

Тема проекта:
**«Максимум удовольствия,
оптимизация затрат»**





www.inetersburg.ru
На порядок выше

Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом.
При заданном периметре найти размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света.

Решение.

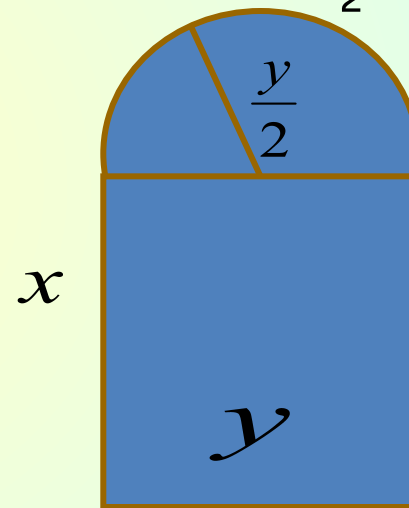
Пусть X – высота окна до полукруга, Y – ширина, тогда $R = Y/2$. $P = \text{const}$,

$$P = 2x + y + \frac{\pi y}{2}$$

$$x = \frac{2P - 2y - \pi y}{4}$$

$$S = xy + \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\begin{aligned} S &= y \left(\frac{2P - 2y - \pi y}{4} \right) + \frac{\pi y^2}{8} = \\ &= \frac{yP}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{\pi y^2}{4} + \frac{\pi y^2}{8} = \\ &= \frac{yP}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{\pi y^2}{8}, \quad y \in (0; \frac{P}{2}) \\ S'(y) &= \frac{P}{2} - y - \frac{\pi y}{4} = \frac{P}{2} - y \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \\ S'(y) = 0 \quad y &= \frac{P}{2} : \frac{4 + \pi}{4} = \frac{2P}{4 + \pi} \\ S''(y) &= -1 - \frac{\pi}{4} < 0 \quad \forall y \in (0; \frac{P}{2}) \\ \Rightarrow y_{\max} &= \frac{2P}{4 + \pi} \end{aligned}$$



$$y = \frac{2P}{4 + \pi} \text{ (ширина),}$$

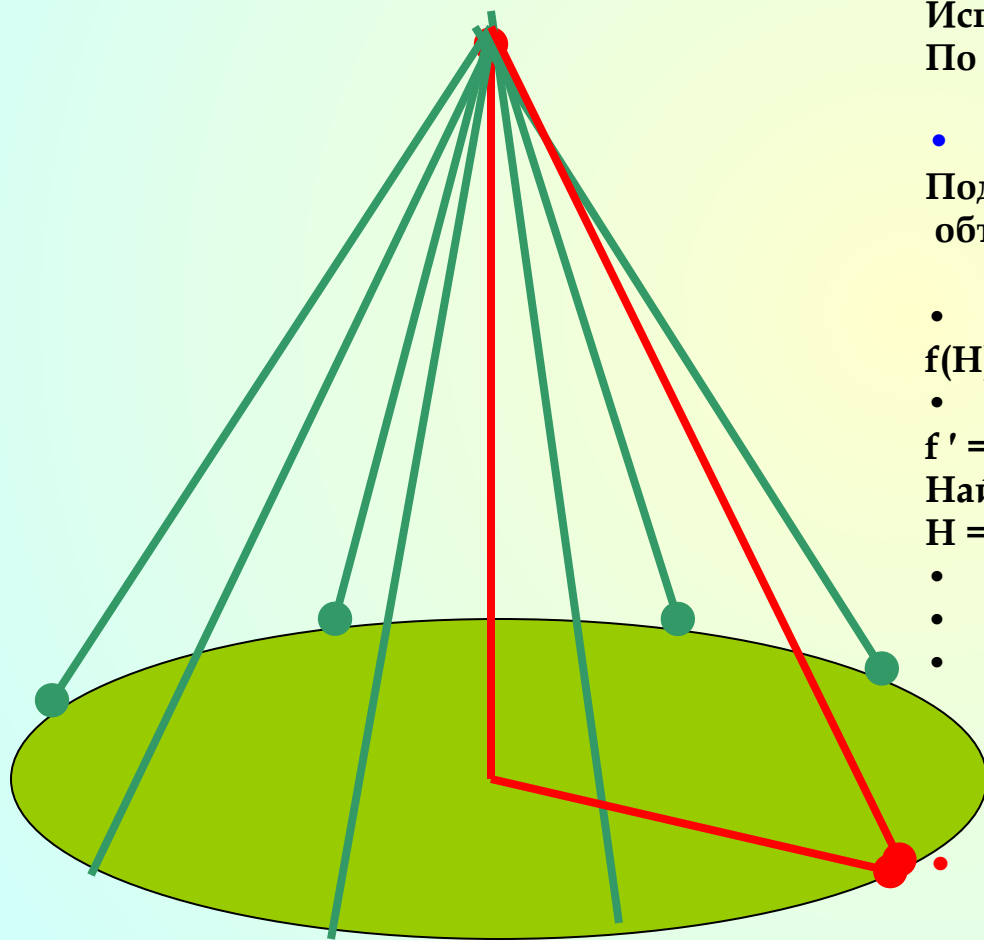
$$R = \frac{P}{4 + \pi} \text{ (радиус),}$$

$$x = \frac{P}{4 + \pi} \text{ (длина)}$$



Сооружается палатка конусообразной формы. Для этого используются шесты длиной L.

Мы выяснили, какой должна быть палатка, чтобы она была наиболее вместительной.



Решение

Используем формулу объема конуса : $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$

По теореме Пифагора выразим радиус через образующую и высоту конуса :

- $R^2 = L^2 - H^2$

Подставим полученное значение в формулу объема, получим :

$$V = \frac{1}{3} \pi (L^2 - H^2) H$$

- Введем функцию :

$f(H) = \frac{1}{3} \pi H (L^2 - H^2)$, где $H \in (0; L)$

- Найдем производную от этой функции :

$$f' = \frac{1}{3} \pi L^2 - \pi H^2$$

Найдем критические точки данной функции :

$$H = L / \sqrt{3}$$

- Найдем производную второго порядка :

- $f'' = -2\pi H$

- Это выражение меньше 0 т.к $H > 0$, а значит, график функции выпуклый в найденной точке. Следовательно, это точка максимума.

НАИБОЛЬШИЙ ОБЪЁМ ПАЛАТКИ, если используются шесты $L = 2,5$

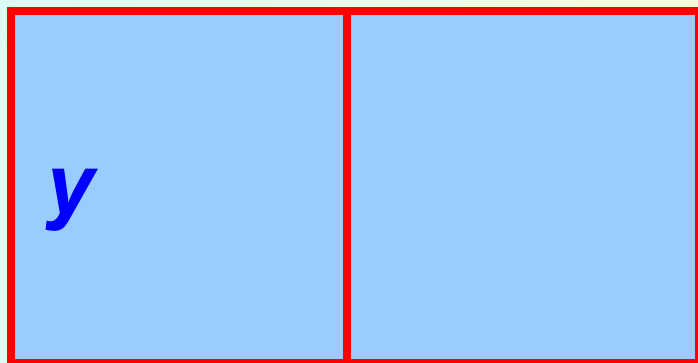
- при $H = 1,5$ $R = 2$

В гостях у Деда Мороза





Прямоугольная площадка площадью $S=294 \text{ м}^2$ разделена на две равные части прямоугольной формы. Какими должны быть размеры этого участка, чтобы длина ограждения была наименьшая.



х

Пусть одна сторона прямоугольника - x , а другая - y .
 $P_{\text{прямоуг}} = 2x + 3y$ $S_{\text{прямоуг}} = xy$; $\Rightarrow 294 = xy$; $\Rightarrow x = \frac{294}{y}$.

$$P_{\text{прямоуг}} = \frac{588}{y} + 3y.$$

Введем функцию $y(p) = \frac{588}{y} + 3y$, $y \in (0; 196)$

$$y'(p) = (3y^2 - 588)/y^2;$$

$$y'(p) = 0; \quad 3y^2 - 588 = 0$$

$$y = 14 \text{ м.}$$

$$y''(p) = 588/y^4 > 0,$$

значит $y=14$, является точкой минимума.

$$x = \frac{294}{14} = 21 \text{ м}$$

Ответ: 14 м, 21 м.

