Лекция 15-16
Динамический расчет ферм

Содержание

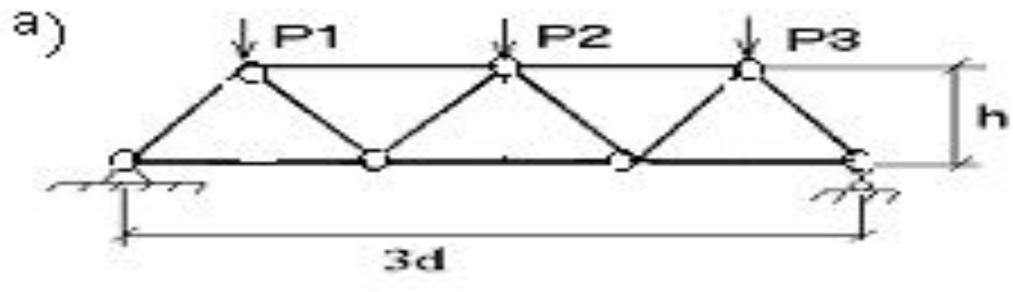
1. Свободные колебания ферм
2. Вынужденные колебания ферм при вибрационной нагрузке
3. Динамический коэффициент
4. Пример динамического расчета фермы

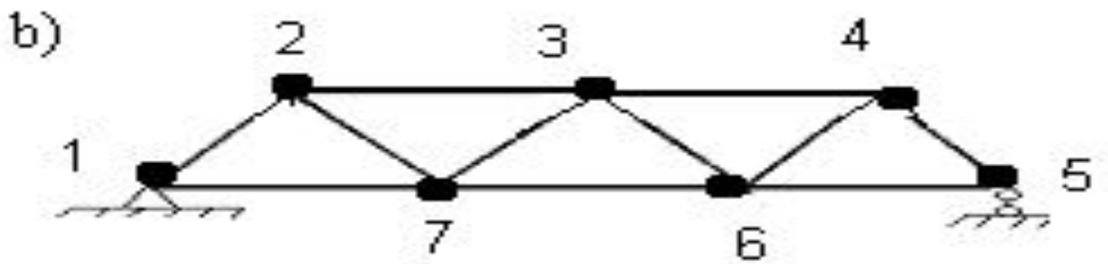
Динамическая степень свободы

$$n=2У-C_0,$$

где У – количество узлов, в которых распределены массы фермы, C_0 – количество опорных связей, примыкающих к узлам с сосредоточенными массами.

Расчетная схема фермы с конечным числом сосредоточенных масс





Уравнение для определения собственных частот

По аналогии с системами с n степенями свободы, записываем канонические уравнения через инерционные силы. Полагая определитель системы равным нулю, получаем характеристическое уравнение относительно неизвестного значения частоты свободных колебаний ω ($\omega_{1,}$ ω_2 ,… ω_n). Обозначим параметр $\lambda=1/\omega^2$, тогда вековое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}-\lambda) & m_2\delta_{12} & \dots & m_n\delta_{1n} \\ m\delta_{21} & (m_2\delta_{22}-\lambda) & \dots & m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots & (m_n\delta_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Узловые перемещения

Вырежем из фермы любой узел k и рассмотрим его равновесие. Каждый соседний с ним узел обозначим индексом i, который при записи канонических уравнений будет принимать конкретные обозначения соседних узлов. Пусть перемещение узла k по горизонтали будет x_k, а по вертикали - y_k.

Усилия в стержнях вырезанного узла фермы от статической нагрузки или самоуравновешаны, если в узле нет нагрузки или находятся в равновесии с узловой нагрузкой, если она есть.

Поэтому как заданные статические нагрузки, так и вызываемые ими усилия стержней фермы из рассмотрения исключаются.

Будут рассматриваться лишь дополнительные усилия N_{ki}, появляющиеся в стержнях при колебаниях ферм, и инерционные силы -

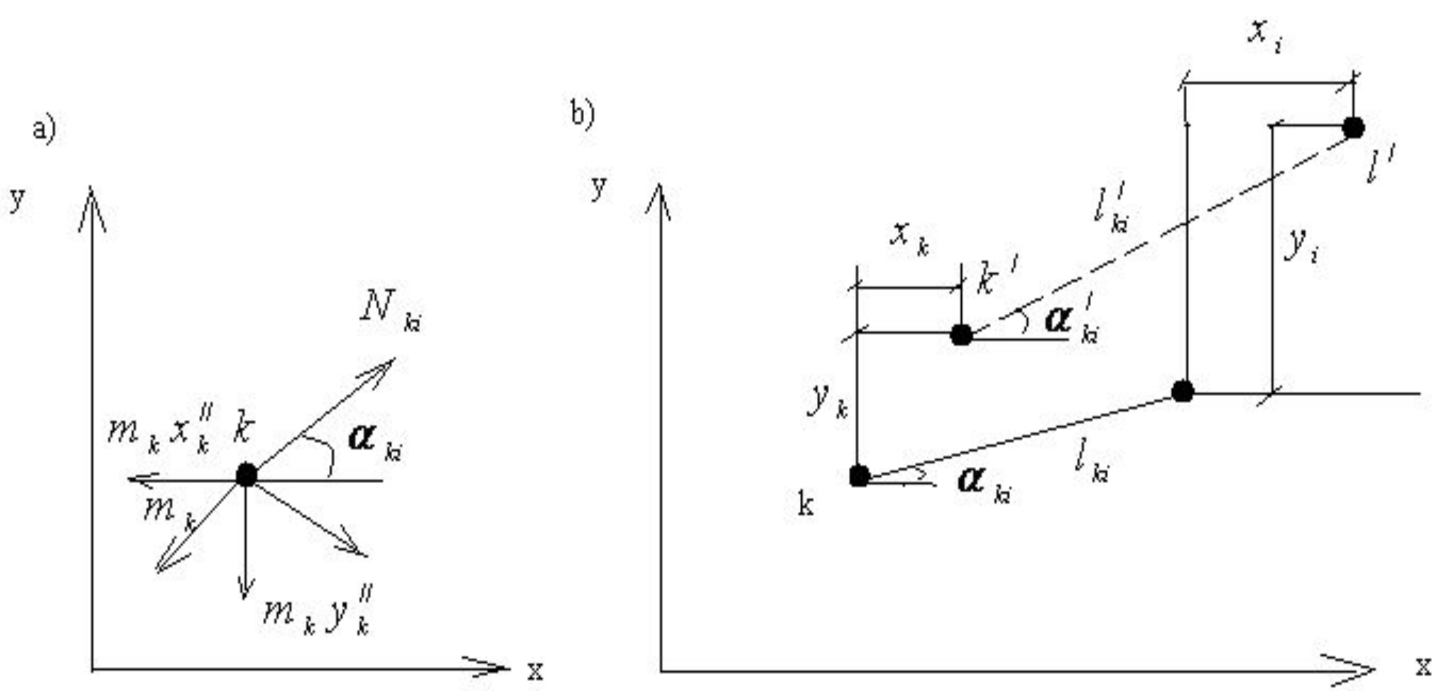
$$m_k x_k^{//}, \qquad m_k y_k^{//}$$

Уравнения динамического равновесия при свободных колебаниях

$$m_k x_k^{//} = \sum N_{kt} Cos \alpha_{kt}$$

$$m_k y_k^{//} = \sum N_{kt} Sin \alpha_{kt}$$

Перемещения «k» и «i» узлов



- Перемещение узла i обозначим - x_i, y_i, а новое положение узлов точками - $k^/$ $l^/$, а новая длина стержня ki будет $l^/_{ki}$. Проектируя отрезок $l^/_{ki}$ на координатные оси, получаем:

$$l^/_{ki} Cos\alpha^/_{ki} = l_{ki} Cos\alpha_{ki} + x_i - x_k,$$
$$l^/_{ki} Sin\alpha^/_{ki} = l_{ki} Sin\alpha_{ki} + y_i - y_k$$

$$l^/_{ki} = l_{ki} + \Delta l_{ki}$$

$$(l^/_{ki})^2 = (l_{ki} Cos\alpha_{ki} + x_i - x_k)^2 + (l_{ki} Sin\alpha_{ki} + y_i - y_k)^2$$

$$(l^/_{ki})^2 = l^2{}_{ki} + 2l_{ki}\left[Cos\alpha_{ki}(x_i - x_k) + Sin\alpha_{ki}(y_i - y_k)\right] +$$
$$+ (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2$$

$$(l^/_{ki})^2 + 2l_{ki}\Delta l_{ki} + \Delta l^2_{ki} = l^2{}_{ki} +$$
$$+ 2l_{ki}\left[Cos\alpha_{ki}(x_i - x_k) + Sin\alpha_{ki}(y_i - y_k)\right] +$$
$$+ (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2$$

Пренебрегая в левой части величиной Δl_{ki}^2 **, а в правой части $(x_i\text{-}x_k)^2$ и $(y_i\text{-}y_k)^2$ как величинами малыми по сравнению с остальными, тогда**

$$\Delta l_{ki} = \left[\mathrm{Cos}\alpha_{ki}(x_i - x_k) + \mathrm{Sin}\alpha_{ki}(y_i - y_k)\right]$$

$$N_{ki} = \frac{EA_{ki}\Delta l_{ki}}{l_{ki}} = \frac{EA_{ki}}{l_{ki}}\left[\mathrm{Cos}\alpha_{ki}(x_i - x_k) + \mathrm{Sin}\alpha_{ki}(y_i - y_k)\right]$$

$$m_k x_k^{//} = \sum \frac{EA_{ki}}{l_{ki}}\left[\mathrm{Cos}\alpha_{ki}(x_i - x_k) + \mathrm{Sin}\alpha_{ki}(y_i - y_k)\right]\mathrm{Cos}\alpha_{ki},$$

$$m_k y_k^{//} = \sum \frac{EA_{ki}}{l_{ki}}\left[\mathrm{Cos}\alpha_{ki}(x_i - x_k) + \mathrm{Sin}\alpha_{ki}(y_i - y_k)\right]\mathrm{Sin}\alpha_{ki}$$

$$x_k = a_k \mathrm{Sin}(\omega_i t + \varphi_i), y_k = b_k \mathrm{Sin}(\omega_i t + \varphi_i),$$

$$x_k^{//} = -\omega_i^2 x_k, \qquad y_k^{//} = -\omega_i^2 y_k$$

Вынужденные колебания ферм при вибрационной нагрузке

Канонические уравнения вынужденных колебаний ферм при вибрационной нагрузке $P=P_0 \sin\theta t$ аналогично тем, которые были записаны для рам. Подставляя амплитудные значения инерционных сил, можно канонические уравнения представить в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитудных значений инерционных сил Z_1, Z_2,… Z_n.

Канонические уравнения

$$Z_1(\delta_{11} - \frac{1}{m_1\theta^2}) + Z_2\delta_{12} + ... + Z_n\delta_{1n} + P_o\delta_{1p} = 0,$$

$$Z_1\delta_{21} + Z_2(\delta_{22} - \frac{1}{m_2\theta^2}) + ... + Z_n\delta_{2n} + P_o\delta_{2p} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

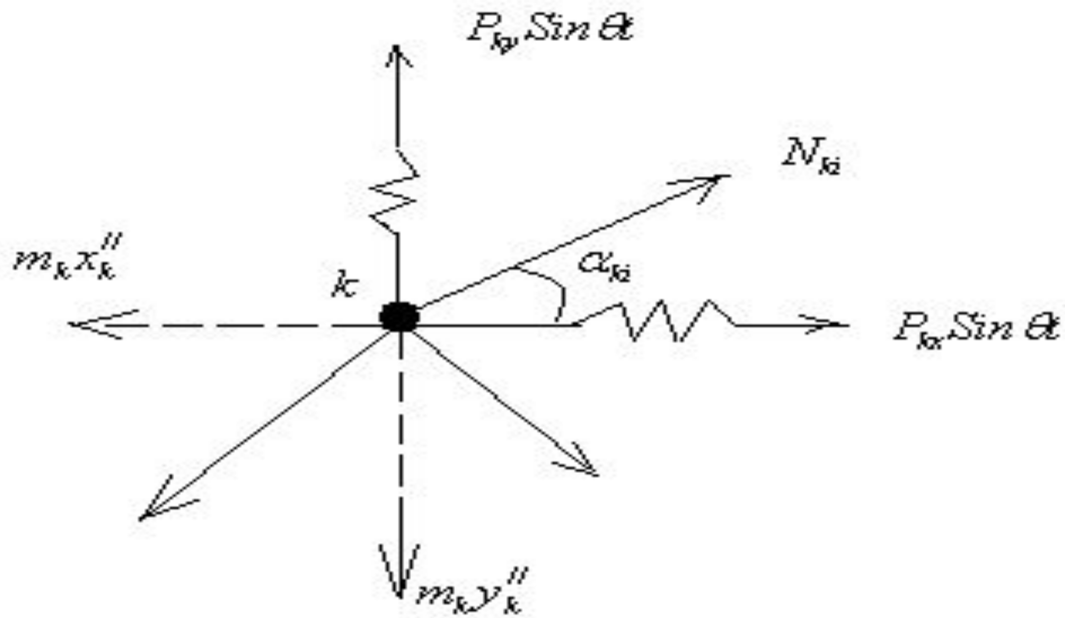
$$Z_1\delta_{n1} + Z_2\delta_{n2} + ... + Z_n(\delta_{nn} - \frac{1}{m_n\theta^2}) + P_o\delta_{np} = 0$$

$$\delta_{11}^{*} = \delta_{11} - \frac{1}{m_1\theta^2}; \qquad \delta_{22}^{*} = \delta_{22} - \frac{1}{m_2\theta^2}; \qquad \delta_{nn}^{*} = \delta_{nn} - \frac{1}{m_n\theta^2}.$$

$$\begin{aligned}
&Z_1\delta^{*}{}_{11} + Z_2\delta_{12} + \ldots + Z_n\delta_{1n} + P_o\delta_{1p} = 0,\\
&Z_1\delta_{21} + Z_2\delta^{*}{}_{22} + \ldots + Z_n\delta_{2n} + P_o\delta_{2p} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&Z_1\delta_{n1} + Z_2\delta_{n2} + \ldots + Z_n\delta^{*}{}_{nn} + P_o\delta_{np} = 0
\end{aligned}$$

$$Z_{kx} = m_k\theta^2 x_k, \qquad Z_{ky} = m_k\theta^2 y_k$$

Нагрузки, действующие на узел k



Уравнения динамического равновесия

$$m_k x_k^{//} = -m_k \theta^2 x_k = \sum N_{ki} Cos\alpha_{ki} + P_{kx} Sin\theta t,$$
$$m_k y_k^{//} = -m_k \theta^2 y_k = \sum N_{ki} Sin\alpha_{ki} + P_{ky} Sin\theta t$$

$$\sum \frac{EA_{ki}}{l_{ki}} \left[Cos\alpha_{ki}(x_i - x_k) \quad + Sin\alpha_{ki}(y_i - y_k) \right] Cos\alpha_{ki} + m_k \theta^2 x_k + P_{kx} Sin\theta t = 0,$$
$$\sum \frac{EA_{ki}}{l_{ki}} \left[Cos\alpha_{ki}(x_i - x_k) \quad + Sin\alpha_{ki}(y_i - y_k) \right] Sin\alpha_{ki} - m_k \theta^2 y_k + P_{ky} Sin\theta t = 0$$