



Издательство «Легион»

**Использование графиков при  
решении алгебраических  
задач ЕГЭ типа С5**

докладчик: Кулабухов Сергей Юрьевич



# ЕГЭ

А.А. Прокофьев,  
А.Г. Корянов

## МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА  
к ЕГЭ

Решение  
задач  
с параметрами

( типовые задания 20 )



УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС  
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Пособие посвящено одному из самых трудных заданий ЕГЭ по математике — заданию 20 профильного уровня (бывшее задание С5). В книге рассмотрены основные подходы к решению задач с параметрами: алгебраический, функциональный, функционально-графический и геометрический. Задачи классифицированы по методам их решения. В большом количестве представлены и примеры выполнения заданий, и упражнения для самостоятельной работы. Ко всем заданиям даны ответы, а в некоторых случаях приведены указания.

# Оглавление

Введение .....	5
§ 1. Алгебраические методы решения .....	8
1.1. Задачи вида $a \cdot x \vee b$ .....	8
1.2. Задачи вида $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \vee 0$ .....	12
1.3. Сведение задачи к задаче вида $a \cdot x \vee b$ или $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \vee 0$ .....	22
1.4. Метод замены .....	40
1.5. Выявление необходимых условий .....	53
1.6. Метод введения параметра .....	74
§ 2. Функциональные методы решения .....	84
2.1. Область определения функции .....	85
2.2. Непрерывность функции .....	88
2.3. Дифференцируемость функции .....	90
2.4. Нули функции .....	93
2.5. Промежутки знакопостоянства функции .....	99
2.6. Чётность, нечётность функции .....	101
2.7. Периодичность функции .....	103
2.8. Монотонность функции .....	104
2.9. Экстремум функции .....	115
2.10. Наибольшее (наименьшее) значение функции .....	120
2.11. Ограниченность функции .....	134
2.12. Множество значений функции .....	138
2.13. График функции .....	145
§ 3. Функционально-графические методы решения .....	154
3.1. Координатная плоскость $Oxy$ .....	157
3.2. Координатные плоскости $Oxa$ и $Oax$ .....	178

§ 4. Геометрические методы решения .....	195
4.1. Формула расстояния между точками .....	195
4.2. Уравнение прямой .....	198
4.3. Уравнение параболы .....	205
4.4. Уравнение гиперболы .....	206
4.5. Уравнение окружности .....	207
4.6. Уравнение параллелограмма .....	233
§ 5. Решение задач разными способами .....	242
Упражнения .....	276
Ответы к упражнениям .....	320
Список использованной литературы .....	329



# ЕГЭ

Под редакцией  
Ф.Ф. Лысенко,  
С.Ю. Кулабухова

## МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА  
К **ЕГЭ-2015**

Учимся  
решать задачи  
с параметром

задание 20  
профильный уровень



УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС  
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Пособие состоит из подготовительных заданий по отдельным темам, материал которых используется при решении задач с параметрами. Последняя глава содержит задачи, аналогичные заданиям С5 на предстоящем ЕГЭ.

Содержит 7 параграфов по 7 вариантов тестов в каждом.

В каждом параграфе первый вариант — демонстрационный с решениями всех задач.

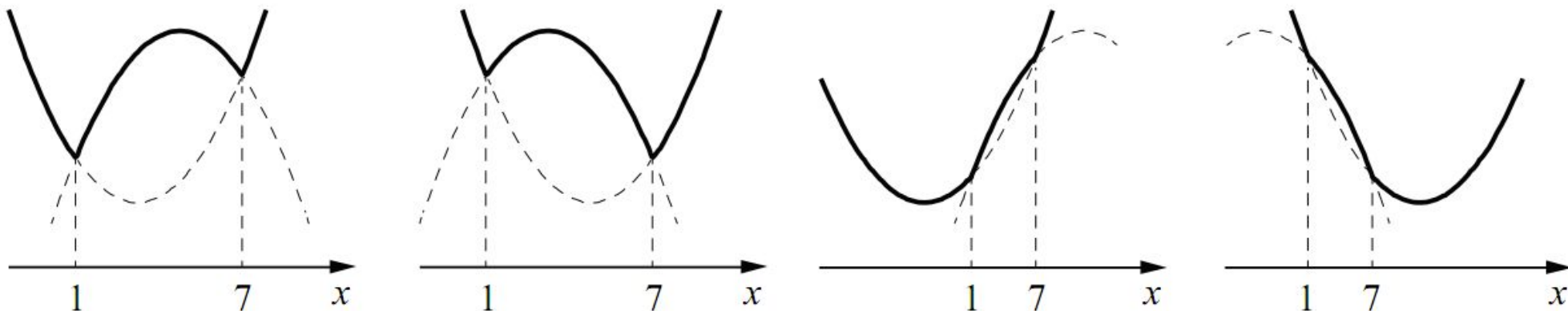


**C5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции  $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$  больше 1.

**Решение.** При  $x^2 - 8x + 7 \geq 0$ :  $f(x) = x^2 + 2(a - 4)x + 7$ , а её график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии  $x = 4 - a$ .

При  $x^2 - 8x + 7 < 0$ :  $f(x) = -x^2 + 2(a + 4)x - 7$ , а её график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все четыре возможных вида графика функции  $f(x)$  показаны на рисунках.



Наименьшее значение функция  $f(x)$  может принять только в точках  $x=1$ ,  $x=7$  или  $x=4-a$ . Поэтому наименьшее значение функции  $f(x)$  больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1) > 1, \\ f(7) > 1, \\ f(4-a) > 1; \end{cases} \begin{cases} 2a > 1, \\ 14a > 1, \\ 2a(4-a) + |a^2 - 9| > 1; \end{cases} \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ 2a^2 - 8a + 1 - |a^2 - 9| < 0. \end{cases}$$

Если  $\frac{1}{2} < a < 3$ , то  $3a^2 - 8a - 8 < 0$ , откуда  $\frac{4 - \sqrt{40}}{3} < a < \frac{4 + \sqrt{40}}{3}$ . Этот

промежуток содержит интервал  $\frac{1}{2} < a < 3$ .

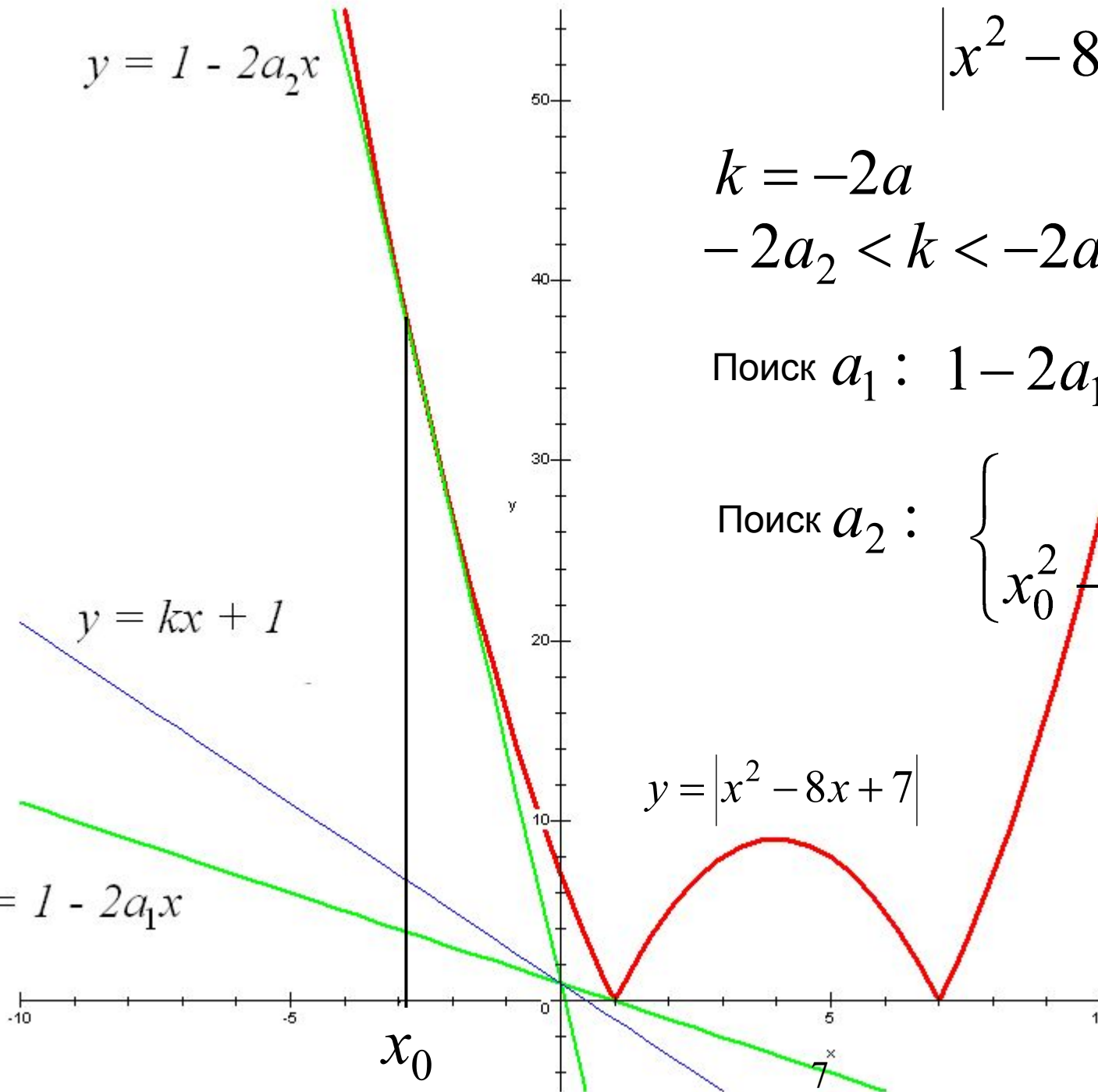
Если  $a \geq 3$ , то  $a^2 - 8a + 10 < 0$ , откуда  $4 - \sqrt{6} < a < 4 + \sqrt{6}$ . Значит,  $3 \leq a < 4 + \sqrt{6}$ .

Объединяя найденные промежутки, получаем:  $\frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}$ .

Другое решение

$$y = 1 - 2a_2x$$



$$|x^2 - 8x + 7| > 1 - 2ax$$

$$k = -2a$$

$$-2a_2 < k < -2a_1 \quad a_1 < a < a_2$$

Поиск  $a_1$  :  $1 - 2a_1 \cdot 1 = 0$ ;  $a_1 = \frac{1}{2}$

Поиск  $a_2$  : 
$$\begin{cases} 2x_0 - 8 = -2a_2 \\ x_0^2 - 8x_0 + 7 = 1 - 2a_2x_0 \end{cases}$$

$$x_0 = -\sqrt{6}$$

$$a_2 = 4 + \sqrt{6}$$

Ответ:  $\frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}$ .

**№2.** Найдите наименьшее значение параметра  $a$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} (x - a\sqrt{3})^2 + y^2 - 2y = 0, \\ \sqrt{3}|x| - y = 4 \end{cases}$$

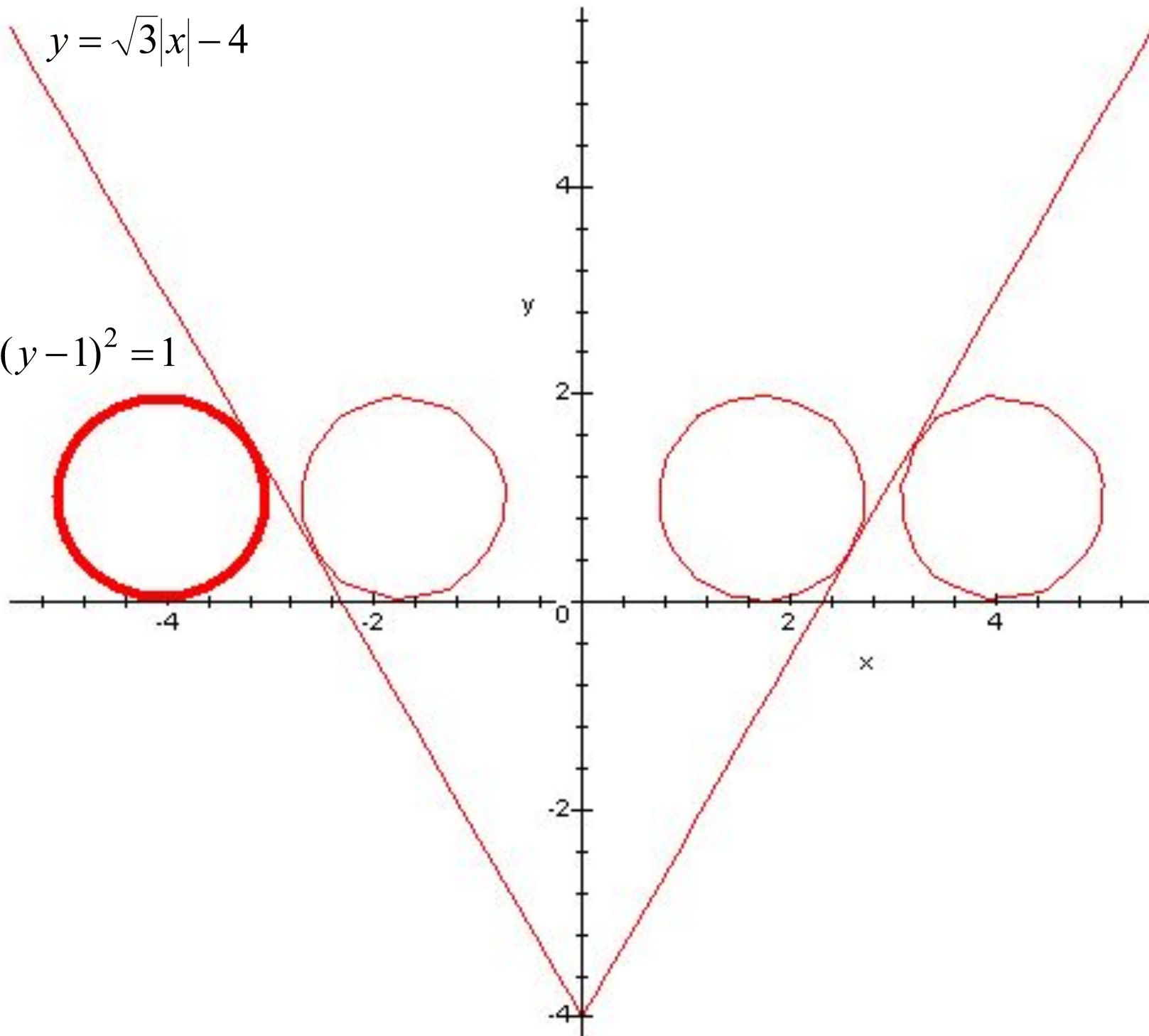
имеет единственное решение.

Ответ:  $-\frac{7}{3}$ .



$$y = \sqrt{3}|x| - 4$$

$$(x - a\sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 1$$



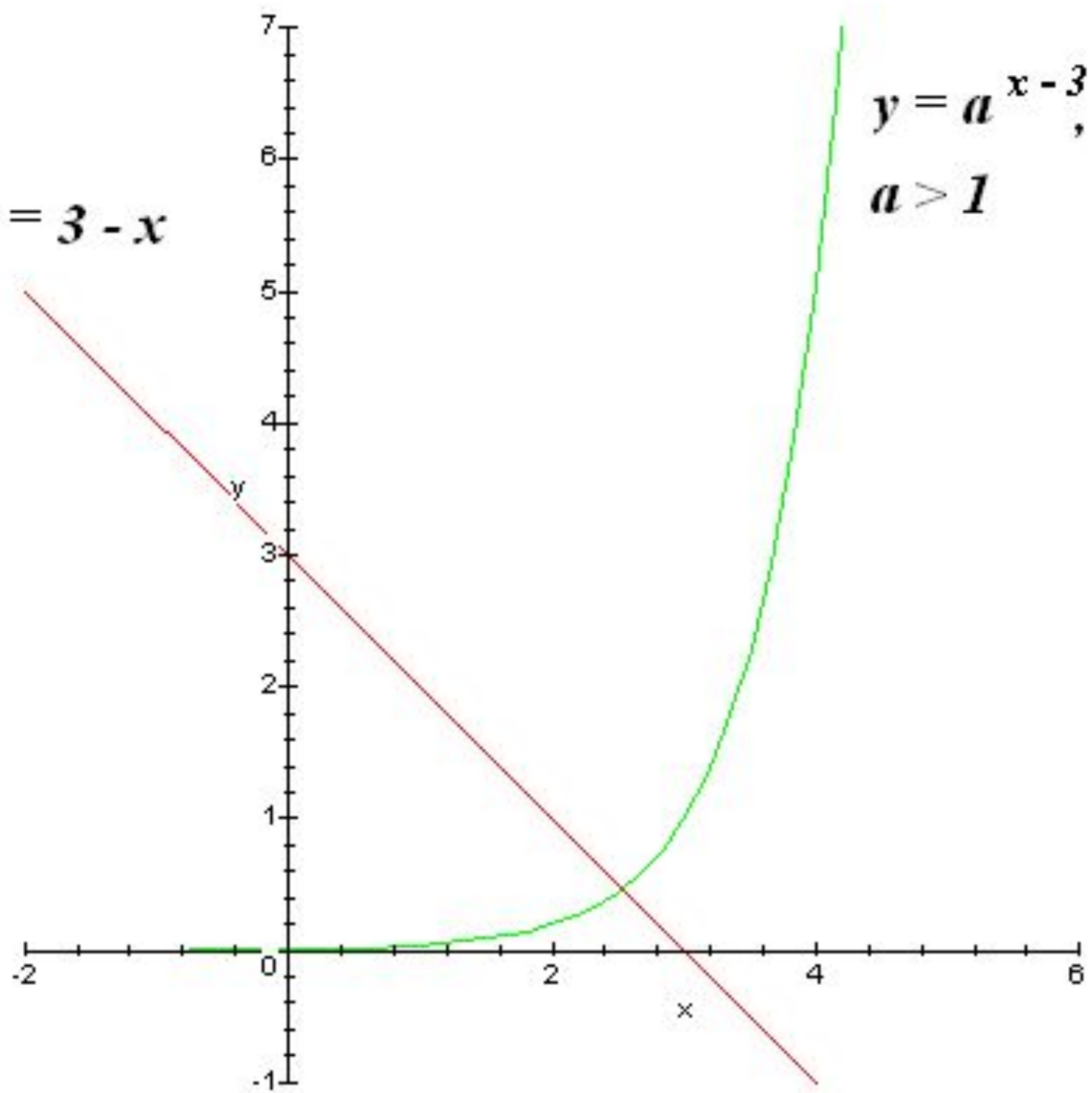
**№3.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система:

$$\begin{cases} \log_a(x + y - 1) = x - 3, \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ:  $a = e^{-\frac{1}{e}}$  или  $a > 1$ .

$$y = 3 - x$$



$$y = a^{x-3},$$
$$a > 1$$

