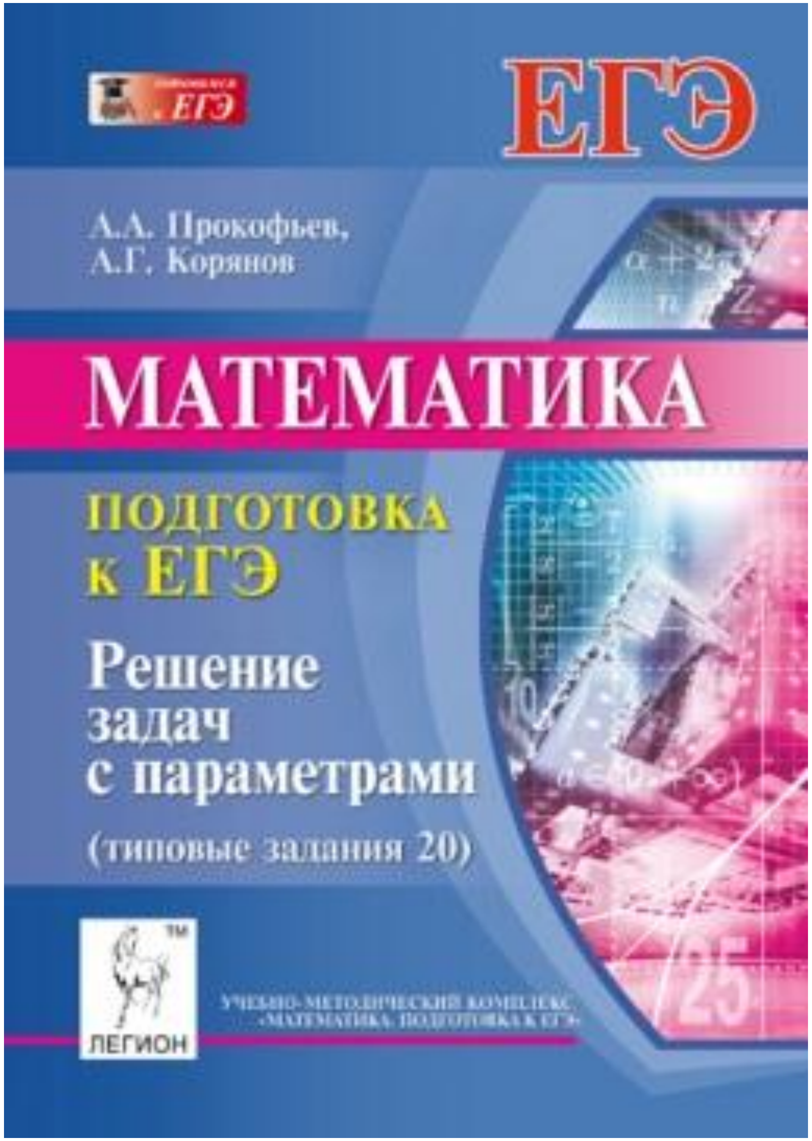
Издательство «Легион»

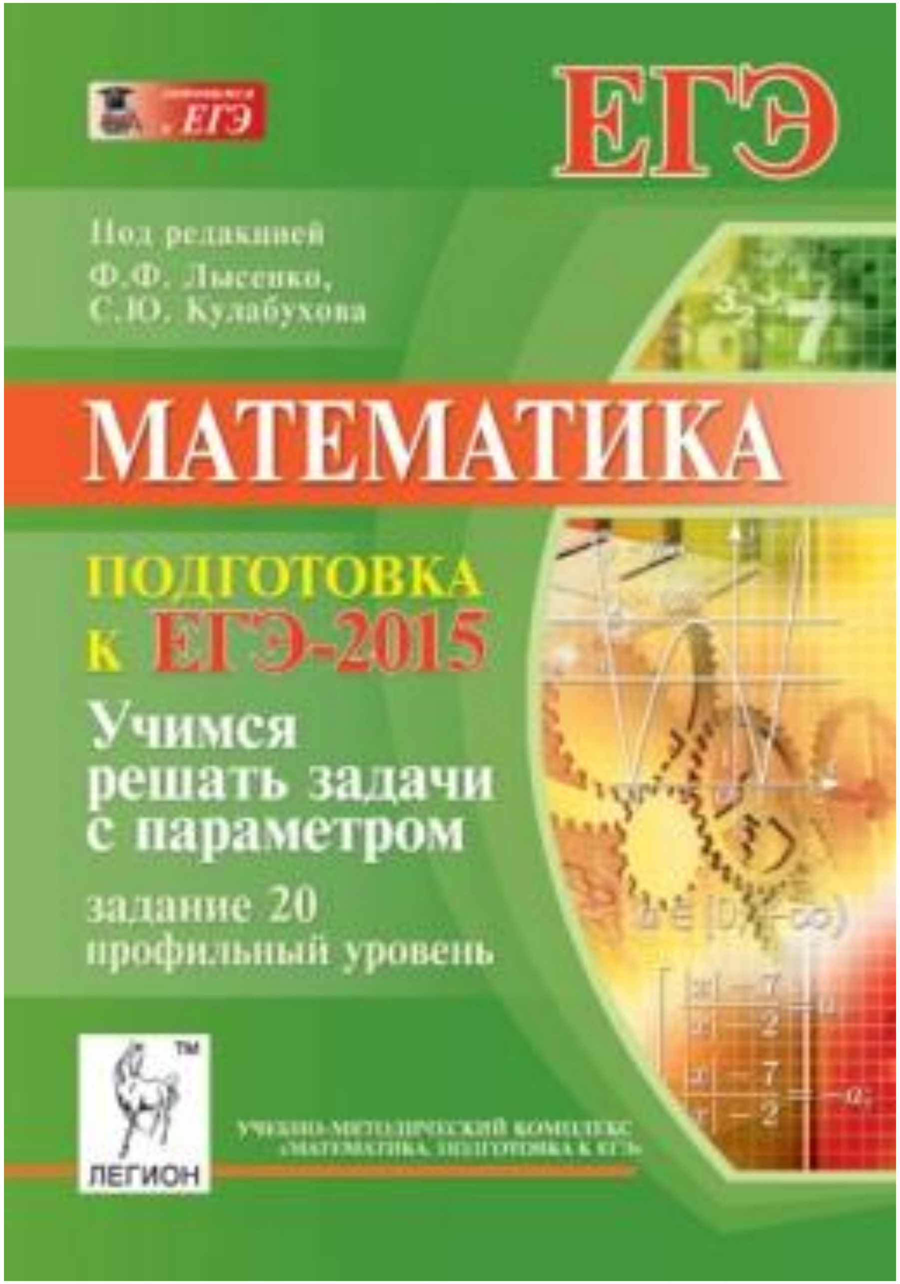
Использование графиков при решении алгебраических задач ЕГЭ типа С5

докладчик: Кулабухов Сергей Юрьевич



Пособие посвящено одному из самых трудных заданий ЕГЭ по математике — заданию 20 профильного уровня (бывшее задание C5). В книге рассмотрены основные подходы к решению задач с параметрами: алгебраический, функциональный, функционально-графический и геометрический. Задачи классифицированы по методам их решения. В большом количестве представлены и примеры выполнения заданий, и упражнения для самостоятельной работы. Ко всем заданиям даны ответы, а в некоторых случаях приведены указания.

Оглавление



Пособие состоит из подготовительных заданий по отдельным темам, материал которых используется при решении задач с параметрами. Последняя глава содержит задачи, аналогичные заданиям С5 на предстоящем ЕГЭ.

Содержит 7 параграфов по 7 вариантов тестов в каждом.

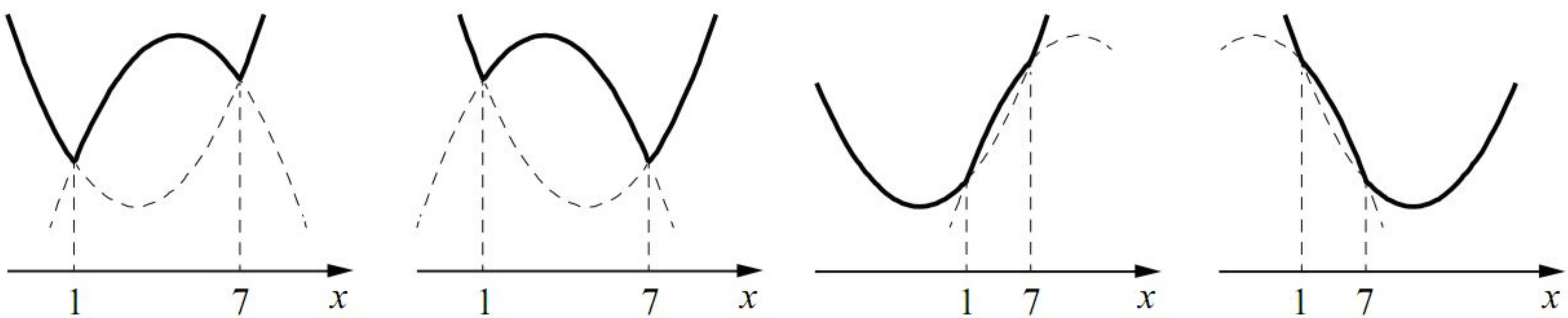
В каждом параграфе первый вариант — демонстрационный с решениями всех задач.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+\left|x^2-8x+7\right|$ больше 1.

Решение. При $x^2-8x+7\geq 0$: $f(x)=x^2+2(a-4)x+7$, а её график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4-a$.

При $x^2-8x+7<0$: $f(x)=-x^2+2(a+4)x-7$, а её график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все четыре возможных вида графика функции $f(x)$ показаны на рисунках.



Наименьшее значение функция $f(x)$ может принять только в точках $x=1$, $x=7$ или $x=4-a$. Поэтому наименьшее значение функции $f(x)$ больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)>1, \\ f(7)>1, \\ f(4-a)>1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a>1, \\ 14a>1, \\ 2a(4-a)+\left|a^2-9\right|>1; \end{cases} \quad \begin{cases} a>\frac{1}{2}, \\ 2a^2-8a+1-\left|a^2-9\right|<0. \end{cases}$$

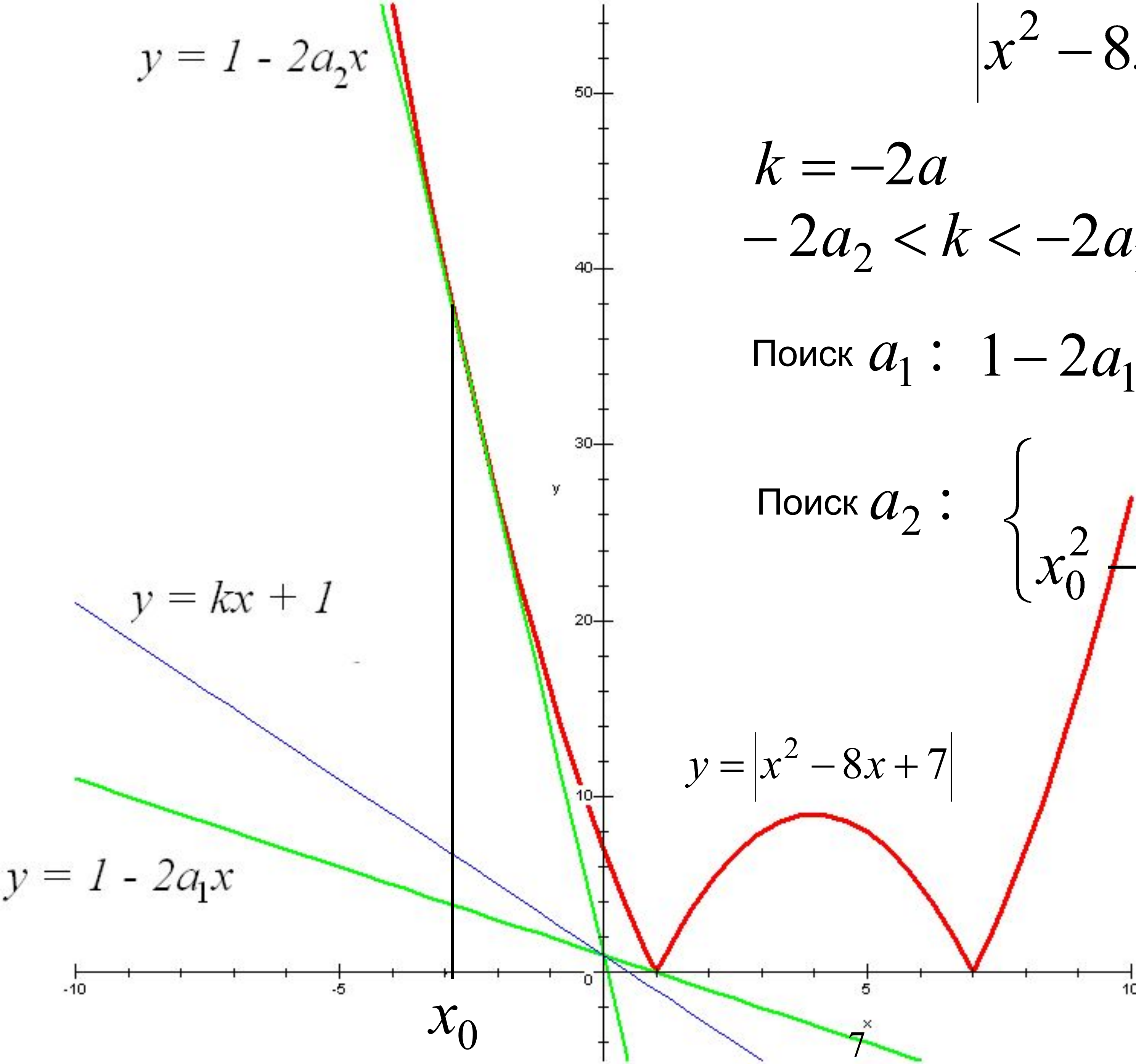
Если $\frac{1}{2}<a<3$, то $3a^2-8a-8<0$, откуда $\frac{4-\sqrt{40}}{3}<a<\frac{4+\sqrt{40}}{3}$. Этот промежуток содержит интервал $\frac{1}{2}<a<3$.

Если $a\geq 3$, то $a^2-8a+10<0$, откуда $4-\sqrt{6}<a<4+\sqrt{6}$. Значит, $3\leq a<4+\sqrt{6}$.

Объединяя найденные промежутки, получаем: $\frac{1}{2}<a<4+\sqrt{6}$.

Ответ: $\frac{1}{2}<a<4+\sqrt{6}$.

Другое решение



$$\left|x^2 - 8x + 7\right| > 1 - 2ax$$

$$k = -2a$$

$$-2a_2 < k < -2a_1 \qquad a_1 < a < a_2$$

Поиск a_1: $1 - 2a_1 \cdot 1 = 0;\ a_1 = \frac{1}{2}$

Поиск a_2: $\begin{cases} 2x_0 - 8 = -2a_2 \\ x_0^2 - 8x_0 + 7 = 1 - 2a_2x_0 \end{cases}$

$$x_0 = -\sqrt{6}$$

$$a_2 = 4 + \sqrt{6}$$

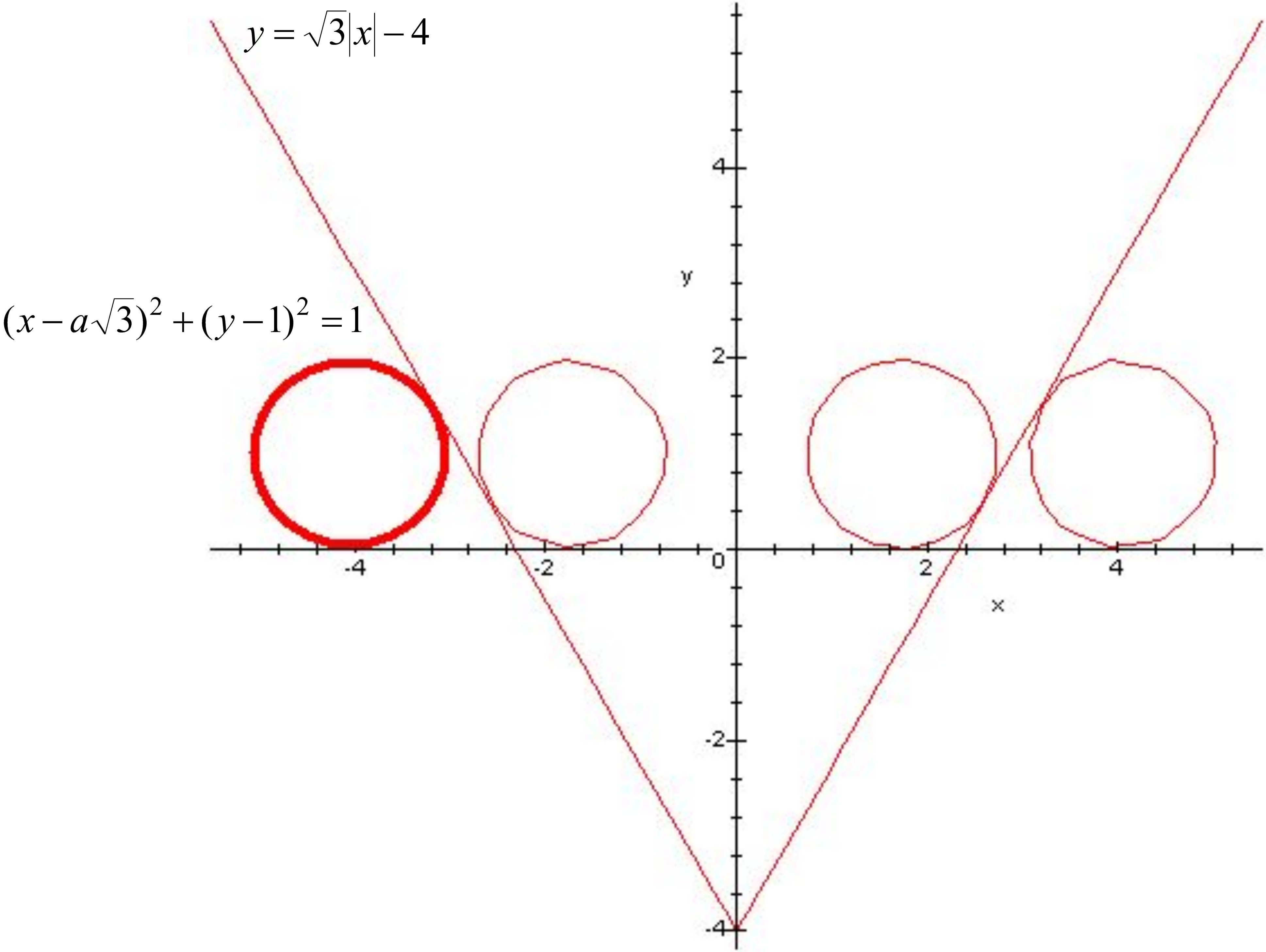
Ответ: $\frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}.$

№2. Найдите наименьшее значение параметра *a*, при котором система уравнений

$$\begin{cases} \left(x - a\sqrt{3}\right)^2 + y^2 - 2y = 0, \\ \sqrt{3}|x| - y = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $-\dfrac{7}{3}$.

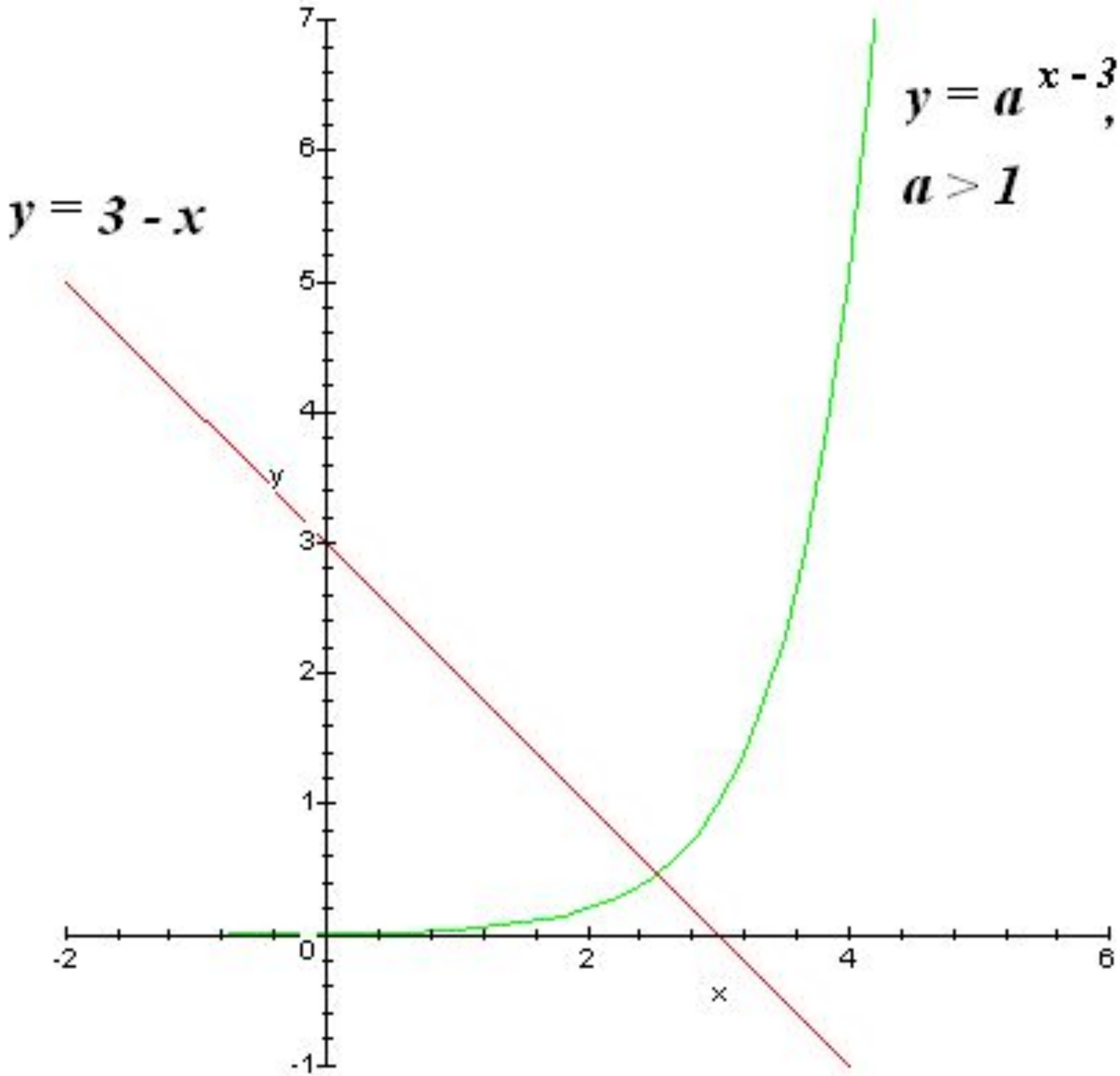

$y = \sqrt{3}|x| - 4$
$(x - a\sqrt{3})^2 + (y-1)^2 = 1$
y
x
0
-4
-2
2
4
4
2
-2
-4

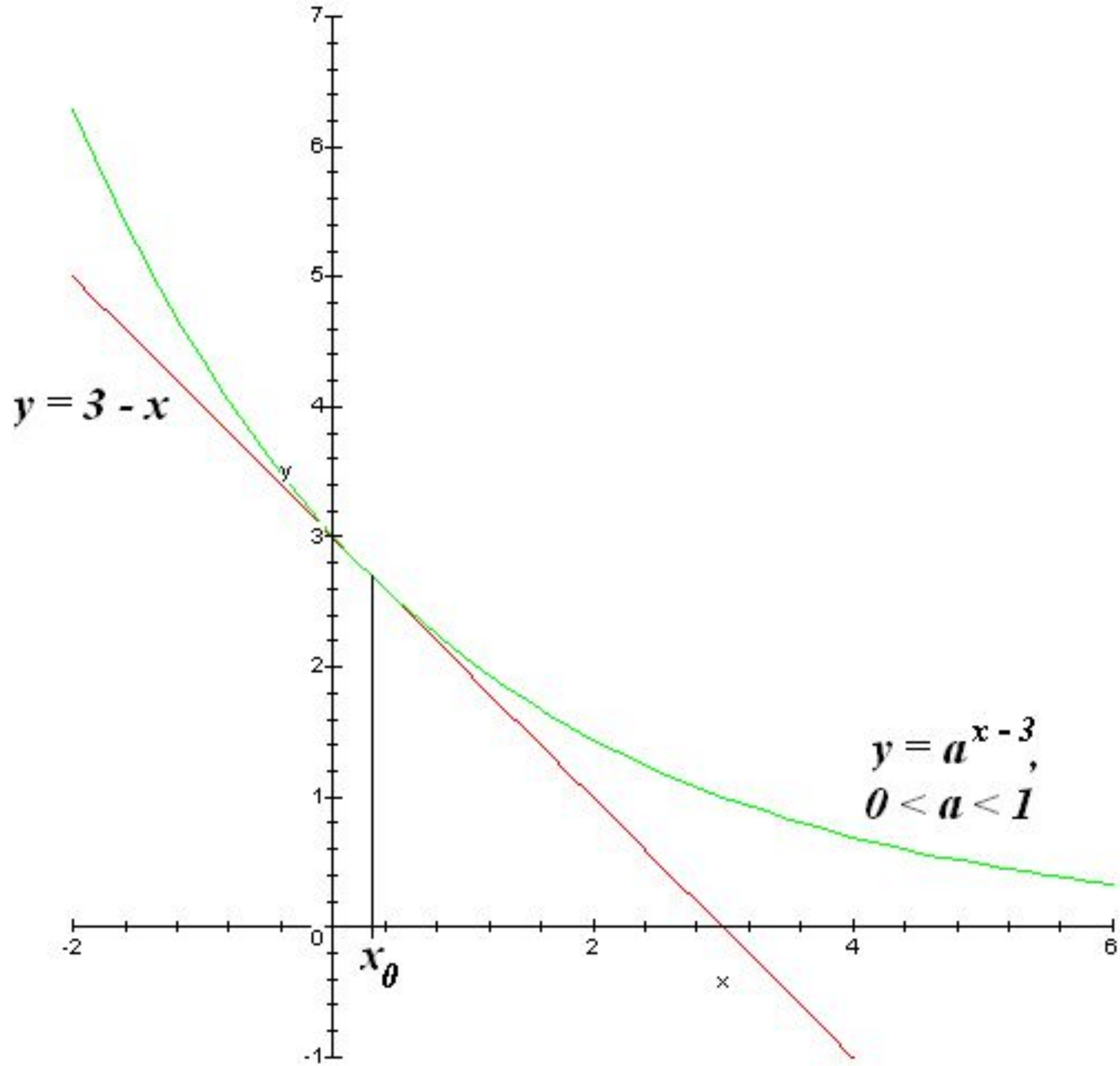
№3. Найдите все значения параметра a, при которых система:

$$\begin{cases} \log_a(x+y-1) = x-3, \\ 2x+y=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = e^{-\frac{1}{e}}$ или $a > 1$.


y = a^{x - 3},
a > 1
y = 3 - x
y
x
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
2
4
6


y = 3 - x
y = a^{x - 3},
0 < a < 1
x_0
y
x
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
2
4
6