



# *Принцип Дирихле*

**Дирихле Петер Август Лежён (1805-1859) — немецкий математик, иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук (1837), член многих других академий.**

**Дирихле родился в вестфальском городе Дюрене в семье почтмейстера. В 12 лет Дирихле начал учиться в гимназии в Бонне, спустя два года в иезуитской гимназии в Кёльне, где в числе прочих преподавателей его учил Георг Ом. С 1822 по 1827 г. жил в качестве домашнего учителя в Париже, где вращался в кругу Фурье. В 1827г. устраивается на должность приватдоцента университета Бреслау. В 1829 г. он перебирается в Берлин, где проработал непрерывно 26 лет, сначала как доцент. Затем с 1831 г. как экстраординарный профессор. С 1839 г. как ординарный профессор Берлинского университета. В 1855 г. Дирихле становится в качестве преемника Гаусса профессором высшей математики в Гёттингенском университете.**



**В комбинаторике принцип Дирихле— утверждение, устанавливающее связь между объектами («кроликами») и контейнерами («клетками») при выполнении определённых условий. В английском и некоторых других языках утверждение известно как «принцип голубей и ящиков», когда объектами являются голуби, а контейнерами — ящики.**



**9** клеток содержат **7** голубей,  
по принципу  
Дирихле хотя бы  
 $9-7=2$  клетки свободны



**9** клеток содержат **10** голубей,  
по принципу Дирихле хотя бы  
в одной клетке находятся  
более одного голубя



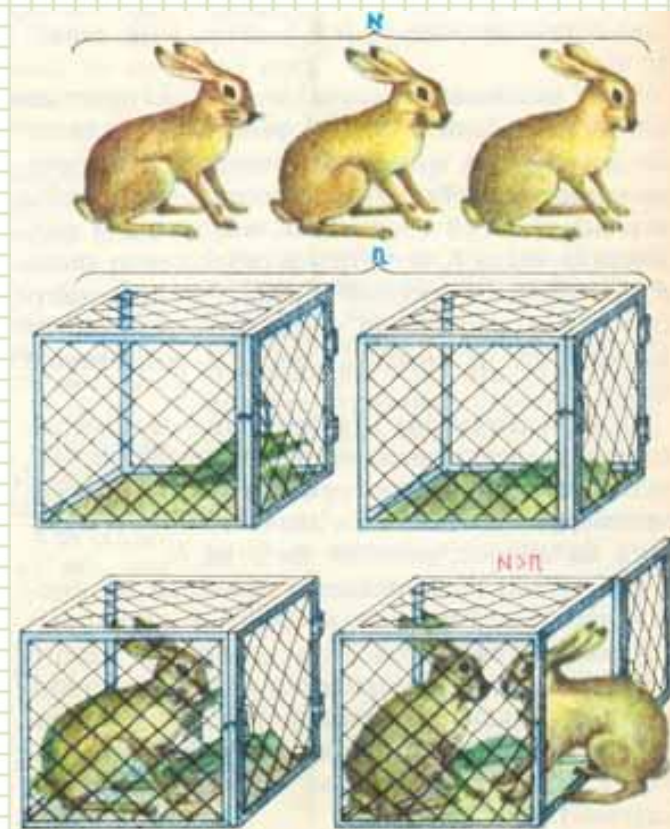
# Формулировки

**Наиболее распространена следующая формулировка этого принципа:**

- Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.

**Более общая формулировка звучит так:**

- Если  $m$  кроликов рассажены в  $n$  клеток, то хотя бы в одной клетке находится не менее  $m/n$  кроликов, а также хотя бы в одной клетке находится не более  $m/n$  кроликов.



# Рассмотрим примеры различных задач, решаемых с помощью принципа Дирихле.



1. В классе 15 учеников. Докажите, что найдутся как минимум 2 ученика, отмечающих дни рождения в один месяц.

## РЕШЕНИЕ:

Пусть 15 учеников будут «зайцы». Тогда «клетками» будут месяцы года, их 12. Так как  $15 > 12$ , то, по принципу Дирихле, найдется, как минимум, одна клетка, в которой будет сидеть, по крайней мере, 2 «зайца». То есть, найдется месяц, в котором будут отмечать дни рождения не менее 2 учеников класса.



**Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 11.**



### РЕШЕНИЕ

Примем числа за «зайцев». Так как их 12, то «клеток» должно быть меньше. Пусть «клетки» — это остатки от деления целого числа на 11. Всего «клеток» будет 11: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Тогда, по принципу Дирихле, найдется «клетка», в которой будут сидеть не менее чем 2 «зайца», то есть найдутся 2 целых числа с одним остатком. А разность двух чисел с одинаковым остатком от деления на 11, будет делиться на 11



**В ковре размером  $3 \times 3$  метра Коля проделал 8 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером  $1 \times 1$  метр, не содержащий внутри себя дырок.**

**(Дырки можно считать точечными.)**

## РЕШЕНИЕ

Здесь дырки будут «зайцами». Разрежем ковер на 9 ковриков размерами  $1 \times 1$  метр. Так как ковриков-«клеток» — 9, а дырок-«зайцев» — 8, то найдется хотя бы одна «клетка», в которой не будет «зайцев», то есть найдется коврик без дырок внутри.



**Таким образом, применяя данный метод, надо:**

- **Определить, что удобно в задаче принять за «клетки», а что за «зайцев».**
  - **Получить «клетки»; чаще всего «клеток» меньше (больше), чем «зайцев» на одну (или более).**
  - **Выбрать для решения требуемую формулировку принципа Дирихле.**
- **Принцип Дирихле важен, интересен, полезен. Его можно применять в повседневной жизни, что развивает логическое мышление.**
- **Многие олимпиадные задачи решаются, используя это специальный метод. Он дает возможность обобщать.**

