Семинар 1. Основные понятия теории колебаний

1.1. Понятия о колебаниях

Пусть состояние системы в каждый момент времени дописывается некоторым набором параметров.

Возьмем один из числовых параметров системы u.

Рассмотрим изменение этого параметра во времени t .

Это изменение может быть монотонным, немонотонным, существенно немонотонным (рис. 1).

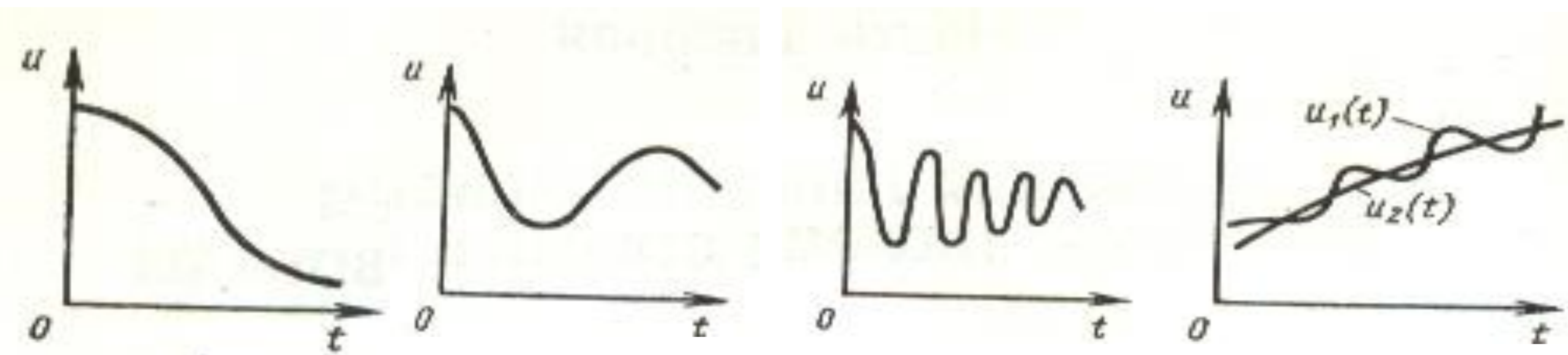


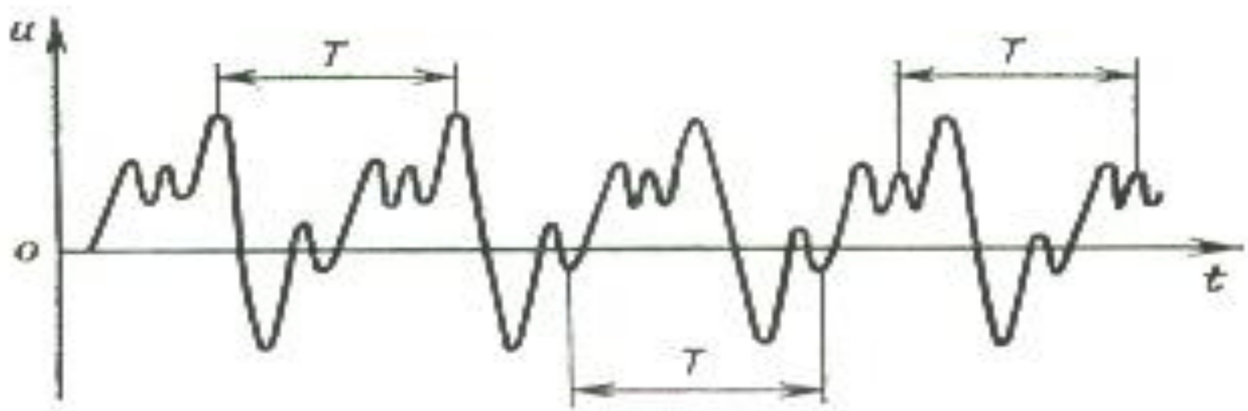
Рис. 1. Изменение параметра $u(t)$:
а) монотонное б) немонотонное в, г) существенно немонотонное

1.4. Кинематические характеристики периодических колебательных процессов

Пусть процесс характеризуется одной скалярной переменной ***u(t)*** (например, ***перемещение***).

Периодические колебания. Колебания называются периодическими, если любые значения колеблющейся величины повторяются через равные отрезки времени. .

Более точно, колебания называются периодическими, если существует такое число ***T***, что для любого ***t*** выполняется условие (рис. 2) $\boldsymbol{u(t + T) = u(t)}$**.** Наименьшее из этих значений называется ***периодом колебаний***.



Обозначим его через T. Величина, обратная периоду колебаний, называется ***частотой колебаний***: $f = 1/T$.

В технике период колебаний обычно измеряется ***в секундах***; частота f, следовательно, имеет размерность ***1/с*** ***(с⁻¹)***

В теоретические формулы входит величина, называемая ***угловой (циклической) частотой***

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad (3)$$

Она также измеряется в ***с***$^{-1}$. Эта частота равна числу периодов колебаний, которые укладываются на отрезке времени продолжительностью 2π с.

Необходимо остерегаться смешения частот f и ω

Частоту f обычно измеряют в герцах (Гц).

Для угловой частоты наряду с размерностью ***с***$^{-1}$ часто используют размерность ***рад/с***.

Гармонические колебания. Простейшим (и наиболее важным) видом периодических колебаний являются ***гармонические (синусоидальные)*** колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется во времени по закону

$$u(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

A, ω, φ - постоянные параметры.

Параметр $\boldsymbol{A}$ равен наибольшему значению колеблющейся величины и называется ***амплитудой***.

φ называется ***начальной фазой колебаний***.

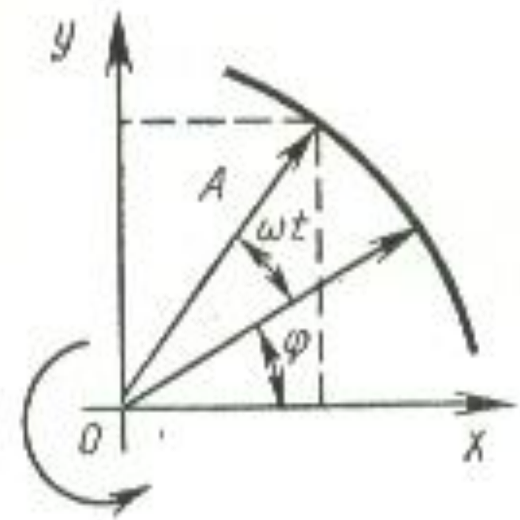
$\omega t + \varphi$ называется фазой колебаний в момент времени $\boldsymbol{t}$.

ω является угловой частотой.

Период гармонических колебаний выражается через угловую частоту:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5)$$

Для наглядного представления гармонических колебаний можно использовать круговую диаграмму (рис. 3).



Для этого на плоскости вводится вектор длиной $\boldsymbol{A}$, который вращается с постоянной угловой скоростью, равной ω

Начальное положение вектора задается углом . φ

Проектируя конец вектора на вертикальную ось, получим закон движения в форме (4).

Скорость при гармонических колебаниях

$$v = \frac{du}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

а ускорение

$$w = \frac{d^2u}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

Скорость ***v(t)*** и ускорение ***w(t)*** при гармонических колебаниях также изменяются во времени по синусоидальному закону с той же частотой, что и перемещение ***u(t)***.

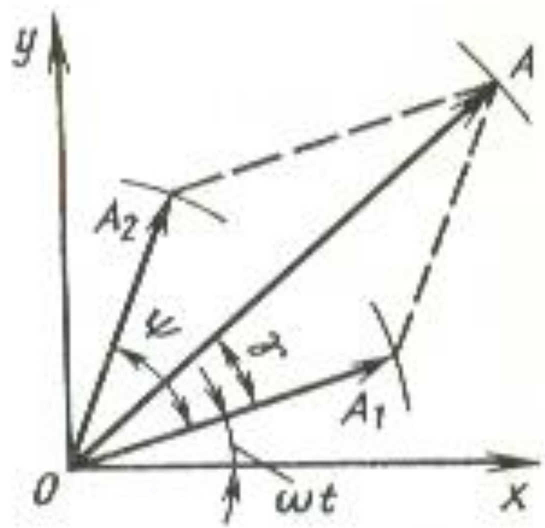
Амплитуды скорости и ускорения равны соответственно ωA и $\omega^2 A$

В технической литературе перемещение, скорость и ускорение при колебательном движении называют соответственно ***виброперемещением, виброскоростью и виброускорением***.

Сумма двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами будет гармоническим колебанием с той же частотой:

$$A_1 \cos \omega t + A_2 \cos(\omega t + \psi) = A \cos(\omega t + \gamma) \quad (8)$$

Амплитуда и фаза результирующих колебаний могут быть найдены, например, из круговой диаграммы (рис. 4):



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\psi} \;;$$

$$tg\gamma = \frac{A_2 \sin\psi}{A_1 + A_2 \cos\psi} \qquad (9)$$

Полигармонические колебания. Полигармоническими называют колебания, которые могут быть представлены в виде суммы двух или более гармонических колебаний с частотами (периодами), находящимися между собой в рациональном соотношении.

Пример: колебательный процесс, являющийся суммой двух гармонических процессов

$$u(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t \quad (10)$$

Существенно, чтобы отношение частот было рациональным числом.

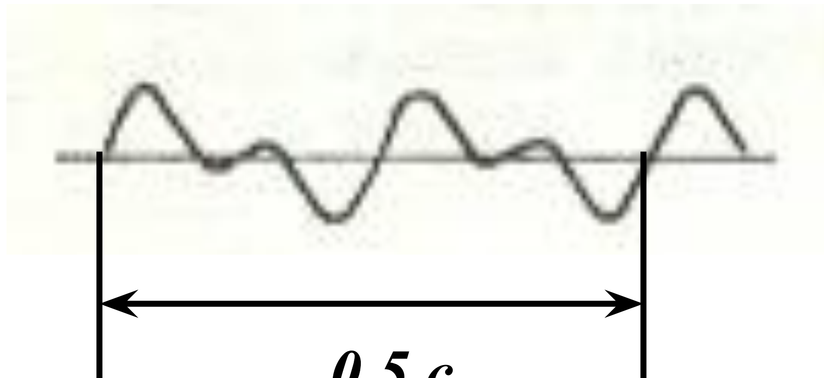
Пусть $\omega_1 = m\omega$, $\omega_2 = n\omega$ выражаются через некоторую частоту ω, где ***m*** и ***n*** - целые числа, причем ***m/ n*** - несократимая дробь.

Тогда сумма (10) будет периодической функцией с периодом $2\pi / \omega$

Примеры полигармонических колебаний.

Пример 1

$$u(t) = A_1 \cos m\omega t + A_2 \cos n\omega t \qquad (10)$$

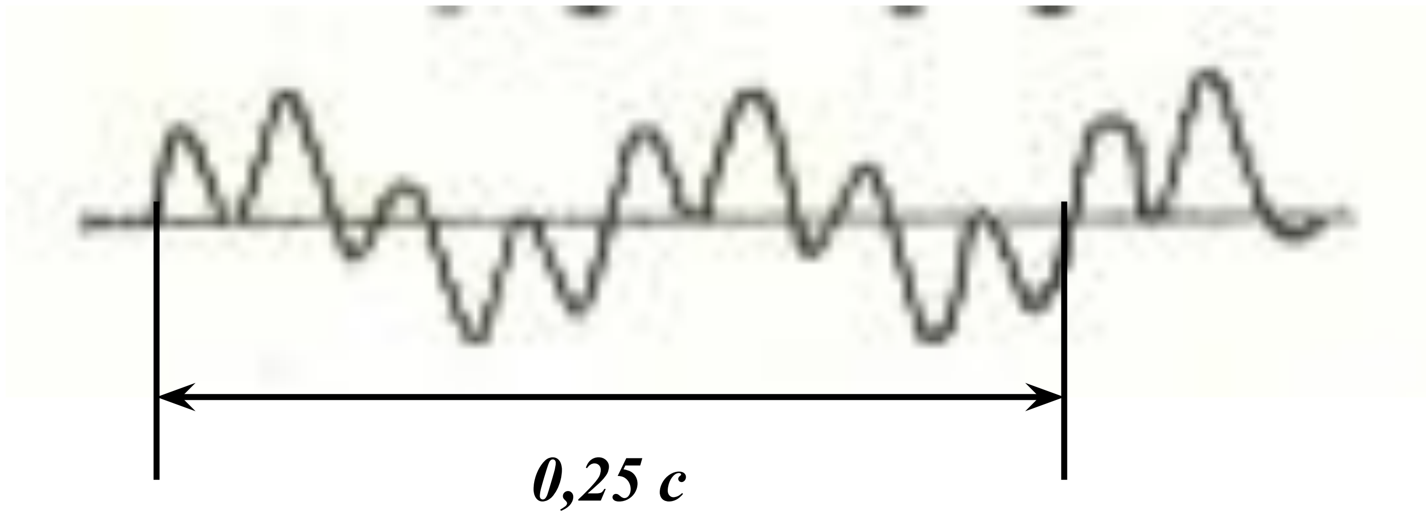


***m* = 1** f_1 = **4 Гц**

***n* = 2** f_2 = **8 Гц**

Пример 2

$$u(t) = A_1 \cos m\omega t + A_2 \cos n\omega t \quad (10)$$



$m = 1$, $f_1 = 8$ Гц

$n = 4$, $f_2 = 32$ Гц

Пример 3

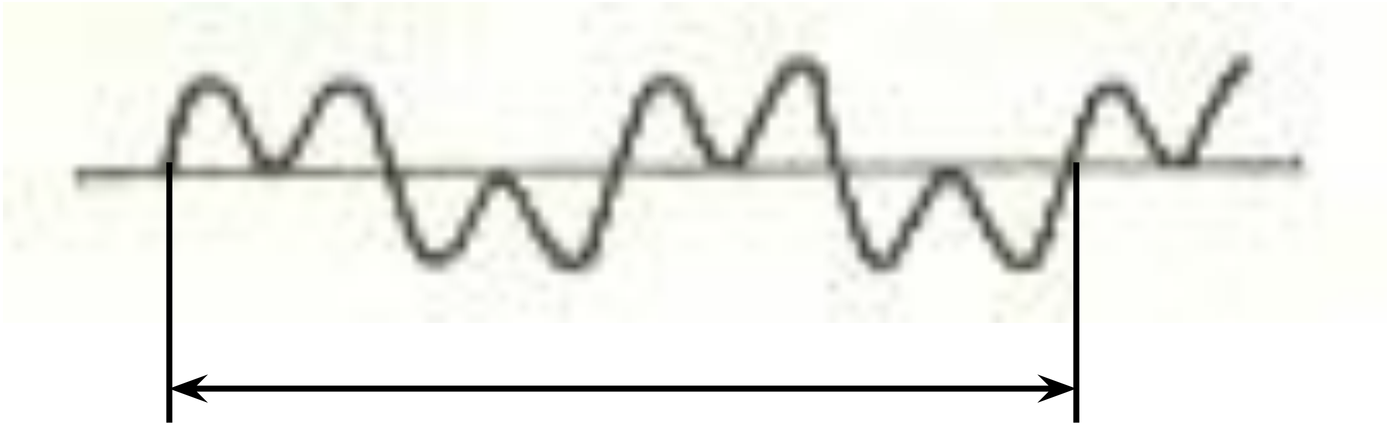
$$u(t) = A_1 \cos m\omega t + A_2 \cos n\omega t \quad (10)$$

***m* = 1**
***n* = 6**

***f_1* = 1 Гц**
***f_2* = 6 Гц**

Пример 4

$$u(t) = A_1 \cos m\omega t + A_2 \cos n\omega t \quad (10)$$



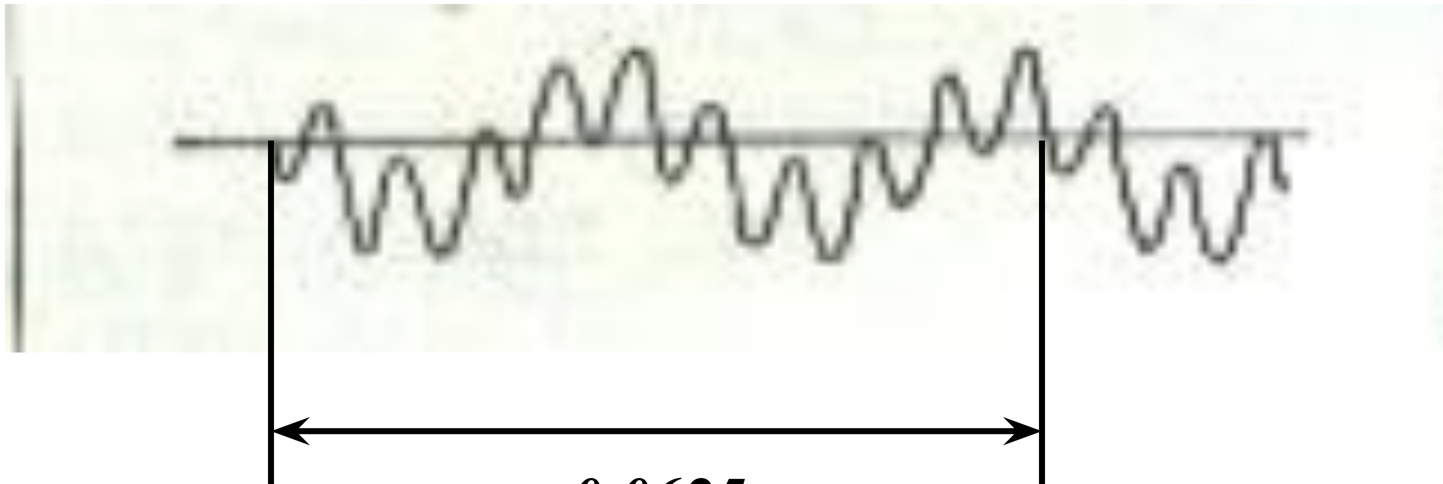
0,25 c

m = 1
n = 3

$f_1 = 8$ ***Гц***
$f_2 = 24$ ***Гц***

Пример 5

$$u(t) = A_1 \cos m\omega t + A_2 \cos n\omega t \quad (10)$$



m = ***1***

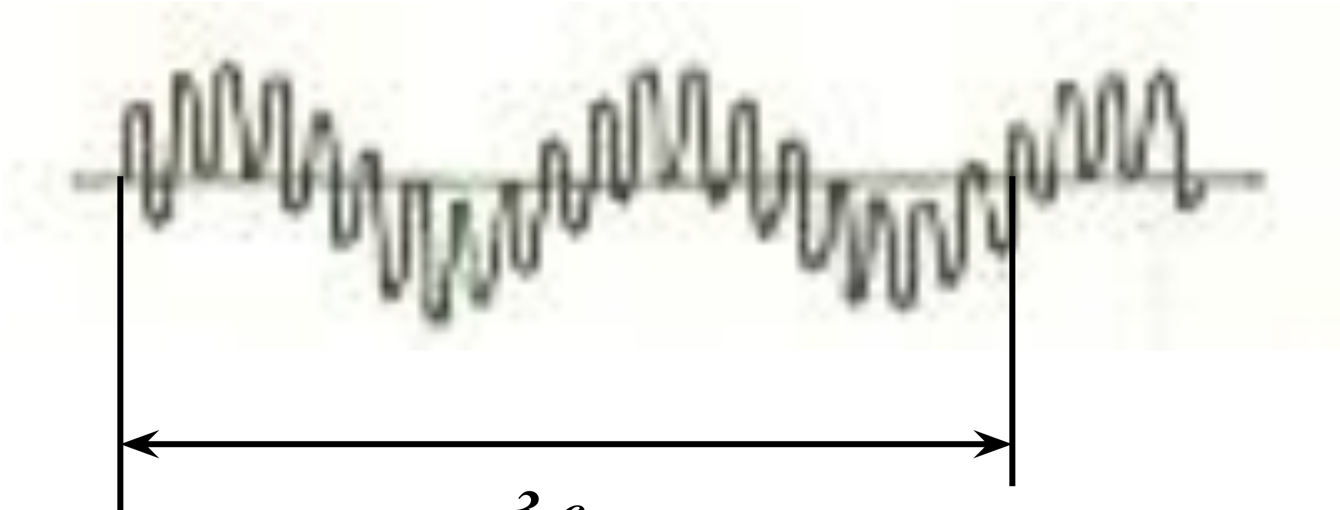
n = ***5***

$f_1 =$ ***32 Гц***

$f_2 =$ ***160 Гц***

Пример 6

$$u(t) = A_1 \cos m\omega t + A_2 \cos n\omega t \quad (10)$$



3 с

$m = 1$ $\qquad$ $f_1 = 0,67$ Гц

$n = 10$ $\qquad$ $f_2 = 6,7$ Гц