

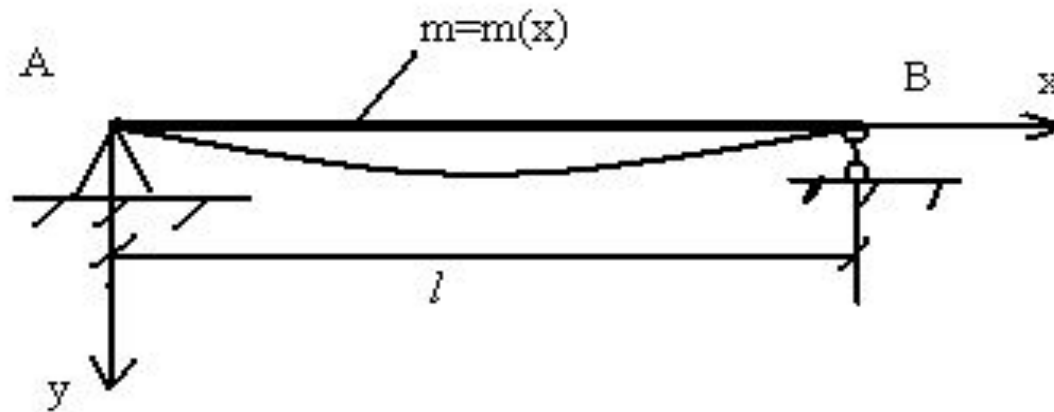
Лекция 17-18

**Свободные колебания системы с
бесконечным числом степеней свободы**

Содержание

- 1. Свободные колебания балки с
распределенной массой.**
- 2. Решение дифференциального
уравнения.**
- 3. Ортогональность главных форм
колебаний**

Свободные колебания системы с бесконечным числом степеней свободы



$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) T_k(t),$$

$$EI \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(IV)}(x) \right) + m(x) \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) T_k''(t) \right) = 0$$

$$EI \frac{\partial^4 y_k(x)}{\partial x^4} T_k(t) + m(x) y_k(x) \frac{\partial^2 T_k(t)}{\partial t^2} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{EI y_k^{IV}(x)}{m(x) y_k(x)} = - \frac{T_k''(t)}{T_k(t)} = \omega_k^2 \quad \begin{aligned} y_k^{IV}(x) - s_k^4 y_k(x) &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ s_k^4 &= \frac{m(x) \cdot \omega_k^2}{EI} \end{aligned}$$

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) T_k(t),$$

$$y_k(x) = A \operatorname{ch}(s_k x) + B \operatorname{sh}(s_k x) + C \cos(s_k x) + D \sin(s_k x),$$

$$T_k(t) = A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t,$$

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A \operatorname{ch}(s_k x) + B \operatorname{sh}(s_k x) + C \cos(s_k x) + D \sin(s_k x)) \cdot (A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t)$$

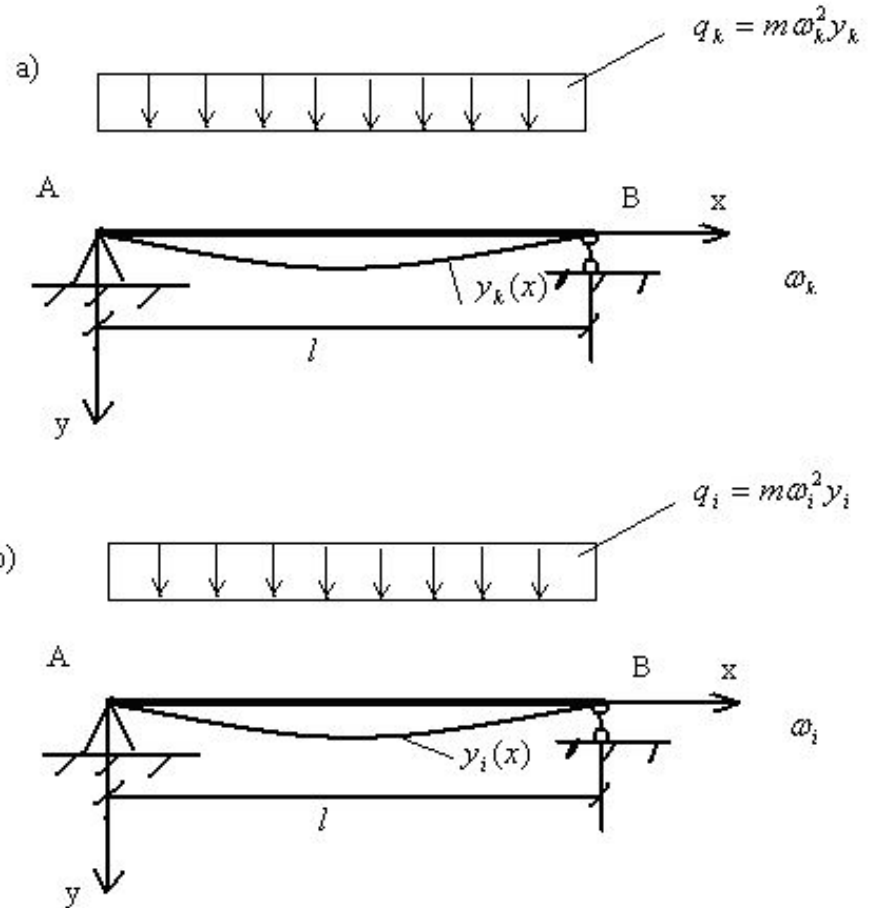
Ортогональность главных форм колебаний

$$\int_0^l q_k \cdot y_i(x) dx = \int_0^l q_i \cdot y_k(x) dx,$$

$$\int_0^l m \omega_k^2 y_k y_i dx - \int_0^l m \omega_i^2 y_i y_k dx = 0,$$

$$\int_0^l m(\omega_k^2 - \omega_i^2) y_k y_i dx = 0, \quad \text{так как } \omega_k \neq \omega_i,$$

$$\int_0^l m y_k y_i dx = 0, \quad \text{если } i \neq k$$



Метод начальных параметров

$$y_k(x) = Ach(s_k x) + Bsh(s_k x) + C\cos(s_k x) + D\sin(s_k x),$$

$$y_k'(x) = s_k Ash(s_k x) + s_k Bch(s_k x) - s_k C\sin(s_k x) + s_k D\cos(s_k x),$$

$$y_k''(x) = s_k^2 Ach(s_k x) + s_k^2 Bsh(s_k x) - s_k^2 C\cos(s_k x) - s_k^2 D\sin(s_k x),$$

$$y_k'''(x) = s_k^3 Ash(s_k x) + s_k^3 Bch(s_k x) + s_k^3 C\sin(s_k x) - s_k^3 D\cos(s_k x)$$

$$s_k = \sqrt[4]{\frac{m\omega_k^2}{EI}}$$

$$y_k(x) = y_k(0)A_{s_k x} + \frac{y_k'(0)}{s_k}B_{s_k x} - \frac{M_k(0)}{s_k^2 EI}C_{s_k x} - \frac{Q_k(0)}{s_k^3 EI}D_{s_k x},$$

$$y_k'(x) = s_k y_k(0)D_{s_k x} + y_k'(0)A_{s_k x} - \frac{M_k(0)}{s_k EI}B_{s_k x} - \frac{Q_k(0)}{s_k^2 EI}C_{s_k x},$$

$$M_k(x) = -y_k''(x)EI = -s_k^2 y_k(0)EIC_{s_k x} - s_k y_k'(0)EID_{s_k x} + M_k(0)A_{s_k x} + \frac{Q_k(0)}{s_k}B_{s_k x},$$

$$Q_k(x) = -y_k'''(x)EI = -s_k^3 y_k(0)EIB_{s_k x} - s_k^2 y_k'(0)EIC_{s_k x} + s_k M_k(0)D_{s_k x} + Q_k(0)A_{s_k x}$$

Круговые функции

$$\begin{aligned} A_{s_k x} &= \frac{ch(s_k x) + \text{Cos}(s_k x)}{2}, & B_{s_k x} &= \frac{sh(s_k x) + \text{Sin}(s_k x)}{2}, \\ C_{s_k x} &= \frac{ch(s_k x) - \text{Cos}(s_k x)}{2}, & D_{s_k x} &= \frac{sh(s_k x) - \text{Sin}(s_k x)}{2} \end{aligned}$$

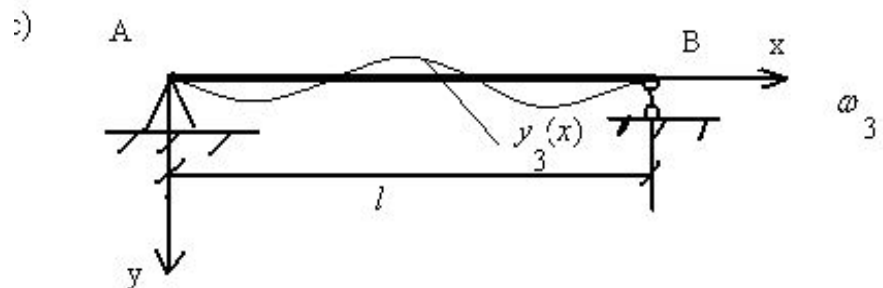
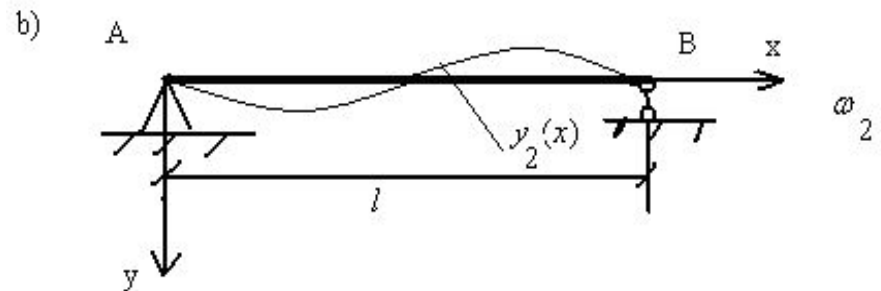
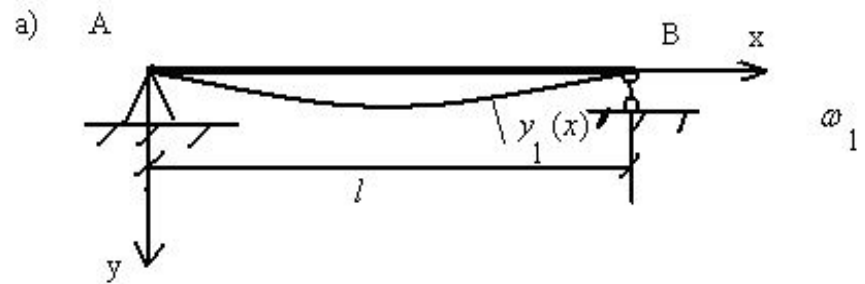
$$\lambda_k = s_k l,$$

$$s_k = \sqrt[4]{\frac{m \omega_k^2}{EI}}$$

$$\omega_k = s_k^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Собственные колебания для однопролетной балки

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$



Частоты собственных колебаний для различных условий закреплений

Заделка с двух
сторон

$$\omega_1 = \frac{4,7^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Один конец защемлен,
другой – свободен

$$\omega_1 = \frac{1,87^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Один конец защемлен,
другой – шарнирно оперт

$$\omega_1 = \frac{3,9^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Приближенные методы определения частот собственных колебаний

Формула Дункерлея

$$\frac{1}{\omega^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} + \frac{1}{\omega_0^2} \quad \omega_i = \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \int_0^l m(x)\delta_{ii}(x)dx$$

Метод Рэлея

$$\omega^2 = \frac{2\Pi_{\text{макс}}}{\sum_{i=1}^n M_i [X(x_i)]^2 + \int_0^l m(x) [X(x)]^2 dx}$$