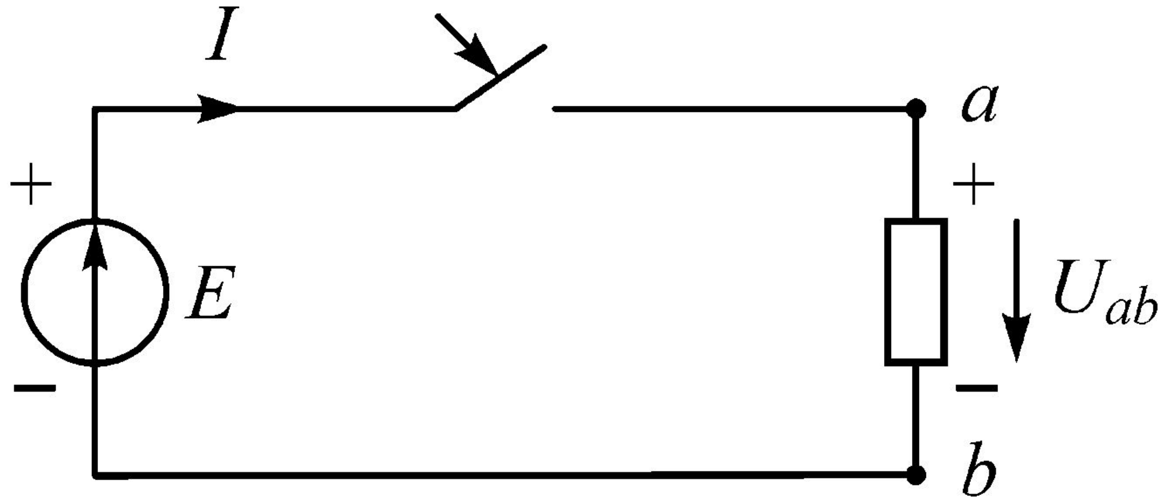
1. Электрические цепи в режиме постоянного тока и гармонических воздействий

Электрическая цепь и ее элементы. Электрическая схема



$$\text{ЭДС} - E\ [\text{В}]. \qquad \text{Ток} - I\ [\text{А}].$$

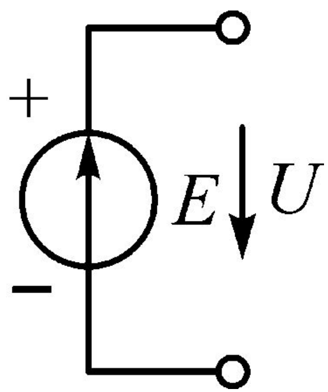
Электрический ток – упорядоченное движение зарядов под действием электрического поля.

$$U_{ab} = U_a - U_b\ [\text{В}].$$

Напряжение – энергия, необходимая для перемещения единицы заряда из одной точки в другую.

Независимые источники электрической энергии

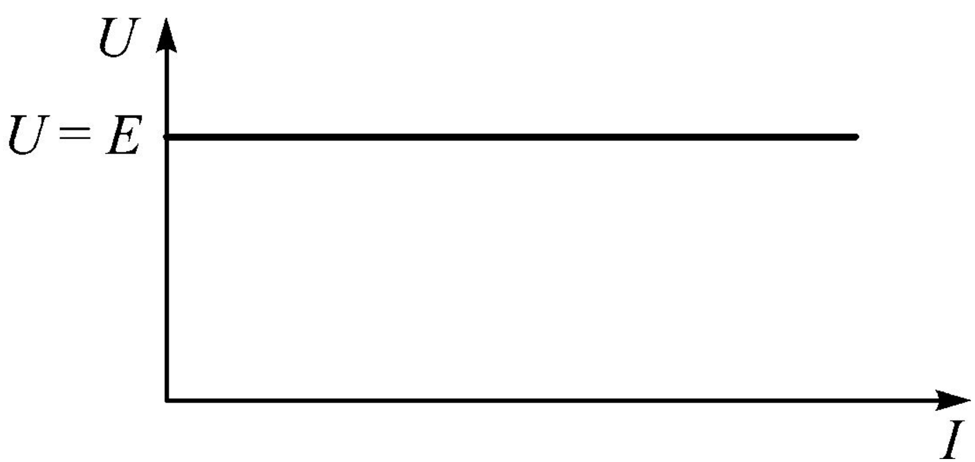
Идеальный источник напряжения



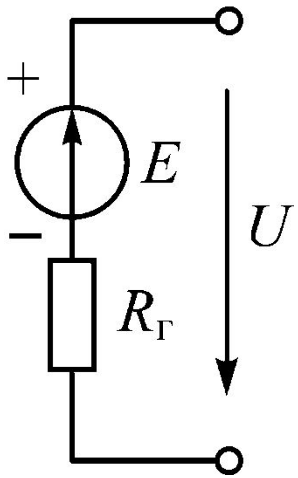
$$\boxed{R_{\Gamma} = 0}$$

$$U_{\Gamma} = E$$

ВАХ



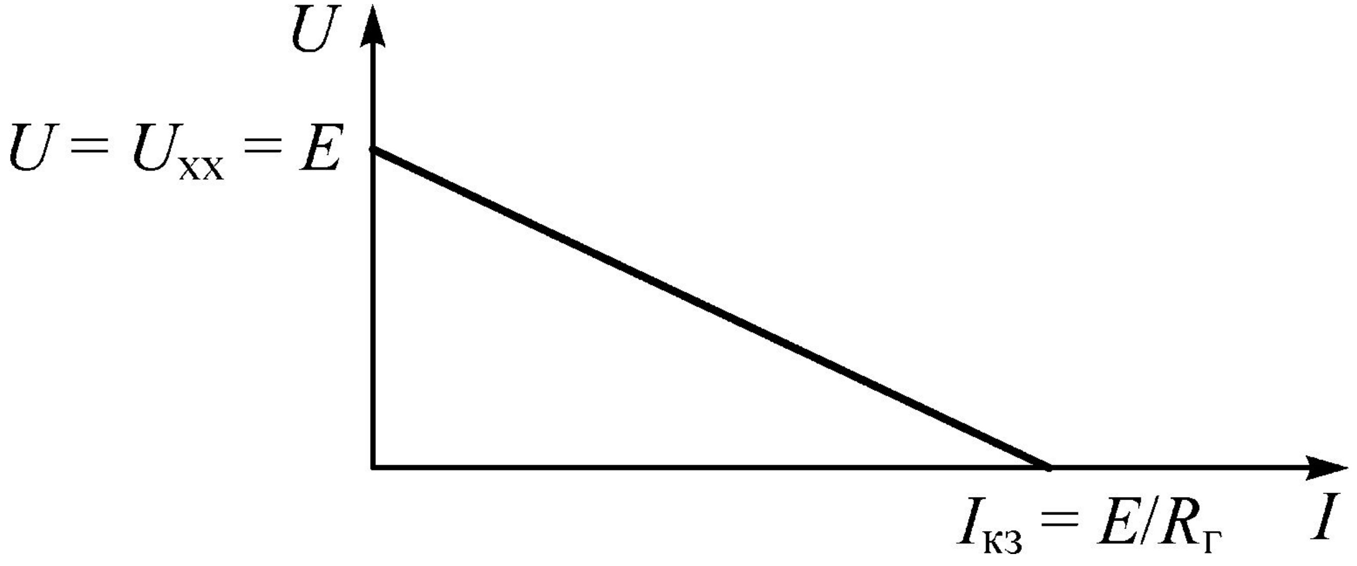
Реальный источник напряжения



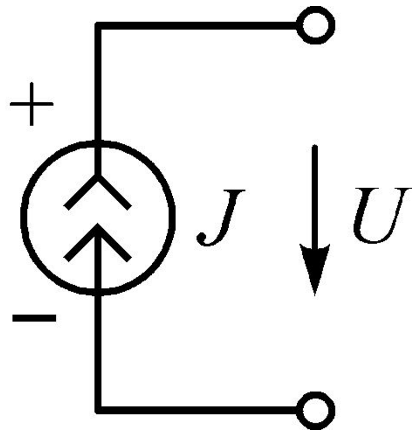
$$\boxed{R_Г \neq 0.}$$

$$U = E - R_Г I.$$

ВАХ



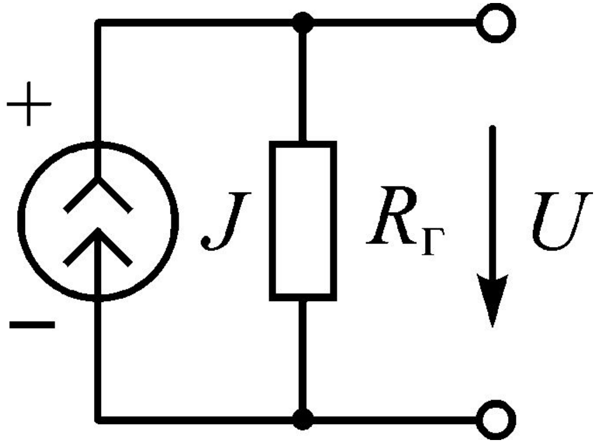
Идеальный источник тока



$$\boxed{R_\Gamma = \infty}$$

$$I = J$$

Реальный источник тока

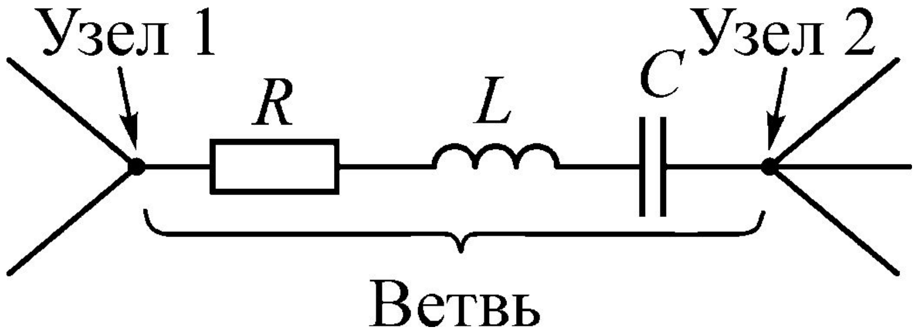


$$\boxed{R_\Gamma \neq \infty.}$$

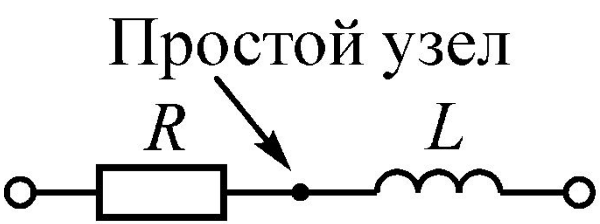
$$I = J - U/R_\Gamma\,.$$

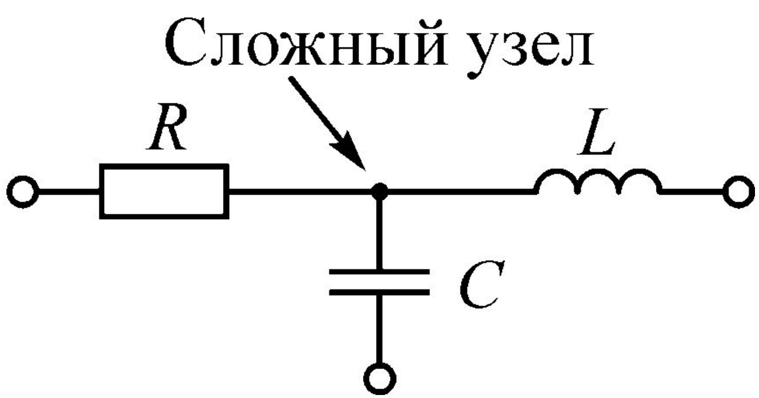
Топологические элементы

Ветвь – один или несколько последовательно соединенных элементов между двумя узлами.

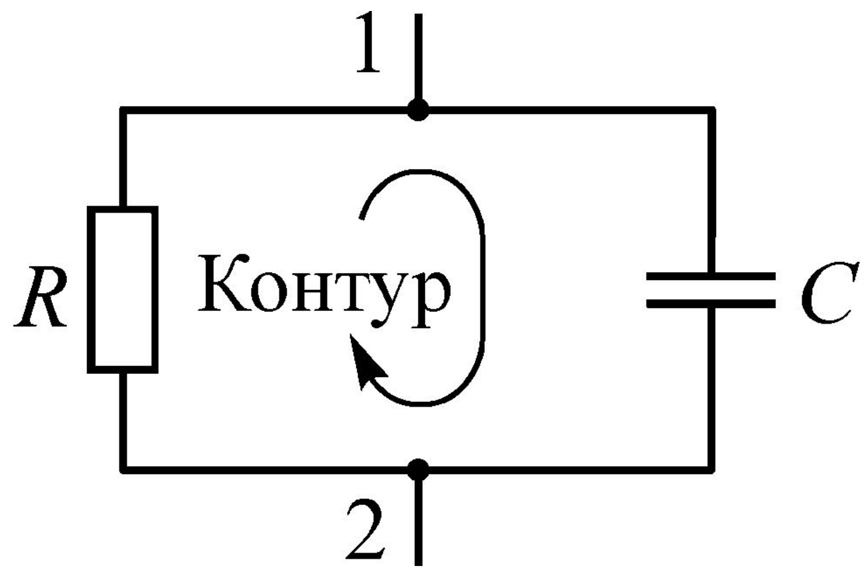


Узел – место соединения двух или более элементов.





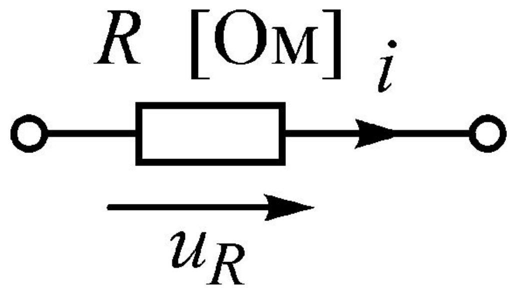
Контур – замкнутый путь, проходящий через несколько ветвей.



Независимый контур – контур, содержащий хотя бы одну новую ветвь.

Нагрузки электрической цепи

Сопротивление

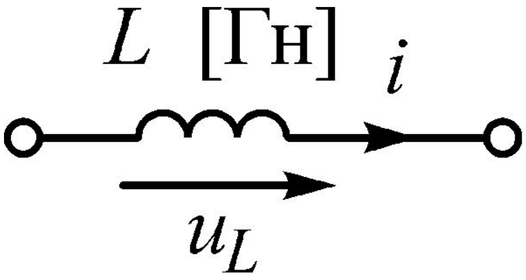


$$\boxed{u_R = Ri}$$

Проводимость

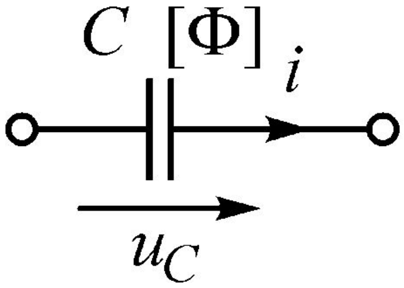
$$G = \frac{1}{R}\ \text{Єм]}\left[\frac{1}{\text{Ом}}\right] = [$$

Индуктивный элемент



$$\boxed{u_L = L\frac{di}{dt}}$$

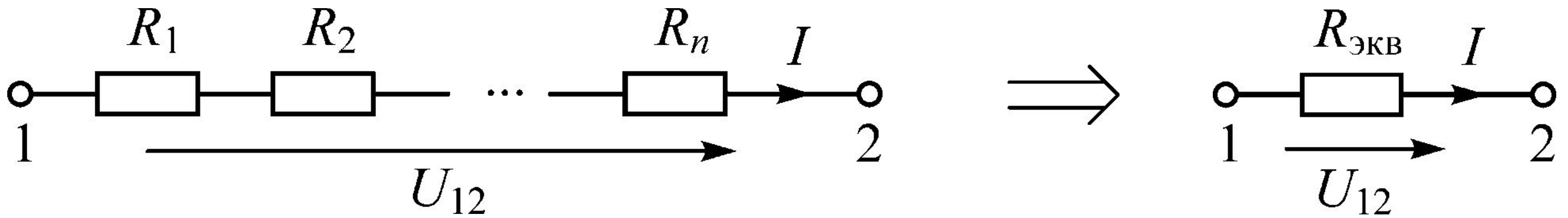
Емкостной элемент



$$\boxed{i = C\frac{du_C}{dt}}$$

Способы соединения нагрузок

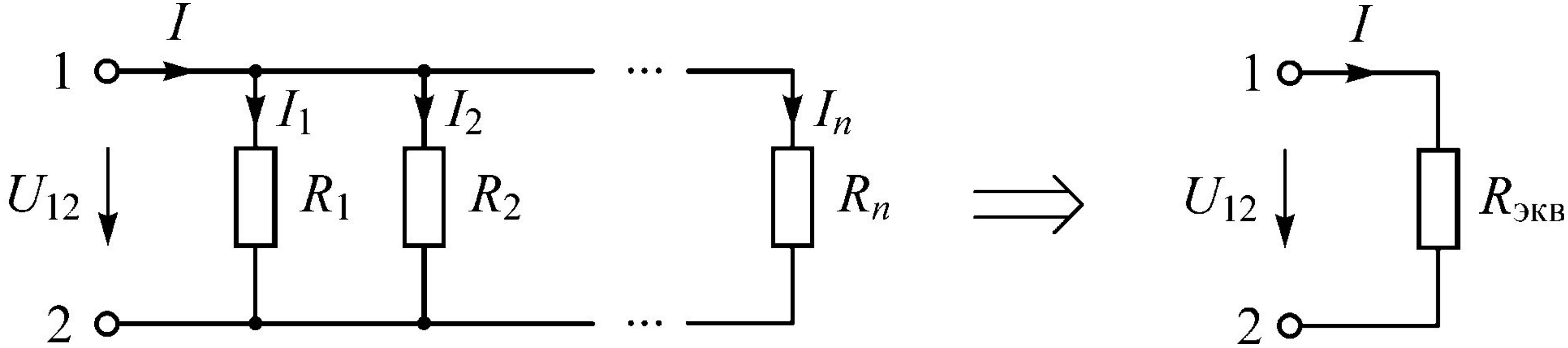
а) Последовательное соединение элементов



$$R_{экв} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i.$$

$$I = \frac{U_{12}}{R_{экв}}.$$

б) Параллельное соединение элементов



$$\frac{1}{R_{экв}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} = \sum_{i=1}^{n} G_i .$$

$$I_i = U_{12} / R_i . \qquad I = I_1 + I_2 + \dots + I_n .$$

в) Смешанное соединение элементов

Способы представления гармонических колебаний

1. Временное представление

$$u(t) = u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$
$$i(t) = i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$u(t), i(t)$ – мгновенные или текущие значения гармонического напряжения и тока;

U_m, I_m – амплитуды (максимальные значения переменного напряжения и тока);

$\theta = \omega t + \varphi_u, \theta = \omega t + \varphi_i$ – текущие фазы напряжения и тока;

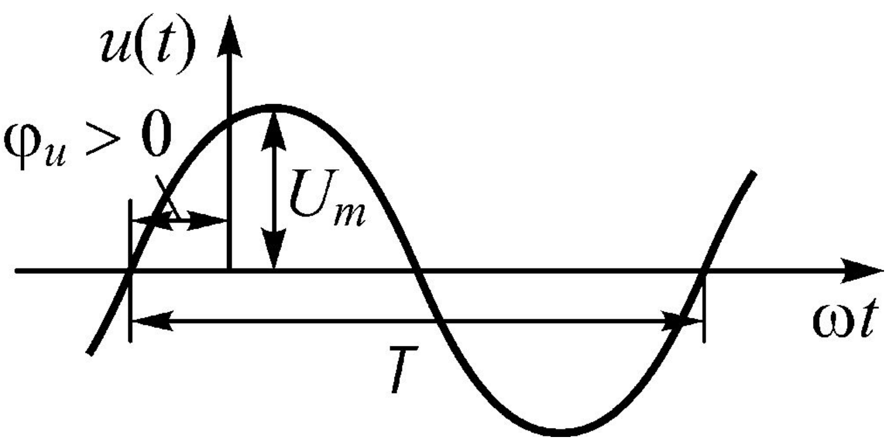
ω – скорость изменения текущей фазы или угловая частота [рад/с]

$$\omega = 2\pi f,$$

$f = \omega/2\pi$ – циклическая частота переменного сигнала [Гц]

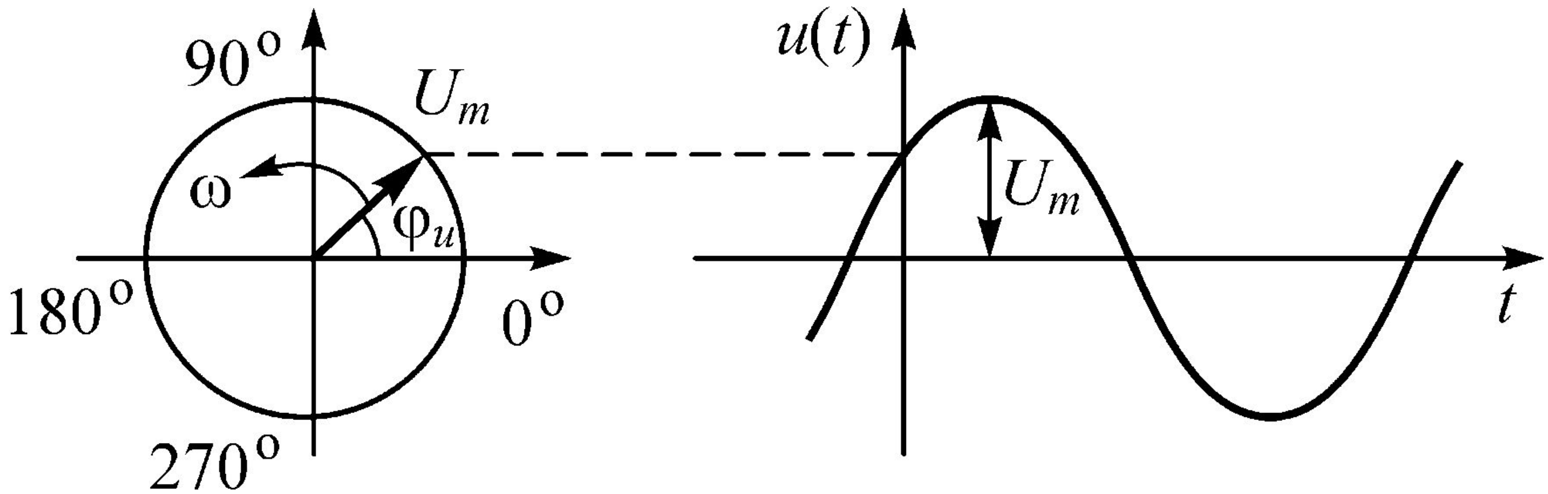
$$f = 1/T;$$

φ_u, φ_i – начальные фазы напряжения и тока.



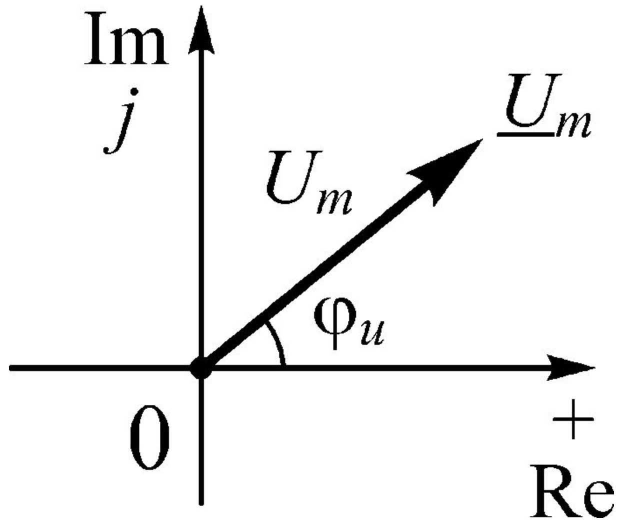
T – период сигнала.

2. Векторное (классическое) представление



3. Символическое (комплексное) представление

$$\sqrt{-1} = j \qquad j^2 = -1$$



$$\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u},$$

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_u},$$

$\dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$ – действующее значение напряжения.

Символический метод расчета

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u}, \qquad \underline{I} = I e^{j\varphi_i},$$

$$\underline{Z}_R = R, \qquad \underline{U}_R = \underline{I} \cdot \underline{Z}_R,$$

$$\underline{Z}_L = jX_L = j\omega L, \qquad \underline{U}_L = \underline{I} \cdot \underline{Z}_L,$$

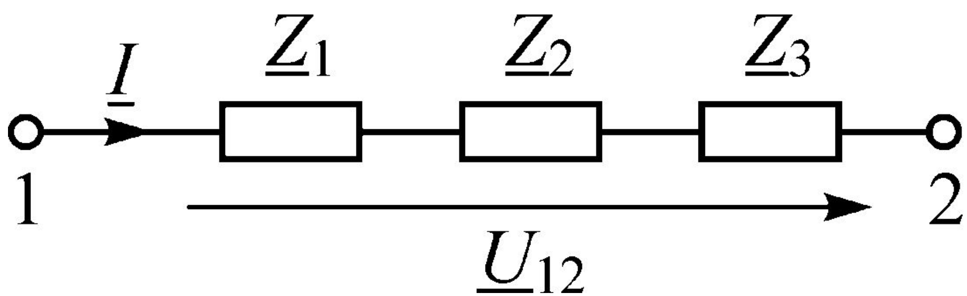
$$\underline{Z}_C = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}, \qquad \underline{U}_C = \underline{I} \cdot \underline{Z}_C,$$

$\underline{Z}_R$, $\underline{Z}_L$, $\underline{Z}_C$ – комплексные сопротивления резистора, индуктивности и емкости.

$X_L = \omega L$, $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – реактивные сопротивления индуктивности и емкости.

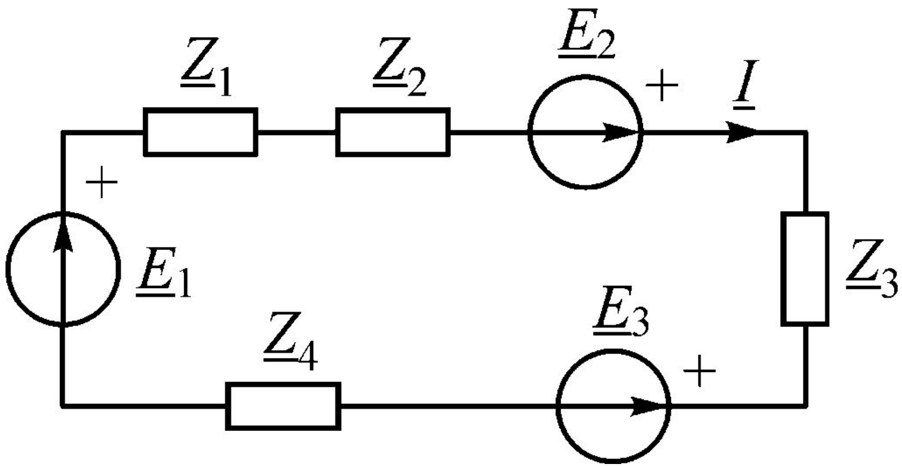
Законы Ома

а) Закон Ома для пассивного участка цепи



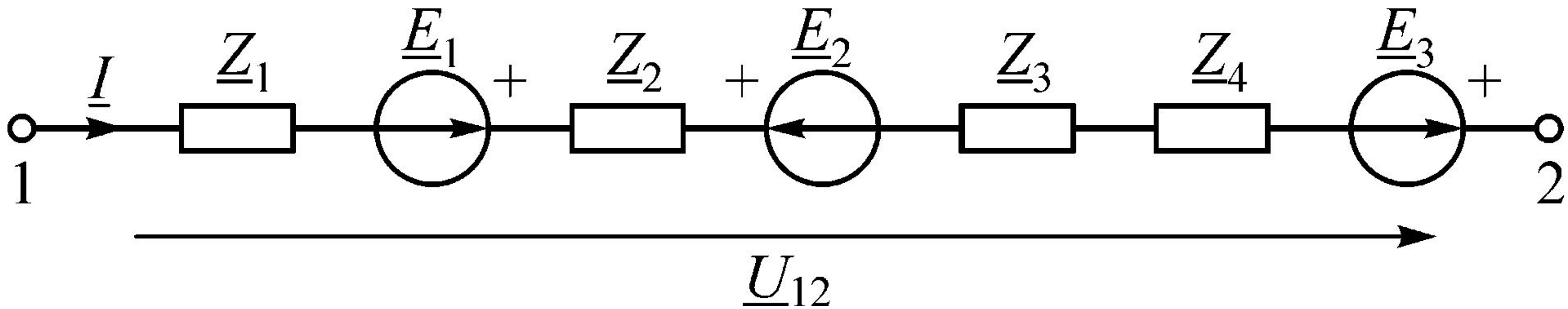
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{12}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{Z}_i}.$$

б) Закон Ома для замкнутой цепи с пассивными и активными элементами



$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_1 + \underline{E}_2 - \underline{E}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \underline{E}_i \ \text{алгеб.}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \underline{Z}_j}.$$

в) Обобщенный закон Ома (для участка цепи с активными и пассивными элементами)

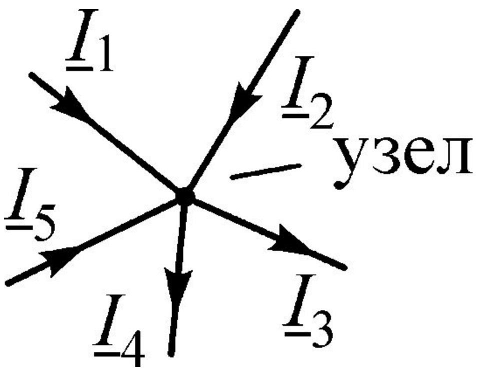


$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{12} + \underline{E}_1 - \underline{E}_2 + \underline{E}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{\underline{U}_{12} + \underset{\text{алгеб.}}{\sum\limits_{i=1}^{k}} \underline{E}_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \underline{Z}_j}.$$

Законы Кирхгофа

1 закон Кирхгофа – закон токов (ЗТК):

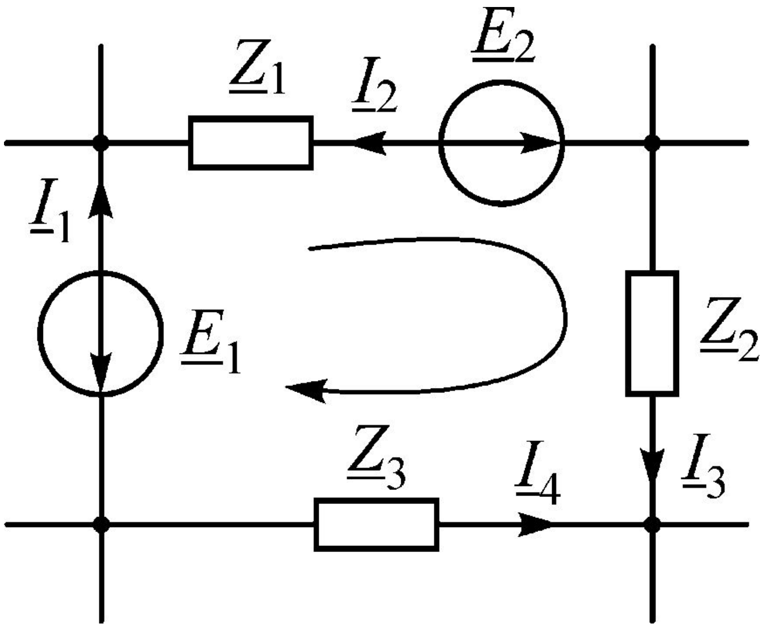
$$\sum_{\substack{i=1 \\ \text{алгебр.}}}^{n} \underline{I}_i = 0$$



$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 - \underline{I}_4 + \underline{I}_5 = 0.$$

2 закон Кирхгофа – закон напряжений (ЗНК):

$$\boxed{\sum_{\substack{i=1 \\ \text{алгебр.}}}^{n} \underline{U}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ \text{алгебр.}}}^{k} \underline{E}_j}$$



$$-\underline{Z}_1\underline{I}_2+\underline{Z}_2\underline{I}_3-\underline{Z}_3\underline{I}_4= \\ =-\underline{E}_1+\underline{E}_2$$

Методы расчета цепей постоянного и переменного тока

1. Метод свертывания.
2. Метод законов Кирхгофа.
3. Метод наложения.
4. Метод контурных токов.
5. Метод узловых напряжений.
6. Метод эквивалентного генератора.

Мощность в цепи переменного тока. Баланс мощностей

1. Мощность источника

Комплексная мощность

$$\underline{S} = \underline{E} \cdot \underline{I}^* = S\cos\varphi_S + jS\sin\varphi_S = P_E + jQ_E,$$

где P – активная мощность источника [Вт],

Q – реактивная мощность источника [ВАР],

S – полная мощность источника [ВА].

2. Мощность нагрузок

а) *Резистор*

$$\underline{S}_R = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = I^2 R = U^2 / R = P \; [\text{Вт}].$$

б) *Индуктивность*

$$\underline{S}_L = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = j \underbrace{I^2 X_L}_{Q_L} = jQ_L \;\; [\text{ВАР}].$$

в) *Конденсатор*

$$\underline{S}_C = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = -j \underbrace{I^2 X_C}_{Q_C} = -jQ_C \;\; [\text{ВАР}].$$

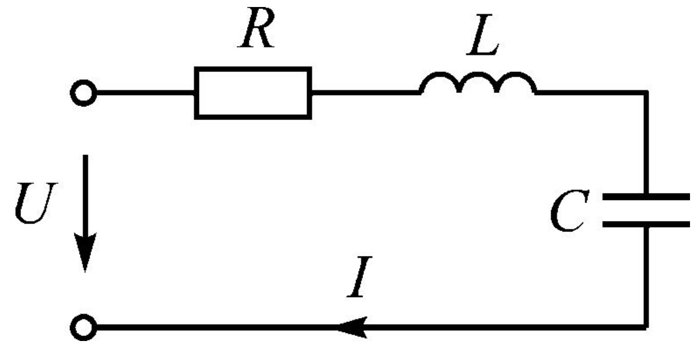
Баланс мощности

$$\underline{S}_{\text{ист}} = \underline{S}_{\text{нагр}}$$

$$P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}} = P_{\text{нагр}} + jQ_{\text{нагр}}$$

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{нагр}}; \quad Q_{\text{ист}} = Q_{\text{нагр}}.$$

Резонанс напряжений в последовательном контуре



Условие резонанса напряжений – равенство нулю эквивалентного реактивного сопротивления

$$X = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0.$$

Резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$ – характеристическое сопротивление.

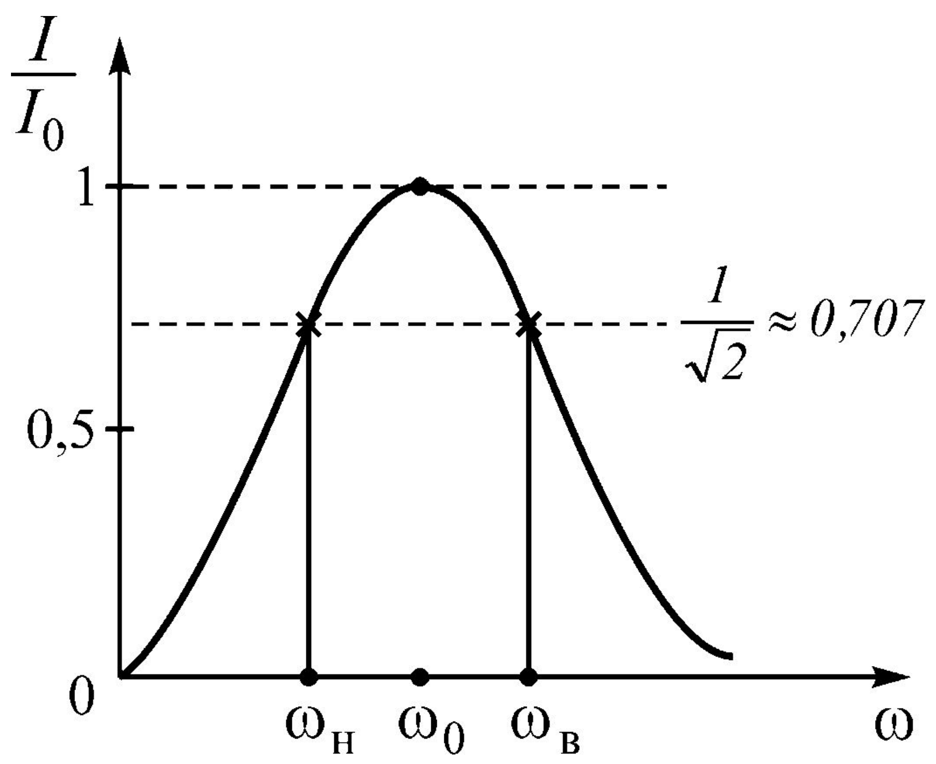
При резонансе $\underline{Z} = R$, ток

$$I = I_0 = U/R.$$

$$U_{L0} = U_{C0} = QU,$$

где $Q = \frac{\rho}{R} = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U}$ – добротность контура.

Полоса пропускания контура



Абсолютная полоса пропускания:

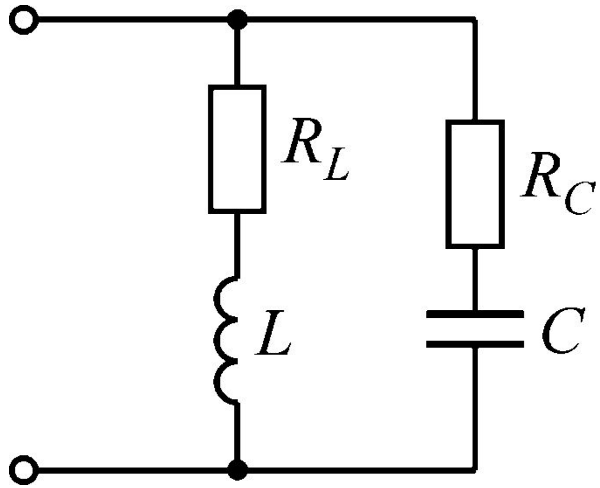
$$S_A = \omega_\text{в} - \omega_\text{н} = \frac{\omega_0}{Q} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$$

или

$$S_A = f_\text{в} - f_\text{н} = \frac{f_0}{Q} = 2\Delta f \; [\text{Гц}]$$

где $\Delta f = f_\text{в} - f_0 = f_0 - f_\text{н}$ – абсолютная расстройка контура.

Резонанс токов в параллельном контуре



Условие резонанса токов – реактивная проводимость всей цепи *B* должна быть равна нулю:

$$\boxed{B = B_L + B_C = 0.}$$

Резонансная частота

$$\omega_{\text{р}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_L^2}{\rho^2 - R_C^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_L^2}{\rho^2 - R_C^2}},$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$.

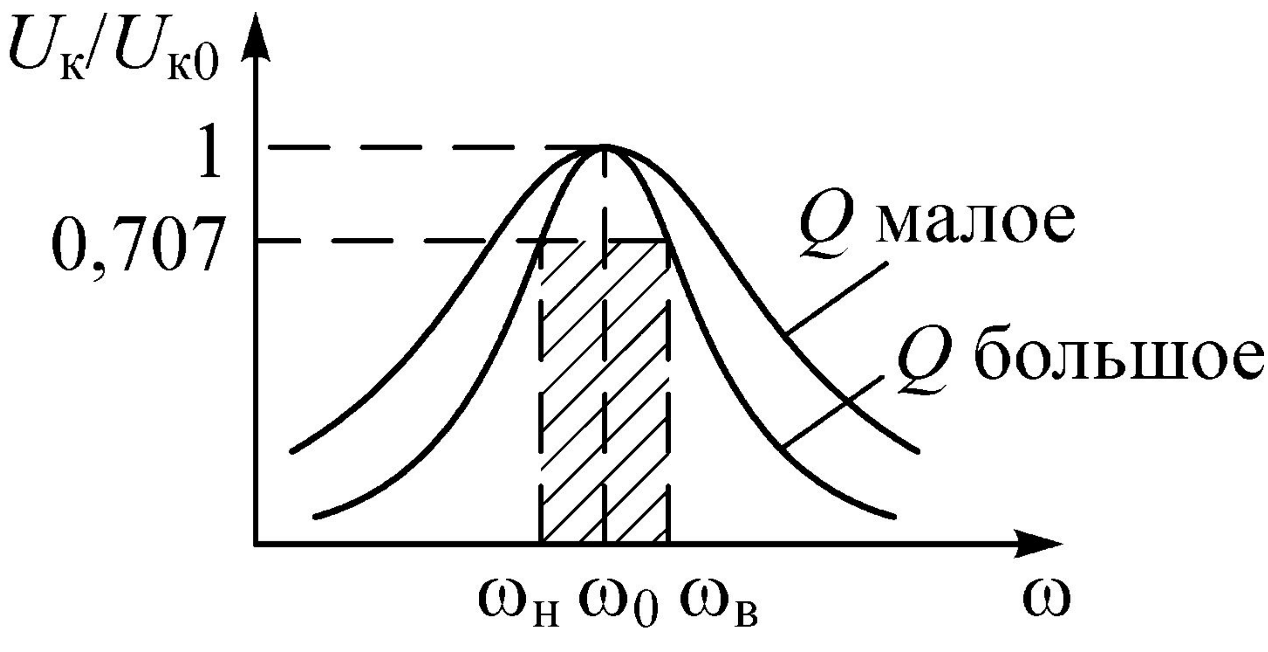
Для высокодобротного контура, у которого

$$Q = \rho/(R_L + R_C) >> 1$$

и $R_C = 0, \quad R_L = R$

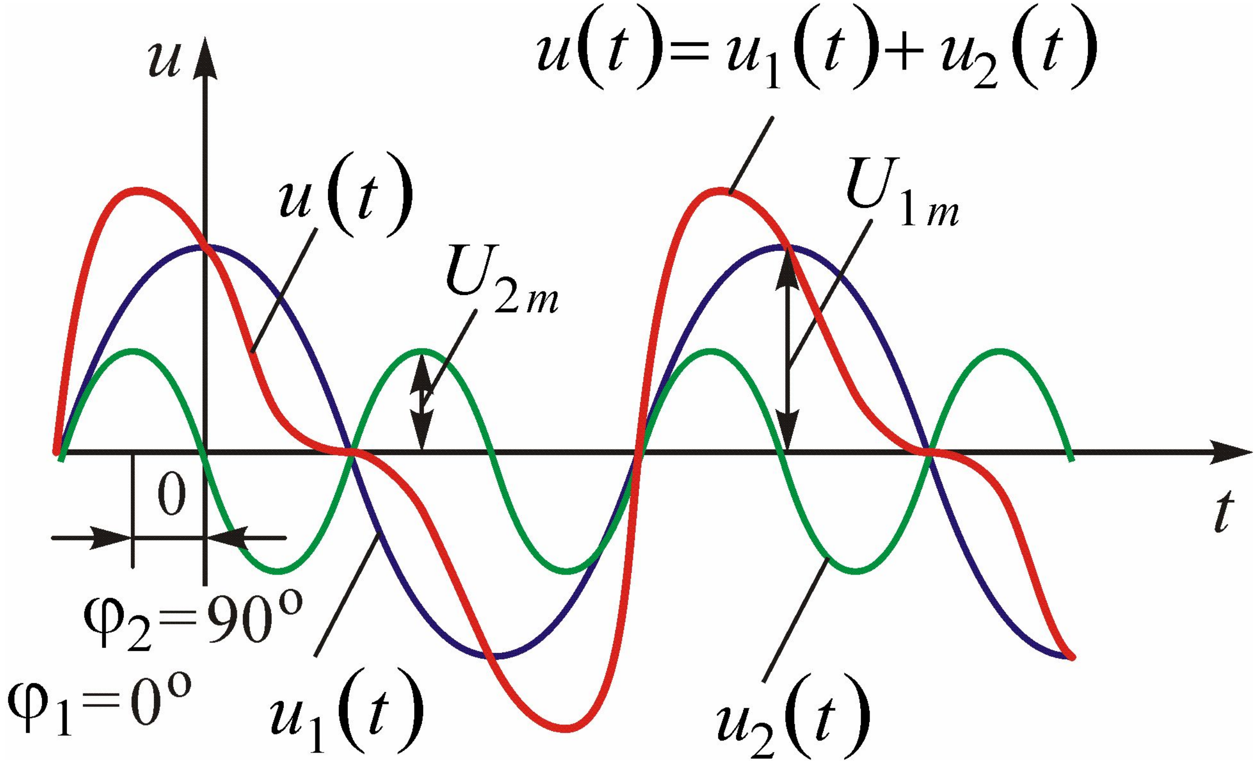
$$\boxed{\omega_{\text{р}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Нормированная частотная характеристика напряжения



2. Линейные электрические цепи в режиме негармонических воздействий

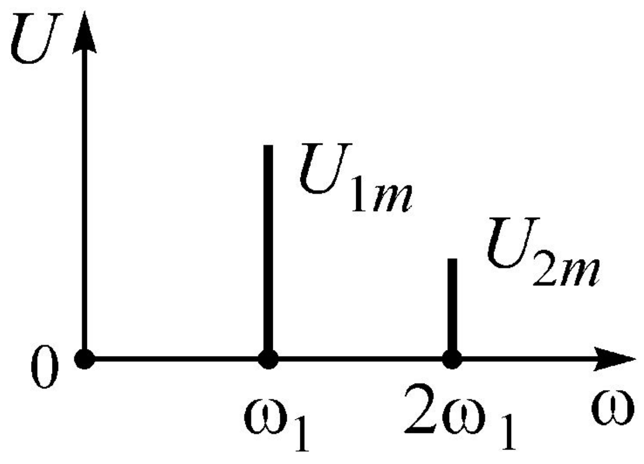
Спектральное представление сигналов

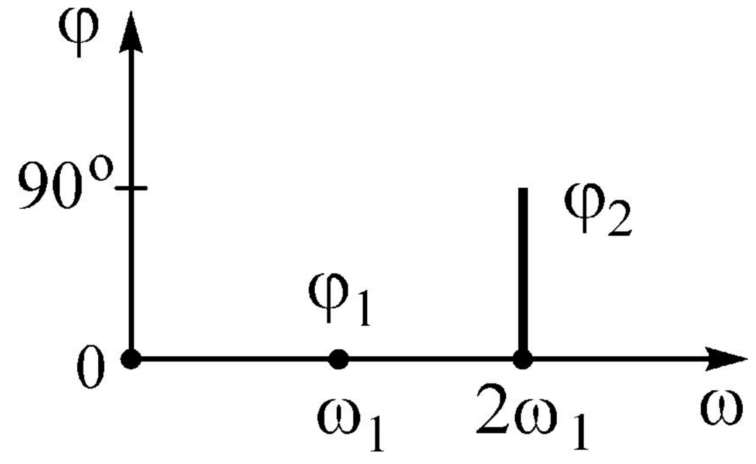


$$\omega_2 = 2\omega_1.$$

$$u(t) = U_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{2m}\cos(2\omega_1 t + \varphi_2).$$

Спектр амплитуд $U(\omega)$ и спектр фаз $\phi(\omega)$ для сигнала $u(t)$





Спектры периодических сигналов

1. Тригонометрическая форма ряда Фурье

а)

$$\boxed{u(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\omega_1 t+b_k\sin k\omega_1 t\right),}$$

$$A_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$$ – постоянная составляющая;

$$A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$ – амплитуда *k*-ой гармоники;

$$\varphi_k=\mathrm{arctg}\frac{b_k}{a_k}$$ – фаза *k*-ой гармоники.

б) $$\boxed{u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k).}$$

2. Комплексная форма ряда Фурье

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{A}_k e^{jk\omega_1 t}.}$$

Анализ спектрального (гармонического) состава периодических сигналов – это вычисление амплитуд U_{mk} и начальных фаз ϕ_k гармонических составляющих ряда Фурье.

Спектры непериодического сигнала

Прямое преобразование Фурье

$$U(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t}dt.$$

позволяет определить спектральную плотность сигнала.

U(*j*ω) – *комплексная спектральная плотность.*

$$U(j\omega)=\left|U(j\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)},$$

|*U*(*j*ω)| – спектральная плотность амплитуд,

ϕ(ω) – спектральная плотность фаз.

Обратное преобразование Фурье

$$\boxed{u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(j\omega)\;e^{j\omega t}d\omega.}$$

позволяет определить сигнал по его спектральной плотности.

Переходные процессы в линейных электрических цепях

Законы коммутации

<u>1-ый закон коммутации</u>

$$\boxed{i_L(0_+) = i_L(0_-).}$$

<u>2-ой закон коммутации</u>

$$\boxed{u_C(0_+) = u_C(0_-).}$$

Классический метод анализа переходных процессов

– решение дифференциального уравнения относительно тока или напряжения в цепи.

Для составления такого уравнения используются законы Кирхгофа.

Вид искомого решения:

$$\boxed{u_C(t) = u_{C\,\text{пр}} + u_{C\,\text{св}}(t) = u_{C\,\text{пр}} + Ae^{pt}.}$$

Преобразование Лапласа

Операторный метод анализа переходных процессов базируется на преобразованиях Лапласа.

$f(t)$ – оригинал функции

$F(p)$ – изображение функции.

$p = \alpha + j\omega$ – комплексная переменная.

а) Прямое преобразование Лапласа

$$\boxed{F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.}$$

б) Обратное преобразование Лапласа

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}F(p)e^{pt}dp.}$$

Запись преобразования Лапласа

$$f(t)\doteqdot F(p).$$

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

ЗТК в операторной форме:

$$\boxed{\sum_{\text{алг.}} I_k(p) = 0.}$$

ЗНК в операторной форме:

$$\boxed{\sum_{\text{алг.}} U_k(p) = \sum_{\text{алг.}} E_n(p).}$$

Расчет переходных процессов операторным методом

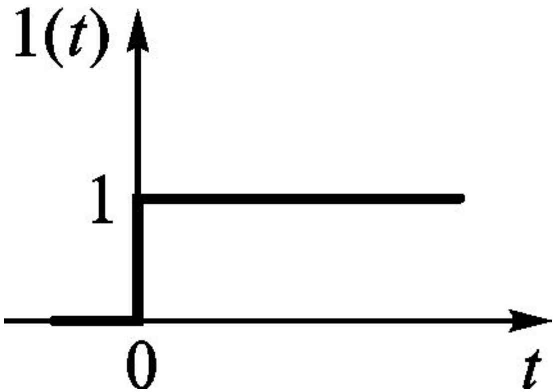
Порядок расчета:

1. Расставляются токи в ветвях.
2. Находятся: $u_C(0_+)$ и $i_L(0_+)$.
3. Составляется операторная схема замещения.
4. Определяются изображения токов в ветвях или напряжений на элементах.
5. Переходят от изображений токов и напряжений к мгновенным значениям $i(t)$, $u(t)$.

Временные методы анализа переходных процессов

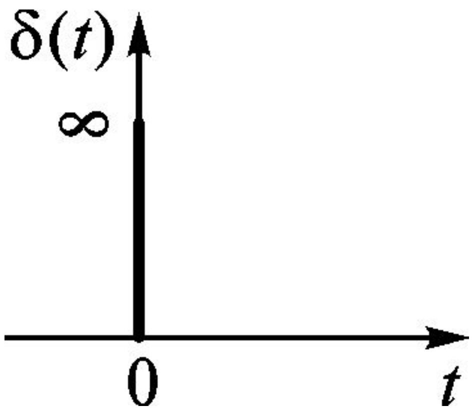
Испытательные сигналы

Единичная функция



$$1(t)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad t<0,\\ 1 & \text{при}\quad t\geq 0\end{cases}$$

Единичная импульсная функция (δ-функция)



$$\delta(t)=\begin{cases}0, & \text{при } t<0,\\ \infty, & \text{при } t=0,\\ 0, & \text{при } t>0.\end{cases}$$

$$\delta(t)=\frac{d1(t)}{dt}.$$

Свойства δ-функции:

1. Площадь единичной импульсной функции равна единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1.$$

2. Фильтрующее свойство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = f(t_0).$$

Переходная характеристика цепи

$$g(t)=\frac{f_{\text{реакц}}(t)}{1(t)}.$$

$$g_u(t)=\frac{u(t)}{1(t)}\ [\text{безразмерная}].$$

$$g_y(t)=\frac{i(t)}{1(t)}\ [\text{См}].$$

Импульсная характеристика цепи

$$h(t)=\frac{f_{\text{реакц}}(t)}{S_0}=\frac{f_{\text{реакц}}(t)}{1}.$$

Связь между импульсной *h*(*t*) и переходной *g*(*t*) характеристиками

$$\boxed{h(t)=\frac{dg(t)}{dt}=g(0)\delta(t)+g'(t).}$$

Анализ реакции цепи с помощью интеграла Дюамеля

$$u_{\text{реакц}}(t) = u_{\text{возд}}(0)\,g(t) + \int_0^t u'_{\text{возд}}(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

Порядок расчета:

1. Разбить сигнал на участки интегрирования, найти скачки напряжения на границах участков, найти производные сигнала на каждом из участков.

2. Рассчитать переходную характеристику заданной цепи.

3. Записать интеграл Дюамеля для каждого из участков интегрирования.

4. Построить график.

Анализ реакции цепи с помощью интеграла наложения

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau.$$