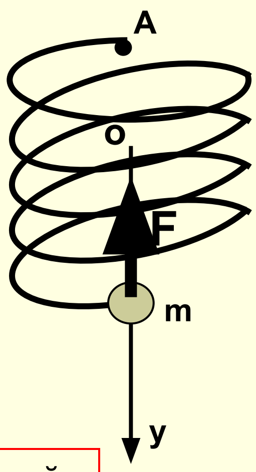
- **Решение.**
- **1.** ЛОДУ $y'' - 2y' + y = 0$ $\Rightarrow$ ФСР $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$
- **2.** Общее решение ЛОДУ $Y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$
- **3.** Частное решение ЛНДУ $\overline{y(x)} = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$
- **4.** Найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 \\ C_1' e^x + C_2'(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -1 \\ C_2' = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -x \\ C_2 = \ln|x| \end{cases}$$

- **5.** Общее решение ЛНДУ $y(x) = -xe^x + \ln|x|\, xe^x + C_1 e^x + C_2 x e^x$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Уравнение колебаний.**
- **Задача.** Материальная точка массы m движется под действием упругой силы пружины.
- Найти закон движения.
  - Закон Гука**:** $F = -by\ ,\ b > 0$
  - Второй закон Ньютона: $ma = F$
  - **Уравнение движения:**



$$\boxed{my'' = -by}$$

Уравнение свободных колебаний.

$$\boxed{y'' + k^2 y = 0\ ,\ \ где\ \ k^2 = \frac{b}{m} > 0}$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- Характеристическое уравнение:

$$r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm k i$$

- ФСР: $y_1 = \cos kx\,,\ \ y_2 = \sin kx$
- Общее решение:

$$y_{oo} = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

- Задача Коши.

$$y(0) = y_o\,,\ \ y'(0) = y_1 \Rightarrow \boxed{y = A\cos(kt - \varphi_o)}$$

Свободные колебания с амплитудой $A = \sqrt{y_o^2 + \dfrac{y_1^2}{k^2}}$

и начальной фазой $\varphi_o = arctg\,\dfrac{y_1}{k y_o}$

$k = \sqrt{\dfrac{b}{m}}$ **- частота собственных колебаний**

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

- **Вынужденные колебания. Резонанс.**
- $F_1 = A_1 \cos \omega t$ - внешняя сила
  - A_1 - амплитуда, ω - частота внешней силы.
  - **Уравнение вынужденных колебаний.**

$$my'' = -by + A_1 \cos \omega t$$

$$y'' + k^2 y = \frac{A_1}{m} \cos \omega t\,, \quad где \quad k^2 = \frac{b}{m} > 0$$

$$y = C \cos(kt - \varphi) + \bar{y}$$

$\omega \neq k$ - отсутствие резонанса

$$\bar{y} = \frac{A_1}{(k^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

$\omega = k$ - резонанс

$$\bar{y} = \frac{A_1 t}{2\omega m} \sin \omega t$$