

В трикутнику ABC, один з кутів якого дорівнює

$48^\circ$ ,

довжини сторін задовольняють співвідношення

$$(a - c)(a + c)^2 + bc(a + c) = av^2.$$

Виразіть у градусах величини двох інших кутів цього трикутника.

$$(a - c)(a + c)^2 + vc(a + c) = av^2$$

Виконаємо заміну  $a + c = t$ ,  $t > 0$  і отримаємо квадратне рівняння :

$$(a - c)t^2 + vct - av^2 = 0$$

$$(a - c)t^2 + vct - av^2 = 0$$

$$D = (vc)^2 - 4(a - c)(-av^2) =$$

$$v^2c^2 + 4a^2v^2 - 4av^2c =$$

$$4a^2v^2 - 4av^2c + v^2c^2 =$$

$$(2av - vc)^2$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{(2av - vc)^2} = |2av - vc|$$
$$t_{1,2} = \frac{-vc \pm |2av - vc|}{2(a - c)}$$

$$t_1 = \frac{-bc + 2ab - bc}{2(a-c)} = \frac{2ab - 2bc}{2(a-c)} = \frac{2b(a-c)}{2(a-c)} = b,$$

*але*

$$a + c = b$$

неможливо для трикутника ABC.

$$t_2 = \frac{-bc - (2ab - bc)}{2(a - c)} = \frac{-bc - 2ab + bc}{2(a - c)} = \frac{-2ab}{2(a - c)} = \frac{ab}{c - a}$$

оскільки  $t > 0$  ,  $ab > 0$  , то  $c - a > 0$  , отже  $c > a$

$$a + c = \frac{ab}{c - a}, \text{ тому}$$

$$c^2 - a^2 = ab$$

За теоремою косинусів для  $\triangle ABC$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$2bc \cos A = b^2 + ab$$

$$2bc \cos A = b(b + a),$$

$$2c \cos A = b + a,$$

$$\cos A = \frac{a + b}{2c}$$

З рівності  $c^2 - a^2 = av$ ,  $c = \sqrt{a^2 + av}$ ,

тому 
$$\text{Cos}A = \frac{a + v}{2\sqrt{a^2 + av}}$$

$$\text{Cos}^2 A = \frac{(a + v)^2}{4a(a + v)} = \frac{a + v}{4a}$$

$$2\text{Cos}^2 A = \frac{a + v}{2a} = \frac{1}{2} + \frac{v}{2a}, (1)$$



За теоремою косинусів :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$c^2 - a^2 = b^2 - 2ab \cos C = ab,$$

$$2ab \cos C = b^2 - ab$$

$$\cos C = \frac{b}{2a} - \frac{1}{2}, (2)$$

Відніmemo почленно (1) –(2) та отримаємо :

$$2\cos^2 A - \cos C = 1,$$

$$2\cos^2 A = 1 + \cos C,$$

$$1 + \cos 2A = 1 + \cos C,$$

$$\cos 2A = \cos C$$

$$\angle C = 2\angle A$$

За умовою один із кутів  $\triangle ABC$   
дорівнює  $48^\circ$ , тому

розглянемо три  
випадки :

$$1) \angle A = 48^\circ, \text{ то } \angle C = 96^\circ, \angle B = 36^\circ.$$

$$2) \angle B = 48^\circ, \text{ то } \angle A + \angle C = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ.$$

$$\angle A + 2\angle A = 132^\circ$$

$$3\angle A = 132^\circ$$

$$\angle A = 44^\circ$$

$$\angle C = 2 \cdot 44^\circ = 88^\circ$$

3)  $\angle C = 48^\circ$ , то  $\angle A = 24^\circ$ ,  $\angle B = 180^\circ - (48^\circ + 24^\circ) = 108^\circ$ .

Відповідь:  $\angle A = 48^\circ$ ,  $\angle B = 36^\circ$ ,  $\angle C = 96^\circ$

$$\angle A = 44^\circ, \angle B = 48^\circ, \angle C = 88^\circ$$

$$\angle A = 24^\circ, \angle B = 108^\circ, \angle C = 48^\circ$$