Гиперболический хаос

А.Ю.Лоскутов

Физический факультет МГУ

http://chaos.phys.msu.ru

Содержание

1. Введение

Основная идея – качественное интегрирование

Исследование устойчивости, изучение роли инвариантных многообразий, анализ геометрической структуры траекторий, поиск инвариантных мер, расчет инвариантных характеристик и т.п.

Качественная теория

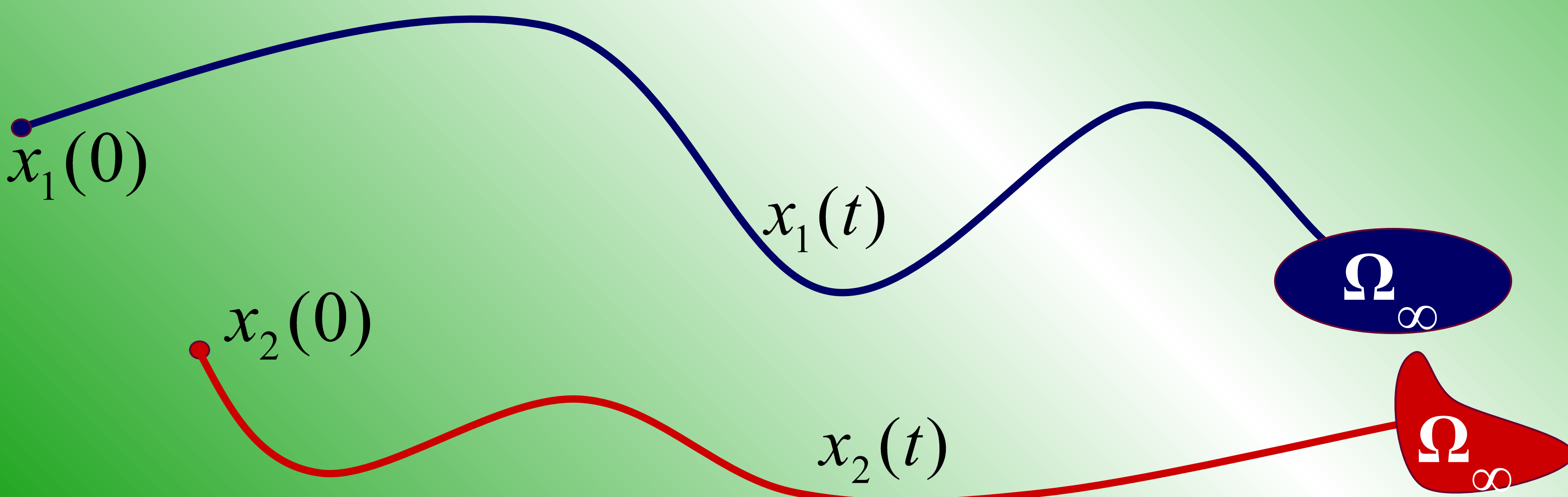
Предмет качественной теории – ***сосредоточенные системы***, $\dot{x} = v(x, a)$, **где**

$$x(t) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},\ v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},\ v \in C^r,$$

$v : M \to \mathbb{R}^n$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M – **фазовое пространство**,

$a \in \mathbb{R}^k$ – **параметры**.

Основной результат – ***теорема локального существования и единственности решений*:**

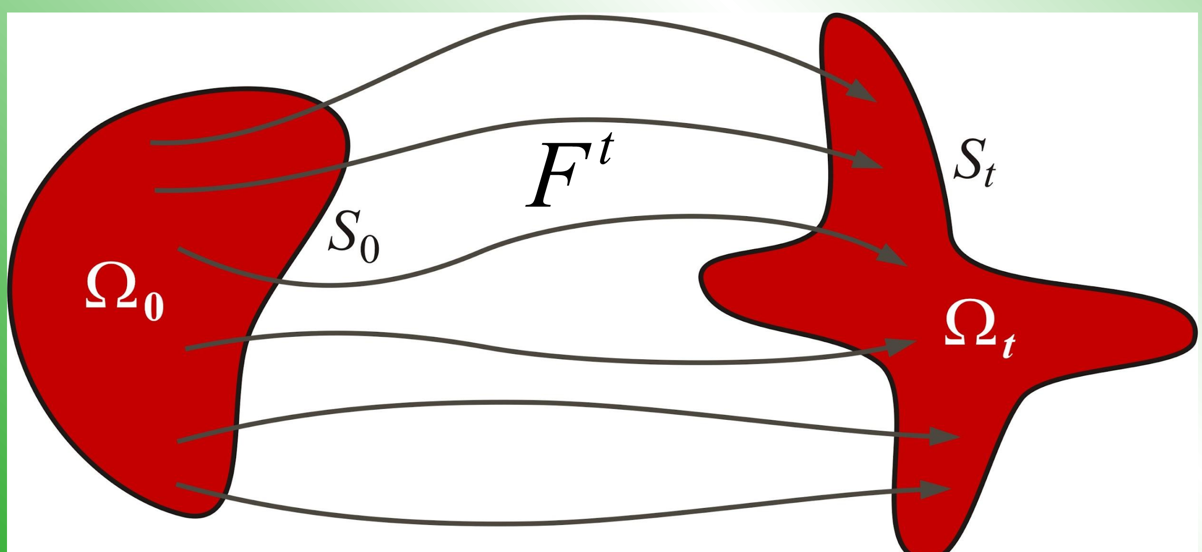


Таким образом, можно предложить **<u>геометрический подход</u>** → ввести преобразование сдвига, или ***фазовый поток***,

$$F^t : M \to \mathbb{R}^n.$$

Эта функция определена для $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ и

$$\left.\frac{d}{dt}F^t\right|_{t=\tau} = v\left(F^\tau(x)\right), \tau \in T.$$



Поток $F^t : M \to \mathbb{R}^n$ при $s = -t$ имеет взаимно обратную функцию той же гладкости C^r.

система обратима во времени

Если *t* дискретно, $t \in \mathbb{Z}$, то динамическая система $f : M \to M$ называется *отображением:*

$$x_{n+1} = f\left(x_n\right)$$

Если функции *f* и f^{-1} гладкие, то такое отображение называется *диффеоморфизмом*.

Говорят, что свойство динамической системы является *грубым* (или *структурно устойчивым*), если при малых возмущениях системы оно сохраняется.

Пусть $x(t)$ **– некоторое решение. Каким оно будет при** $t \to \infty$ **?**

СИСТЕМЫ

диссипативные

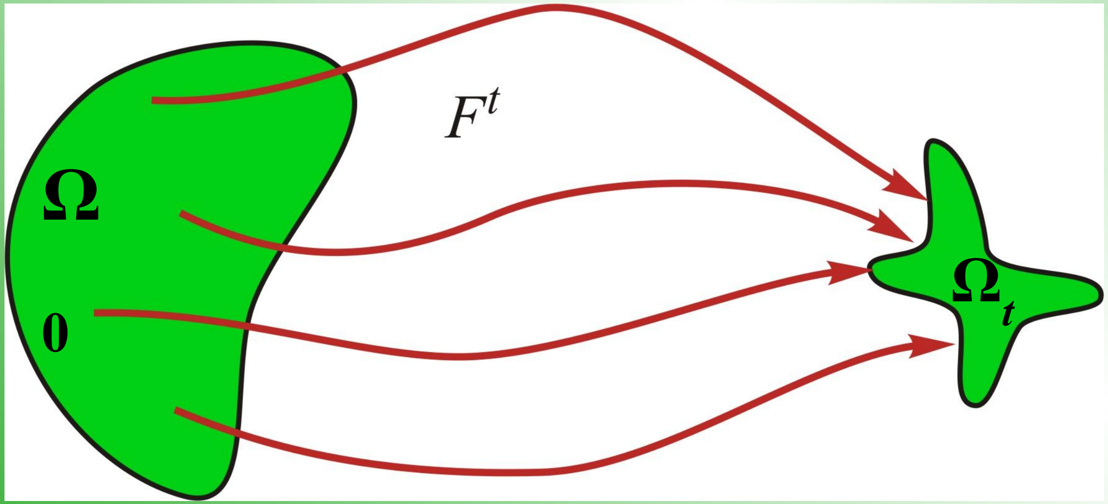
$$\operatorname{div} \vec{v} < 0$$

консервативные

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

2. Аттракторы

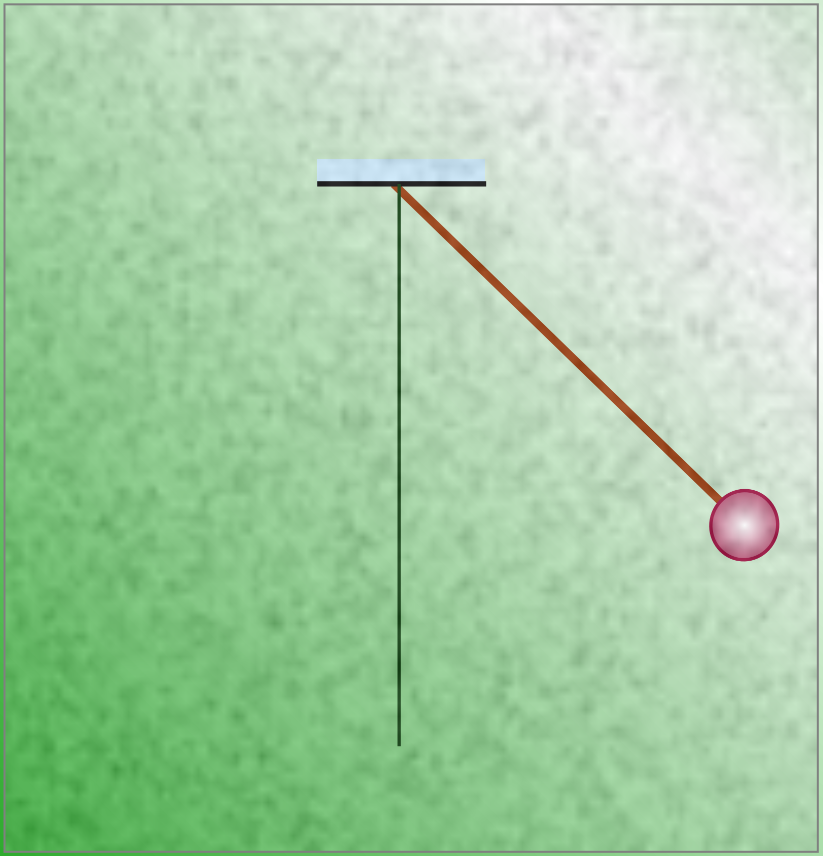
Диссипация ⟶ **фазовый объем сжимается**



При $t \to \infty$ фазовый объем стремится к нулю.

Это *предельное множество* называется *аттрактором*. Как его наглядно представить?

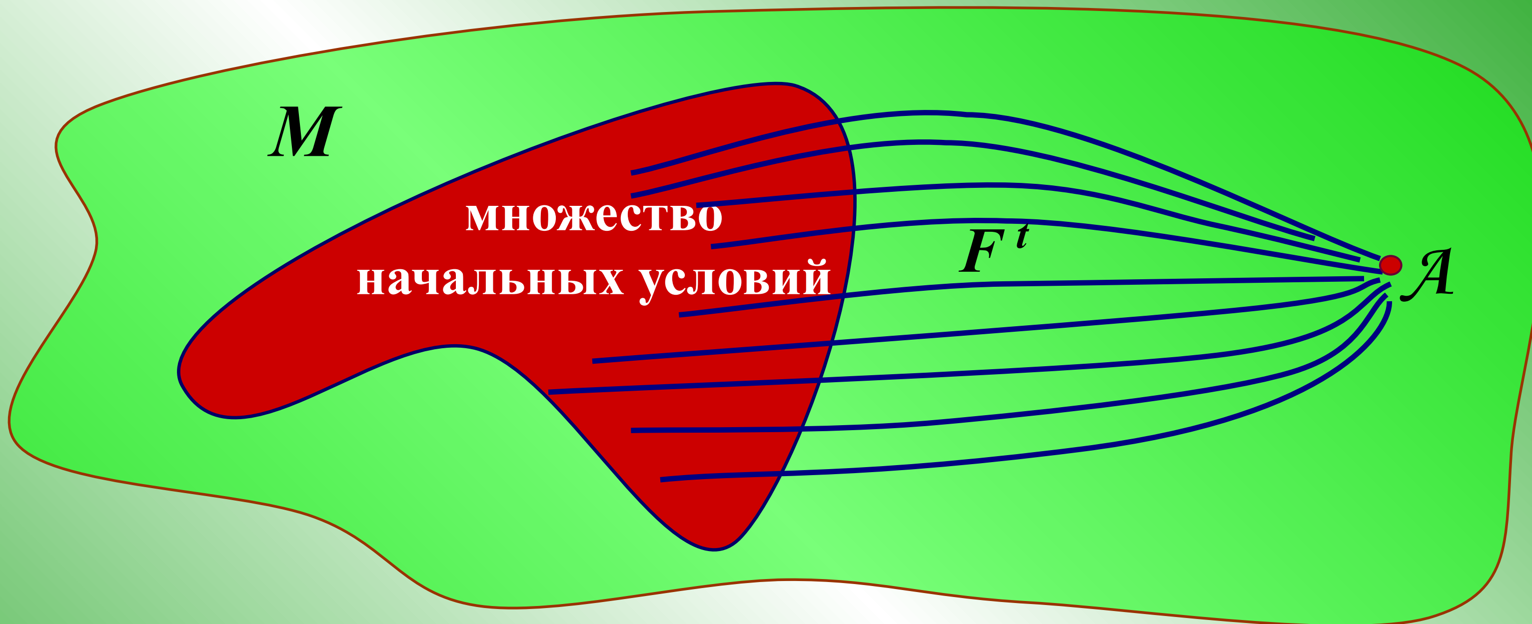
Рассмотрим маятник в среде:



Для почти всех начальных условий его конечное состояние – это устойчивое положе-ние равновесия.

Это положение словно бы «притягивает» маятник из почти любого начального состояния.

Формально это означает следующее:



<u>***Аттрактор***</u> $\mathcal{A}$ – **это подмножество фазового пространства** $\boldsymbol{M}$ **такое, что**

- $\mathcal{A}$ **инвариантно относительно** $\boldsymbol{F^{t}}$**;**
- **существует окрестность** $\boldsymbol{U} \supset \mathcal{A}$**, которая сжимается к** $\mathcal{A}$ **под действием** $\boldsymbol{F^{t}}$**,** $\quad F^{t}(U)\Big|_{t\to\infty} \Rightarrow \mathcal{A}$**;**
- $\mathcal{A}$ **неразложимо.**

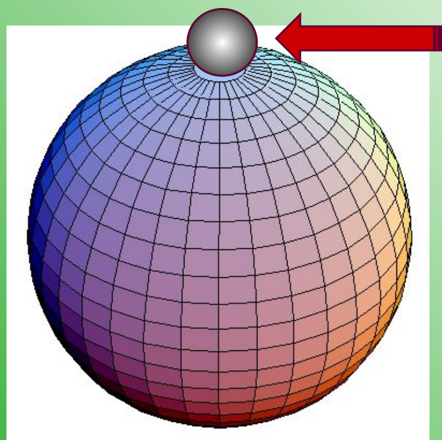
$\boldsymbol{U}$ **называется** ***областью притяжения аттрактора*** $\mathcal{A}$**.**

Рассмотрим систему:

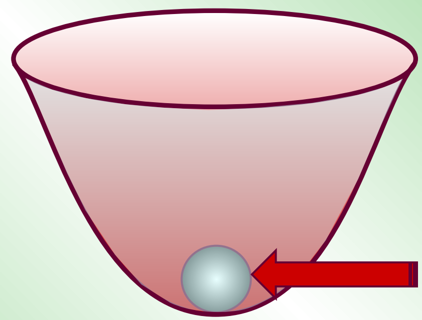
$$\dot{x} = v(x, a).$$

Точки x^0, в которых $v\left(x^0\right) = 0$, называются *положениями равновесия* или *стационарными точками*.

Равновесие



неустойчивое

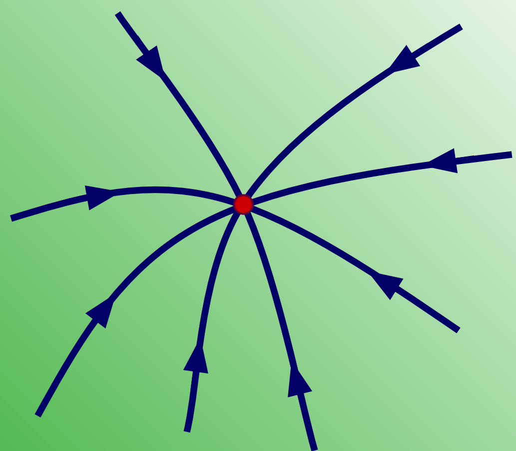


устойчивое

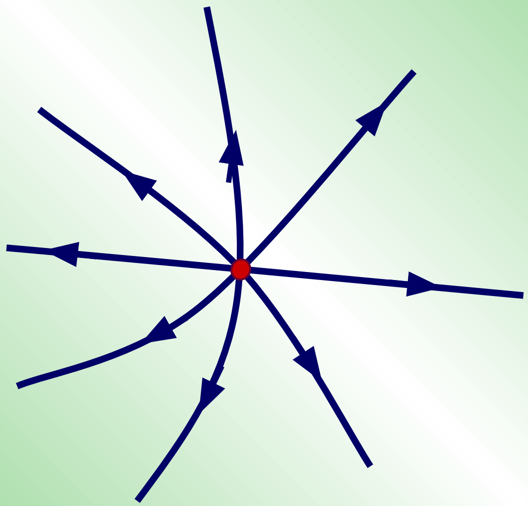
$n = 2:$ $\begin{cases} \dot{x} = v_1(x, y), \\ \dot{y} = v_2(x, y). \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$

1 λ_1, λ_2 **– действительные и одного знака**

узел

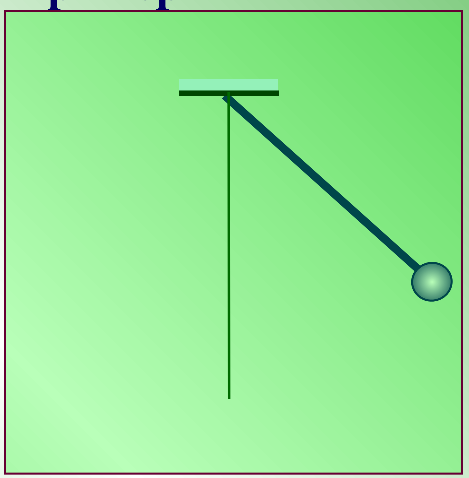


устойчивый



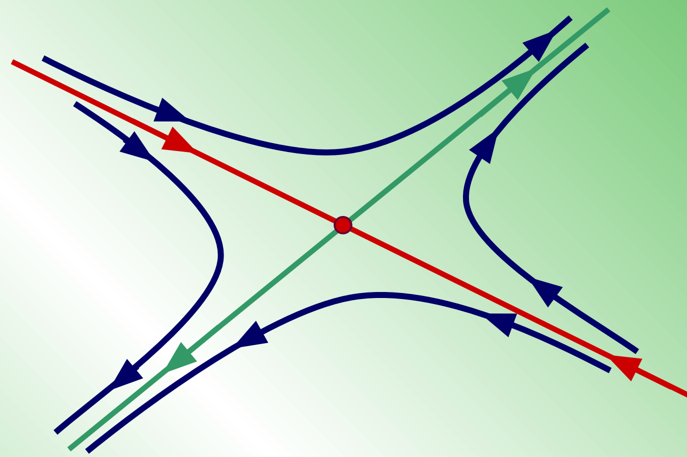
неустойчивый

Пример

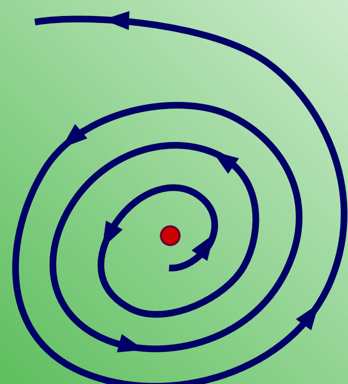


2 λ_1, λ_2 – **действительные и разных знаков**

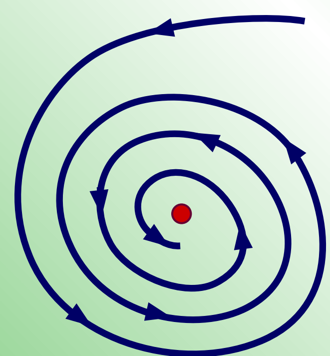
<u>седло</u>



3 $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\zeta$ ***<u>фокус</u>***

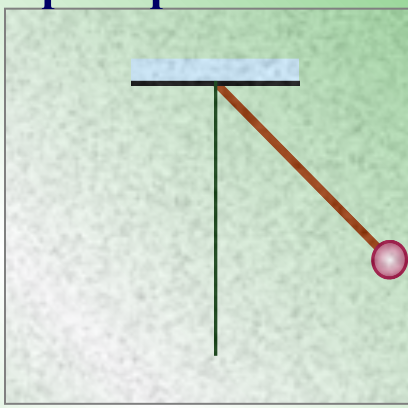


неустойчивый



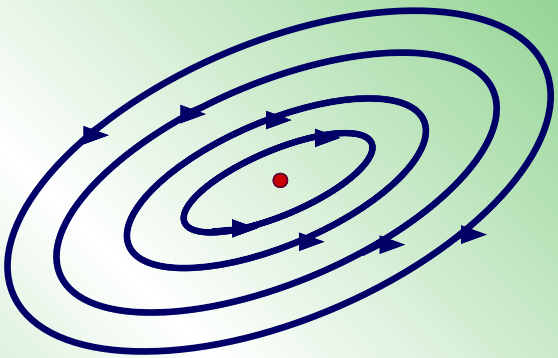
устойчивый

Пример

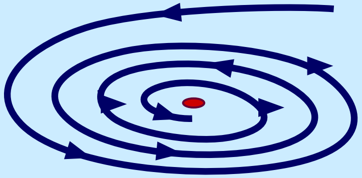


4 λ_1, λ_2 **– чисто мнимые**

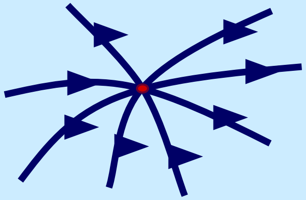
центр



***Аттракторы*:**



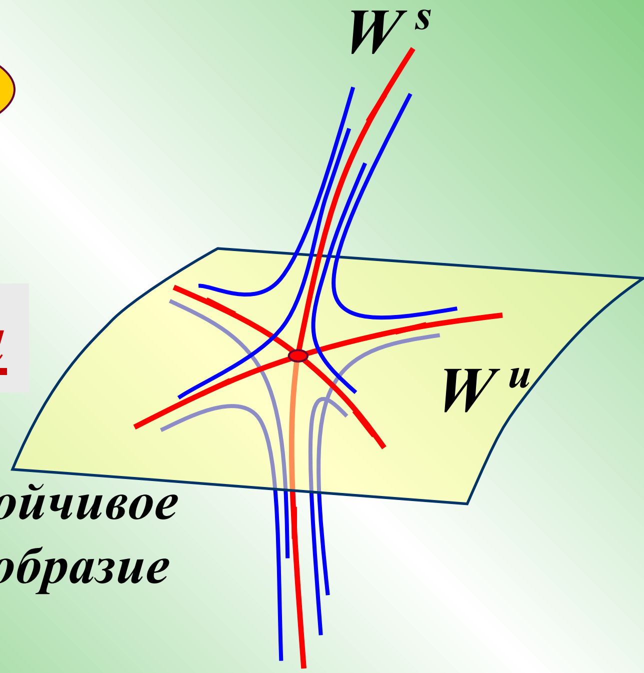
устойчивый фокус



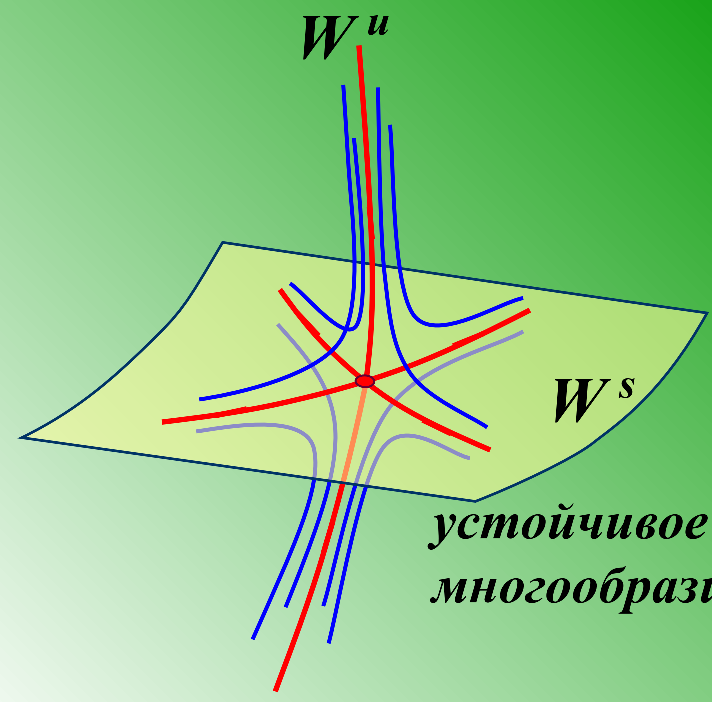
устойчивый узел

$n > 2:$

седло-узел

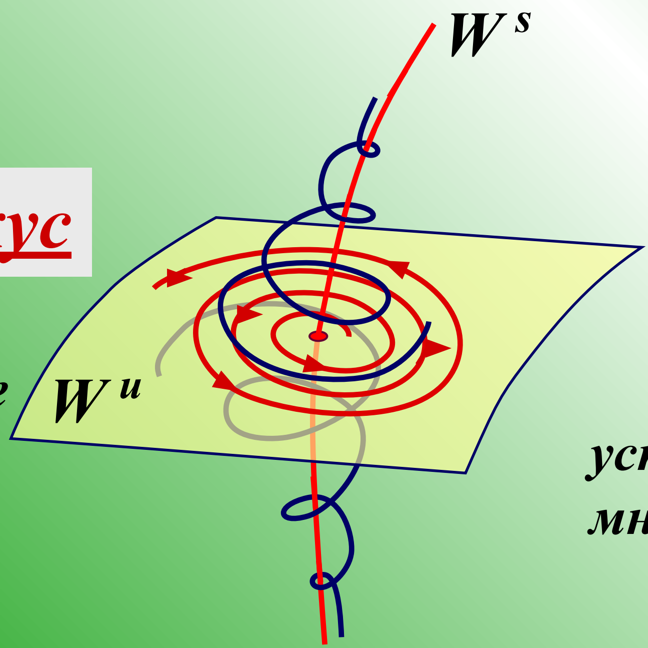


неустойчивое многообразие

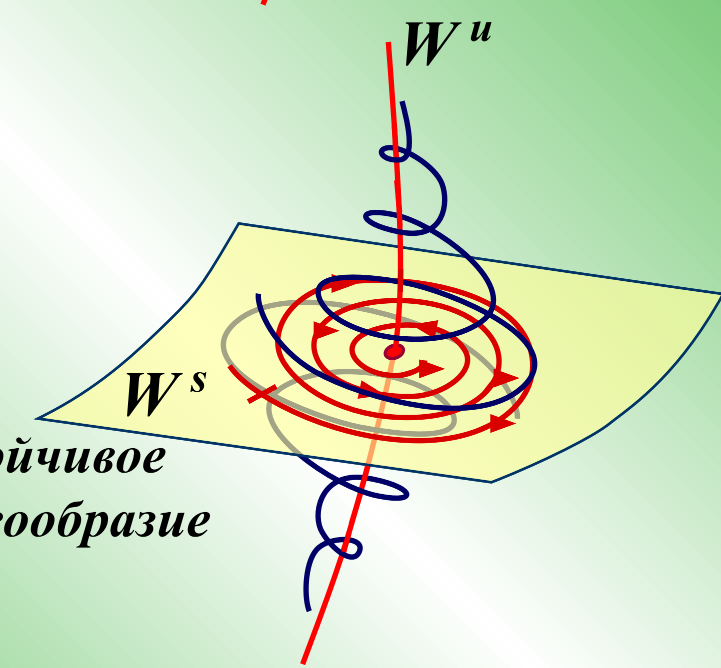


устойчивое многообразие

седло-фокус

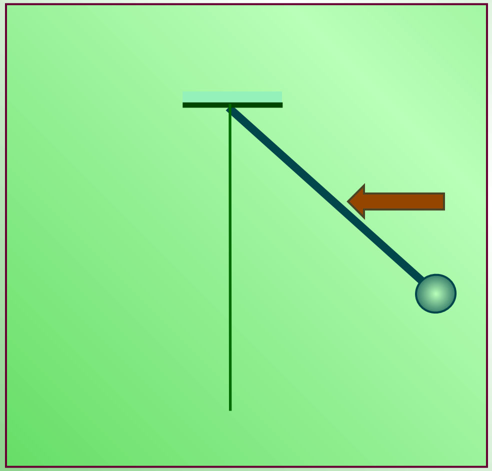


неустойчивое многообразие

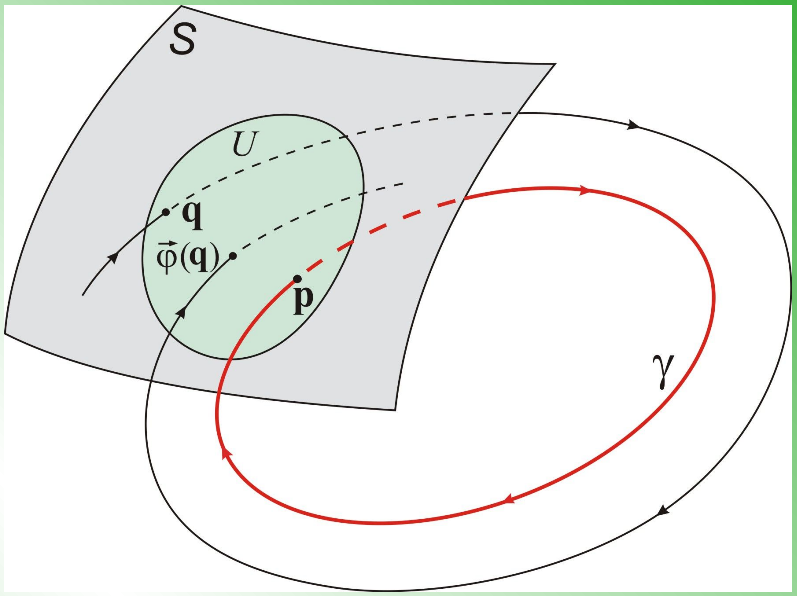


устойчивое многообразие

Более сложные аттракторы:

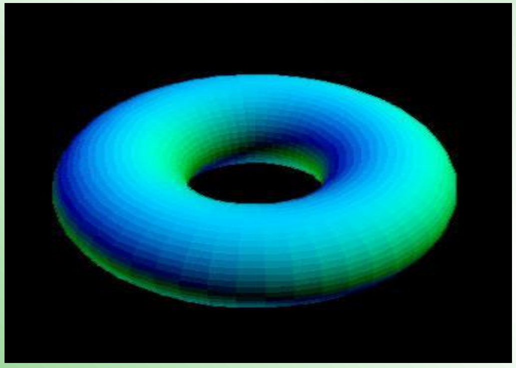


Маятник с возмущением в среде



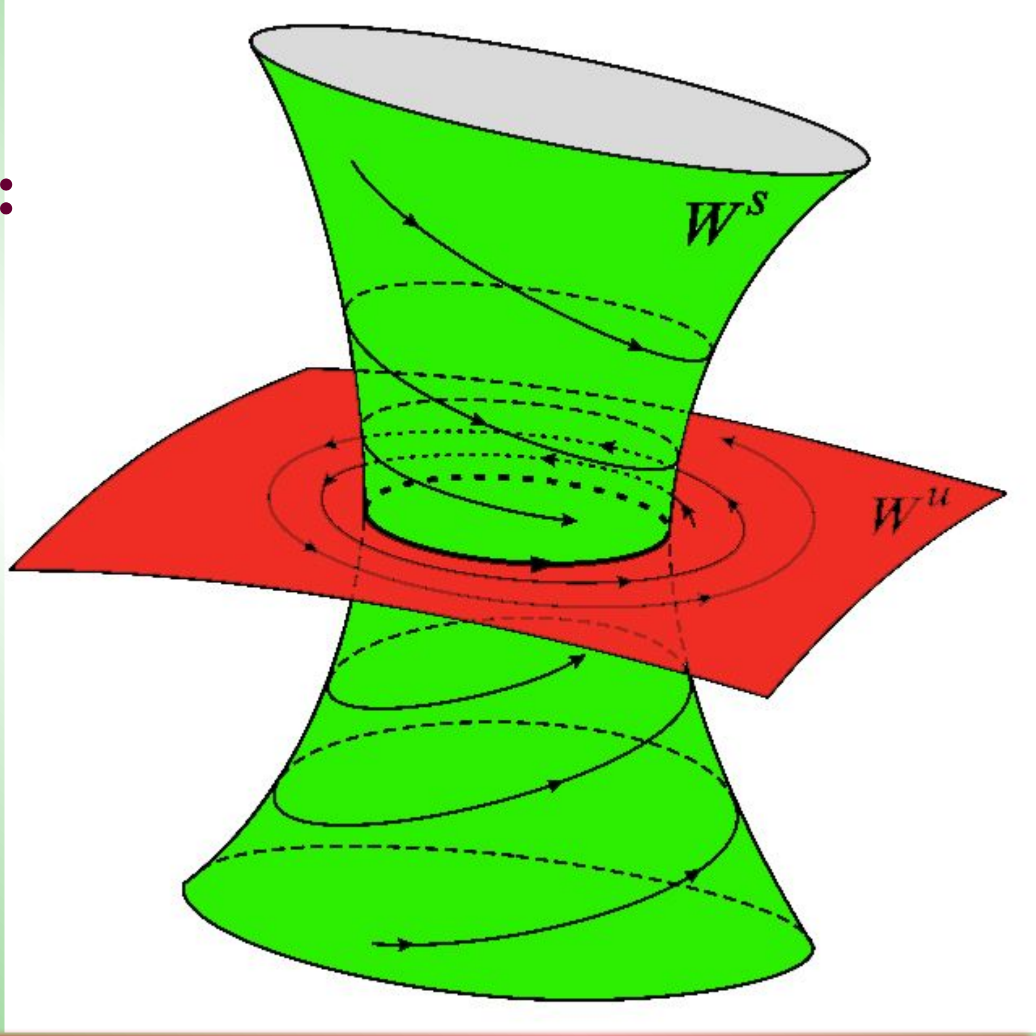
предельный цикл γ

Несколько маятников



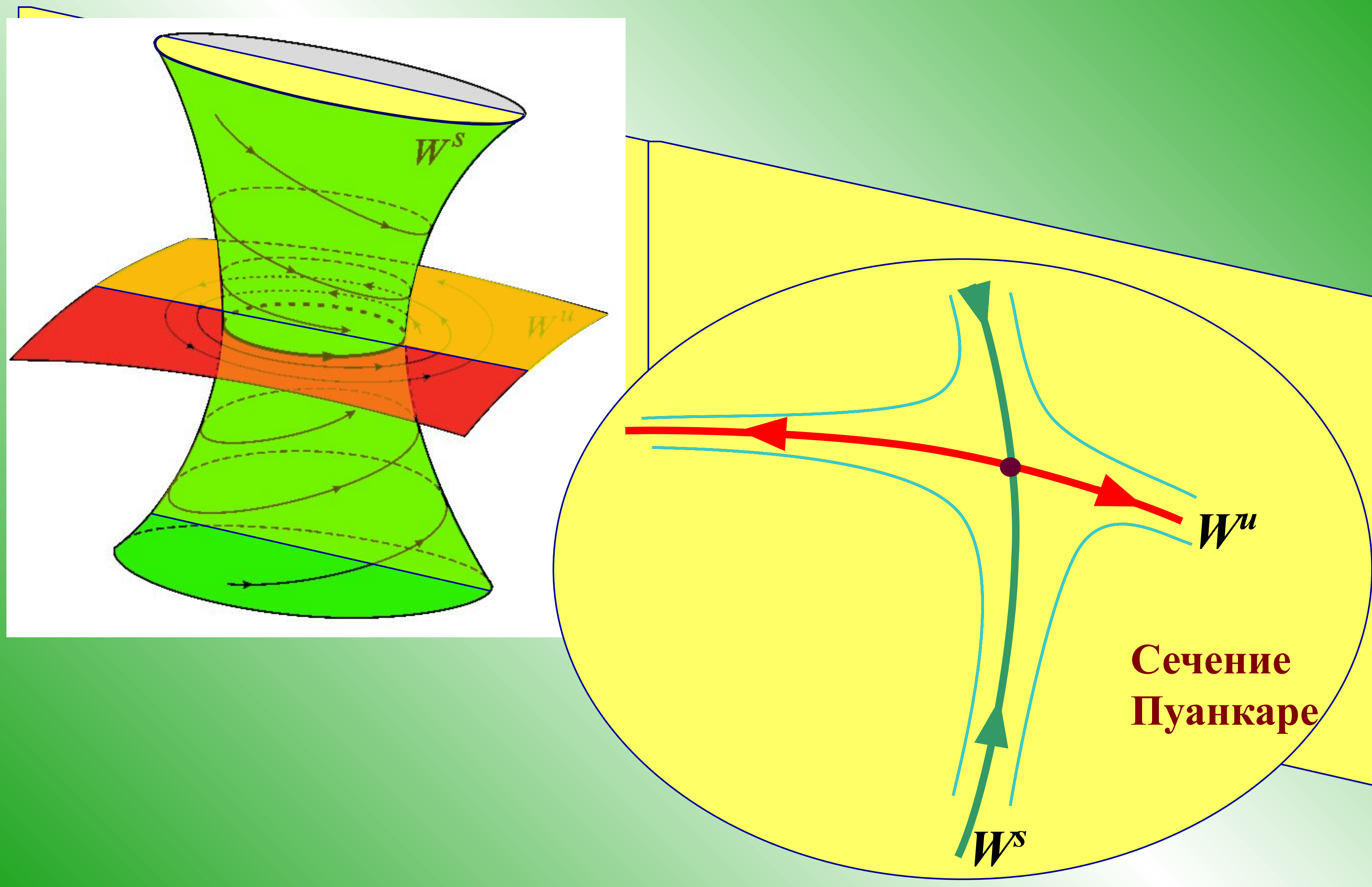
тор

Седловой цикл:

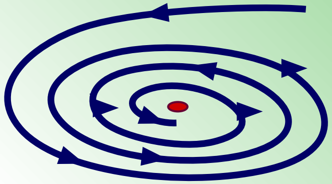


W ^{s} **и *W*** ^{u} **– называются *устойчивым и неустойчивым многообразиями* седлового предельного цикла, соответственно.**

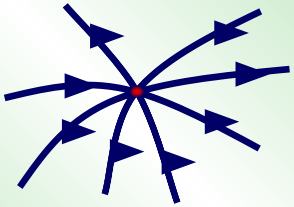
В отображении Пуанкаре такой цикл отвечает седлу:



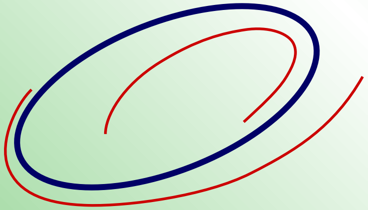
Аттракторы:



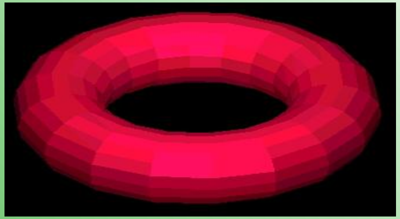
Устойчивый фокус



Устойчивый узел



Устойчивый предельный цикл

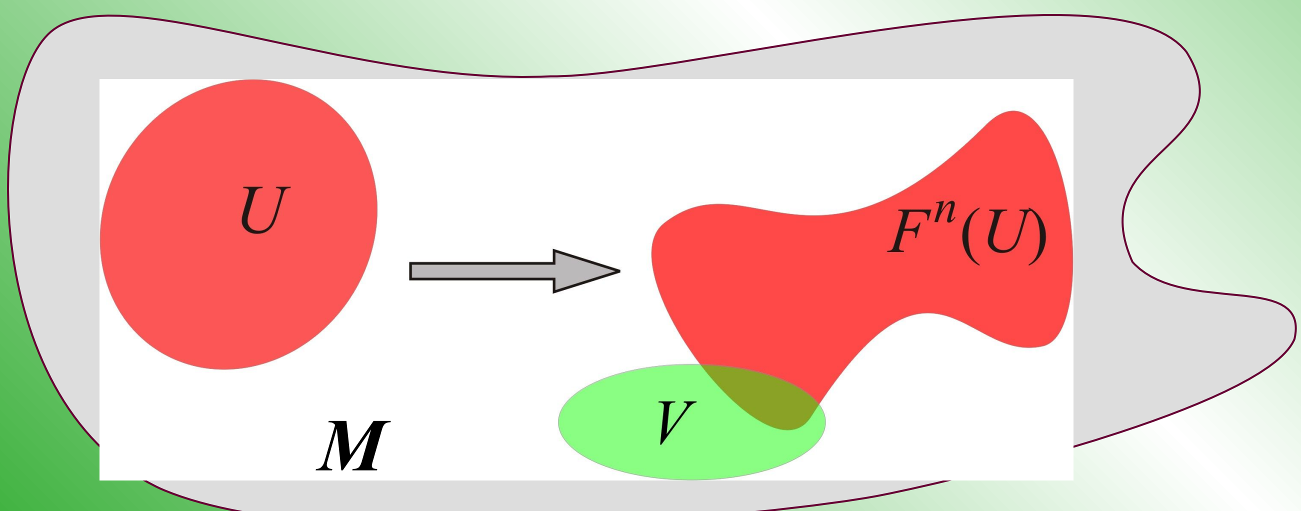


Устойчивый тор

3. Хаос

Пусть *M* – метрическое пространство. Система F^t: $M \to M$ называется *хаотической*, если

- **F^t неустойчиво по отношению к заданию начальных условий**  **;**
- **циклы преобразования F^t плотны в *M*;**
- **F^t топологически транзитивно.**



Гиперболические множества

Такие множества служат хорошим примером для понимания «устройства» хаотических систем.

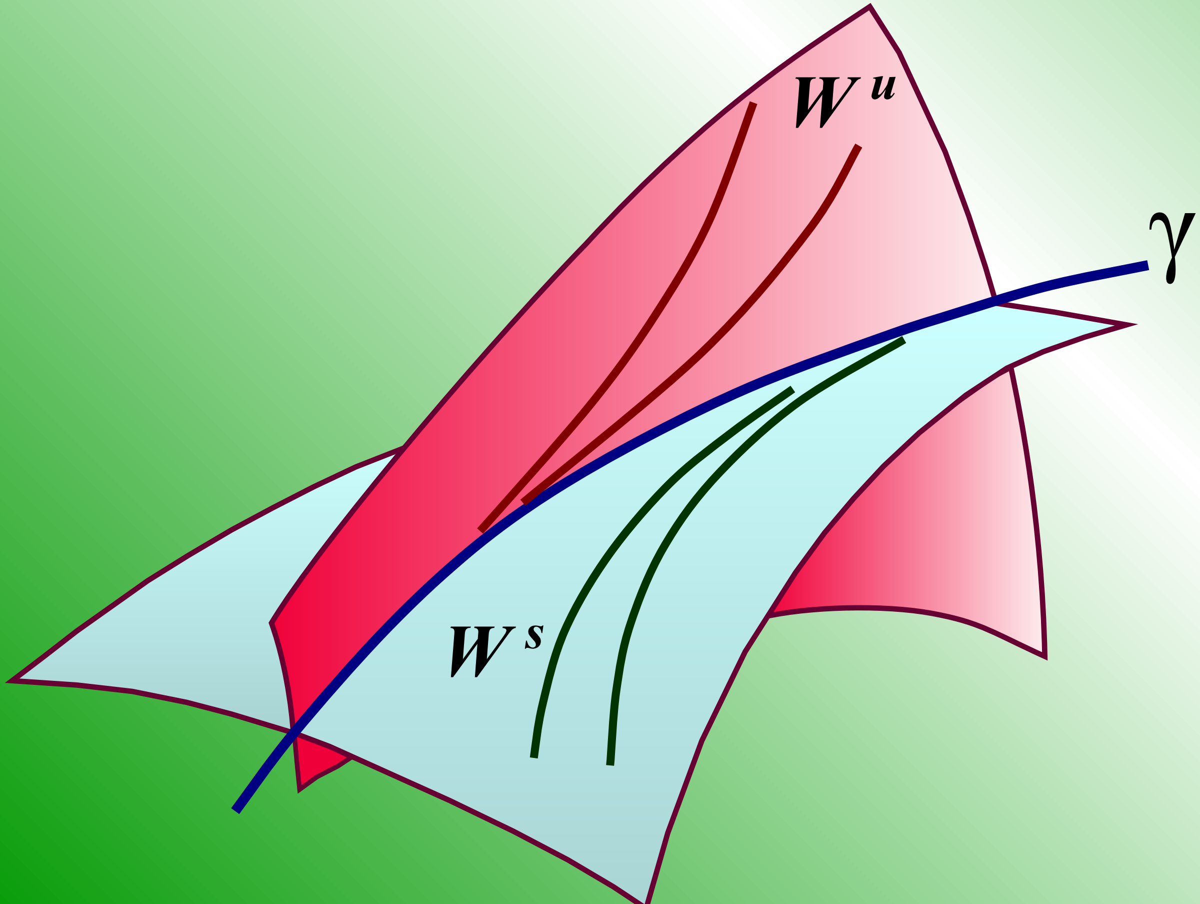
Определение. Траектория x_n называется гиперболической, если существуют подпространства $E^{\mathrm{s}}_{f^k(x)}$ и $E^{\mathrm{u}}_{f^k(x)}$ касательного пространства $\Sigma_{f^k(x)}$, $0 \leqslant k < \infty$, такие, что $\Sigma_{f^k(x)} = E^{\mathrm{s}}_{f^k(x)} + E^{\mathrm{u}}_{f^k(x)}$ и выполняются условия:

(а) $\partial f_{f^k(x)}(E^{\mathrm{s}}_{f^k(x)}) = E^{\mathrm{s}}_{f^{k+1}(x)}$, $\partial f_{f^k(x)}(E^{\mathrm{u}}_{f^k(x)}) = E^{\mathrm{u}}_{f^{k+1}(x)}$;

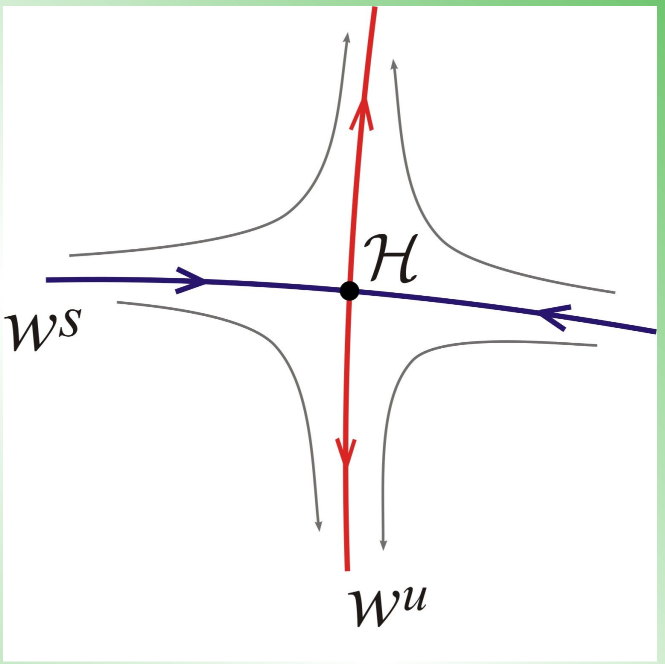
(б) $||\partial f_{f^k(x)} e|| \leqslant c||e||$, $\quad e \in E^{\mathrm{s}}_{f^k(x)}$, $\quad ||\partial f_{f^k(x)} e|| \geqslant c^{-1}||e||$, $e \in E^{\mathrm{u}}_{f^k(x)}$, где $0 < c < 1$ — некоторая постоянная;

(в) $\operatorname{dist}(E^{\mathrm{s}}_{f^k(x)}, E^{\mathrm{u}}_{f^k(x)}) \geqslant \mathrm{const}$, $0 < k < \infty$.

Теорема **о локальных многообразиях (*Адамара-Перрона*): у гиперболической траектории существуют локальное устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразия.**

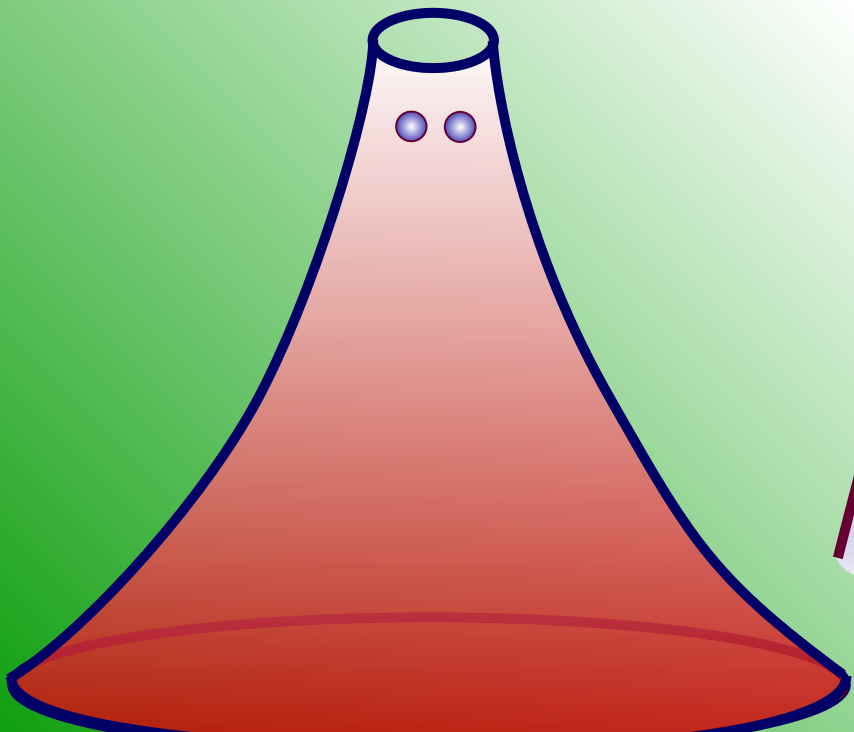


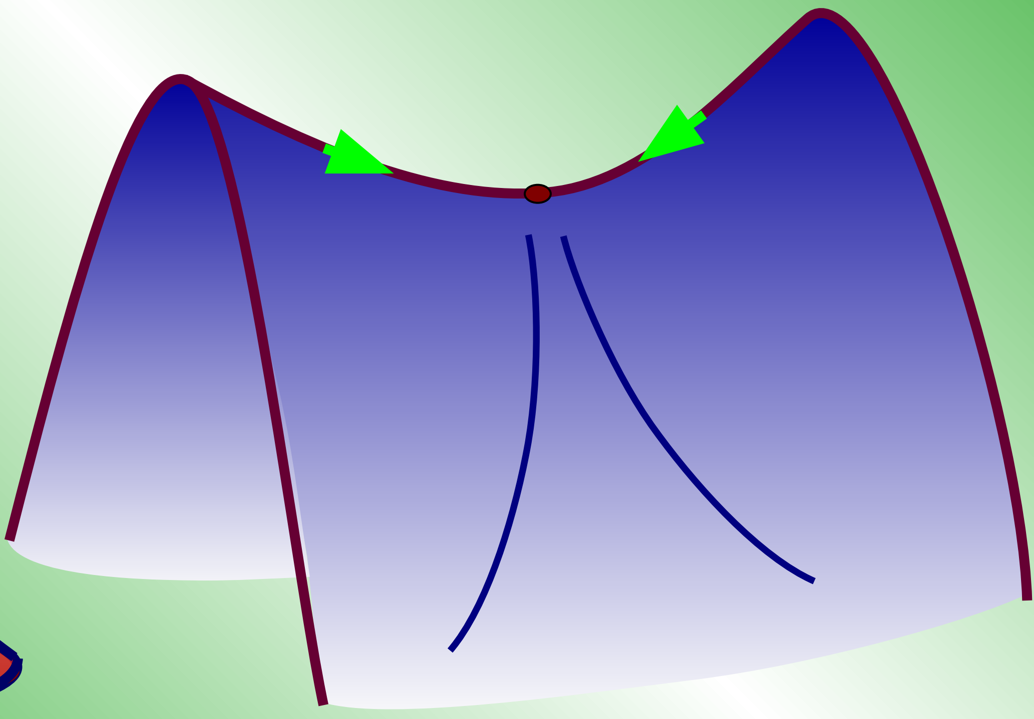
В сечении:



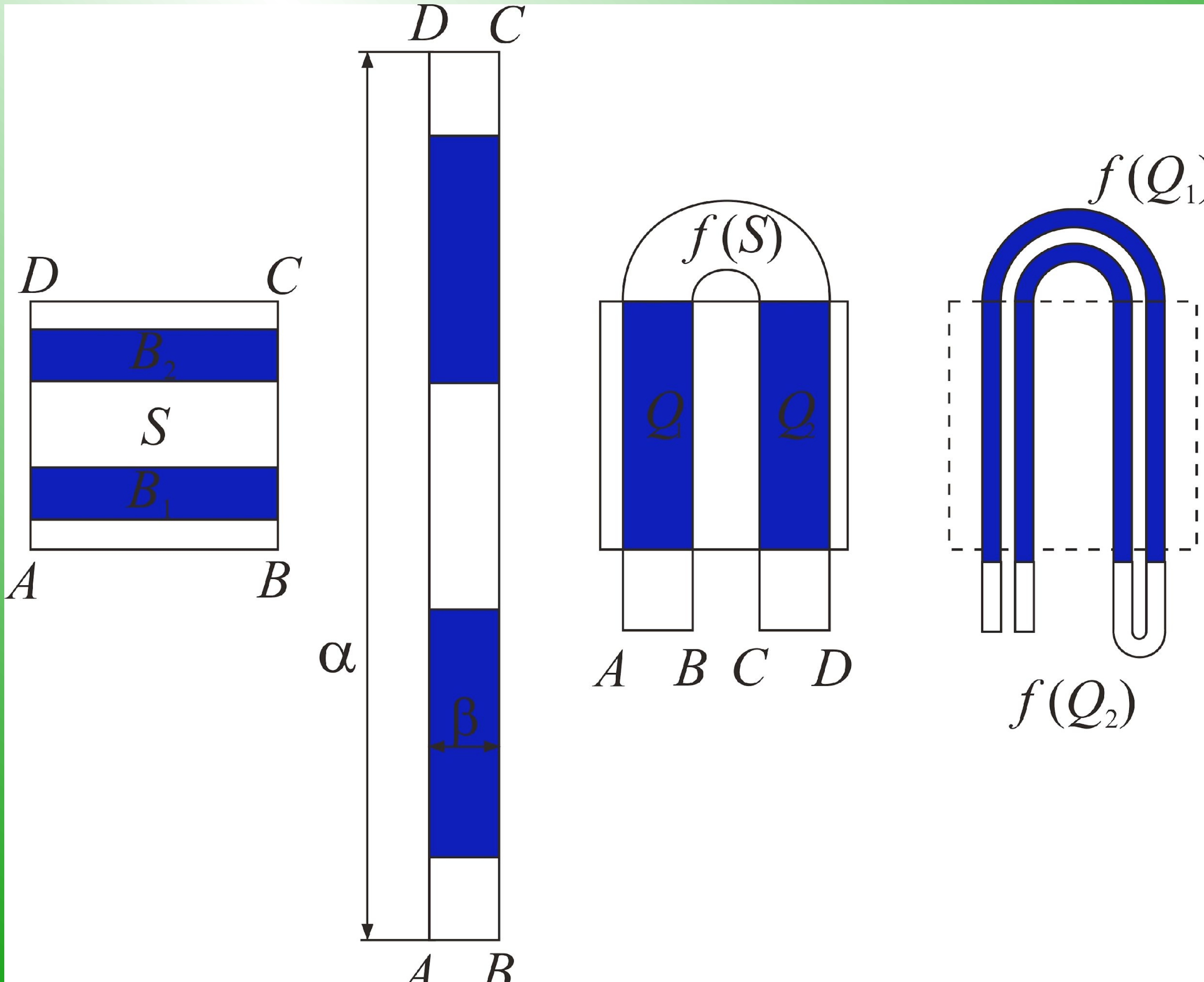
Если вдоль траектории γ оценки ухудшаются, т.е. степень сжатия и растяжения в подпространствах E^u и E^s меняется от точки к точке, то такие множества называются *неравномерно гиперболическими*.

Динамические системы с равномерной гиперболичностью всех траекторий называются *системами Аносова*.





Подкова Смейла $S=[0,1]\times[0,1] \quad f:S\to \mathbf{R}^2$



$$f(S)\cap f^2(S),$$

$$\Omega_r^2 = S\cap f^{-1}(S)\cap f^{-2}(S)$$

$$\Omega_d^m = \bigcap_{k=0}^{m} f^k(S), \quad \Omega_r^m = \bigcap_{k=0}^{m} f^{-k}(S)$$

Точки *p*, которые всегда остаются в *S*, образуют *канторово множество*. Это – *подкова Смейла*:

$$\Omega = \left\{ p \mid f^k(p) \in S, -\infty < k < \infty \right\} = \Omega_d^{\infty} \cap \Omega_r^{\infty} = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^k(S).$$

Множество Ω содержит

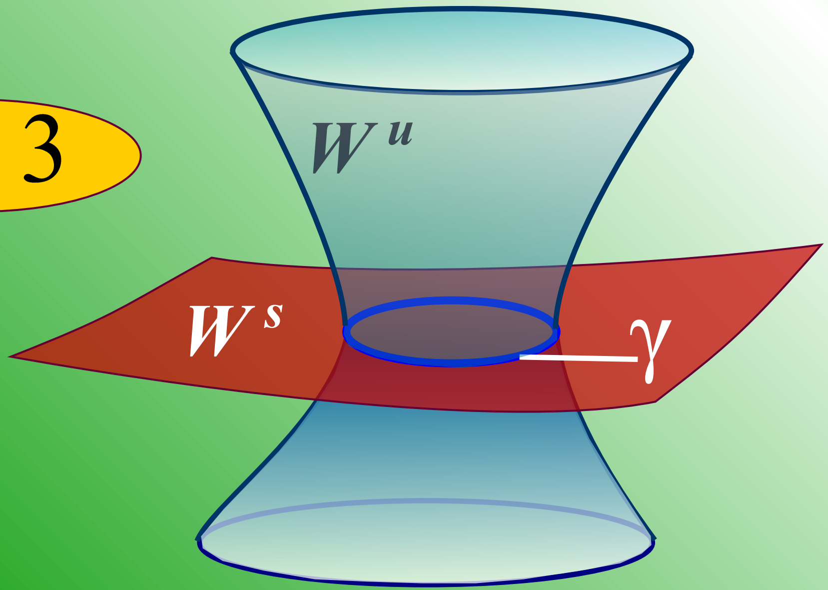
- **циклы всевозможных периодов;**
- **плотную траекторию;**
- **несчетное множество непериодических траекторий.**

ХАОС

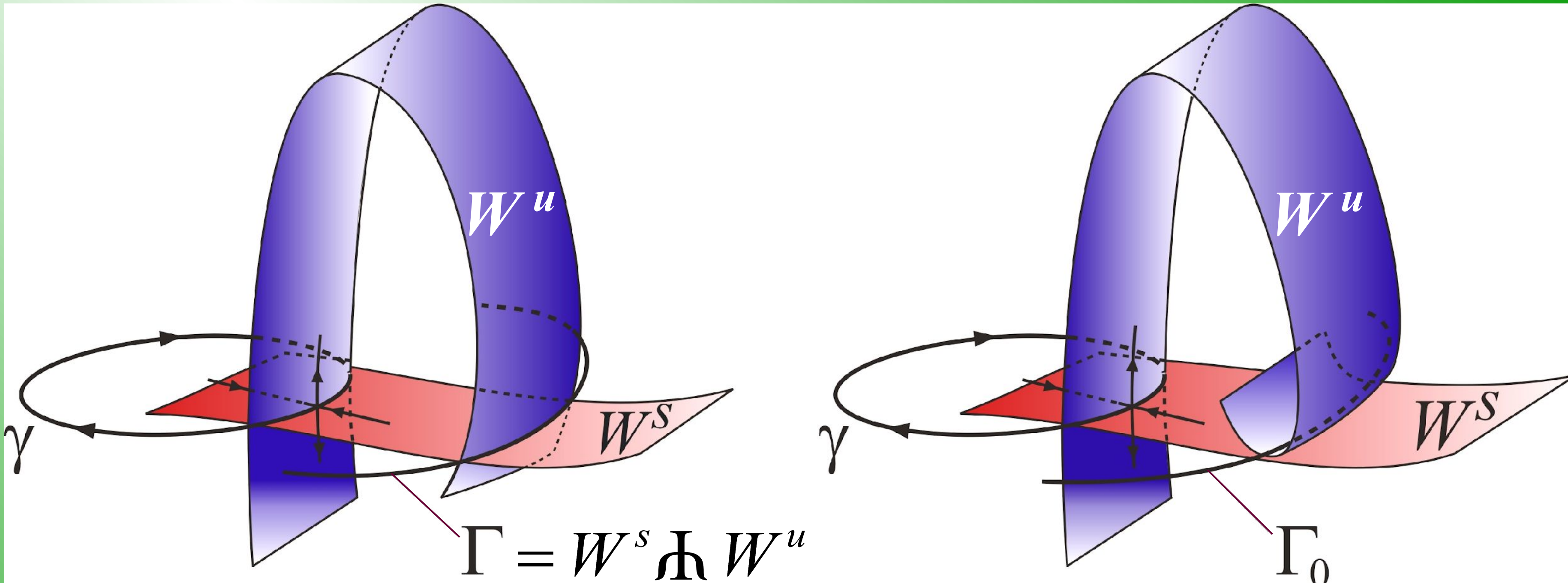
4. Гомоклинические структуры

Пусть система имеет седловой цикл с устойчивым и неустойчивым многообразиями:

$n = 3$



Пересечение W^s и W^u, отличное от γ, называется *гомоклинической траекторией*.



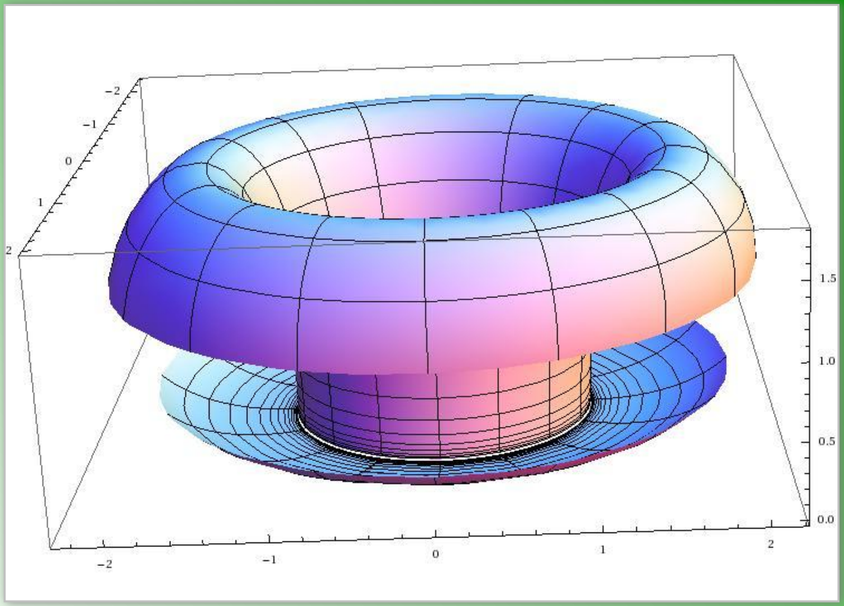
Трансверсальное пересечение

Касание многообразий

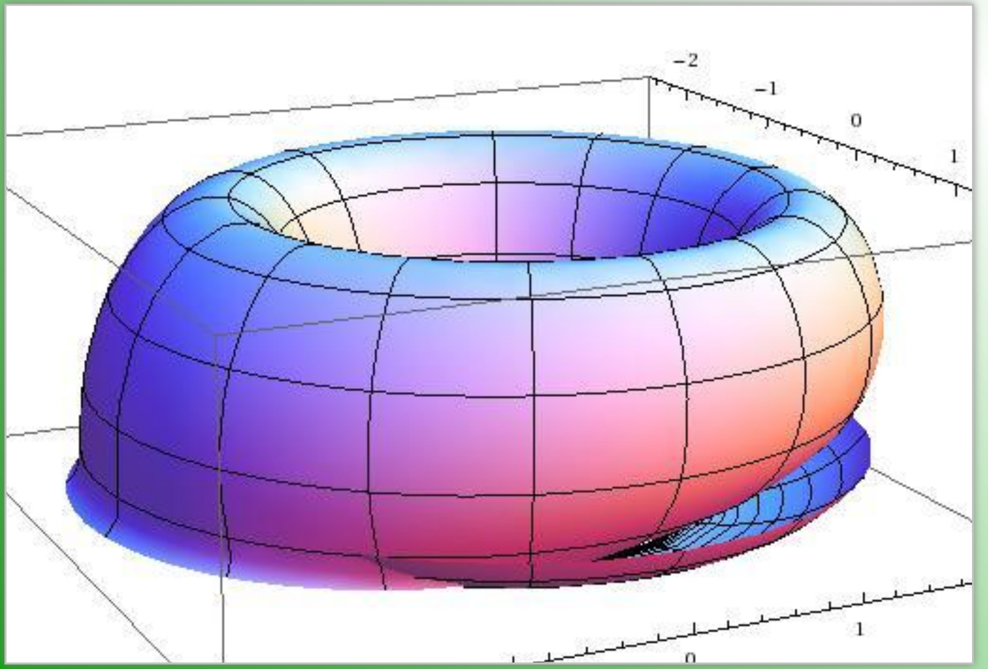
Грубая **гомоклиническая траектория Г.**

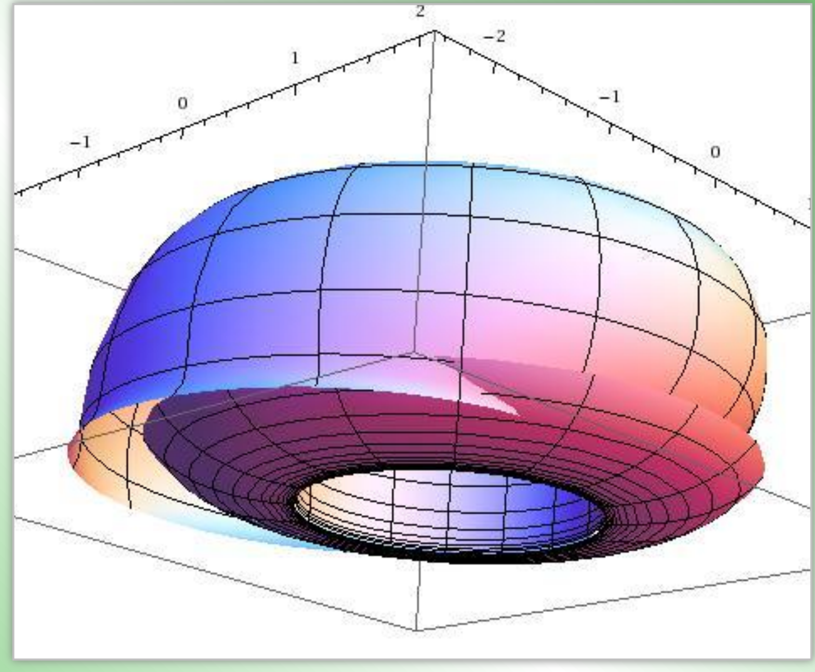
Негрубая **гомоклиническая траектория Γ_0.**

Куски устойчивого и неустойчивого многообразий

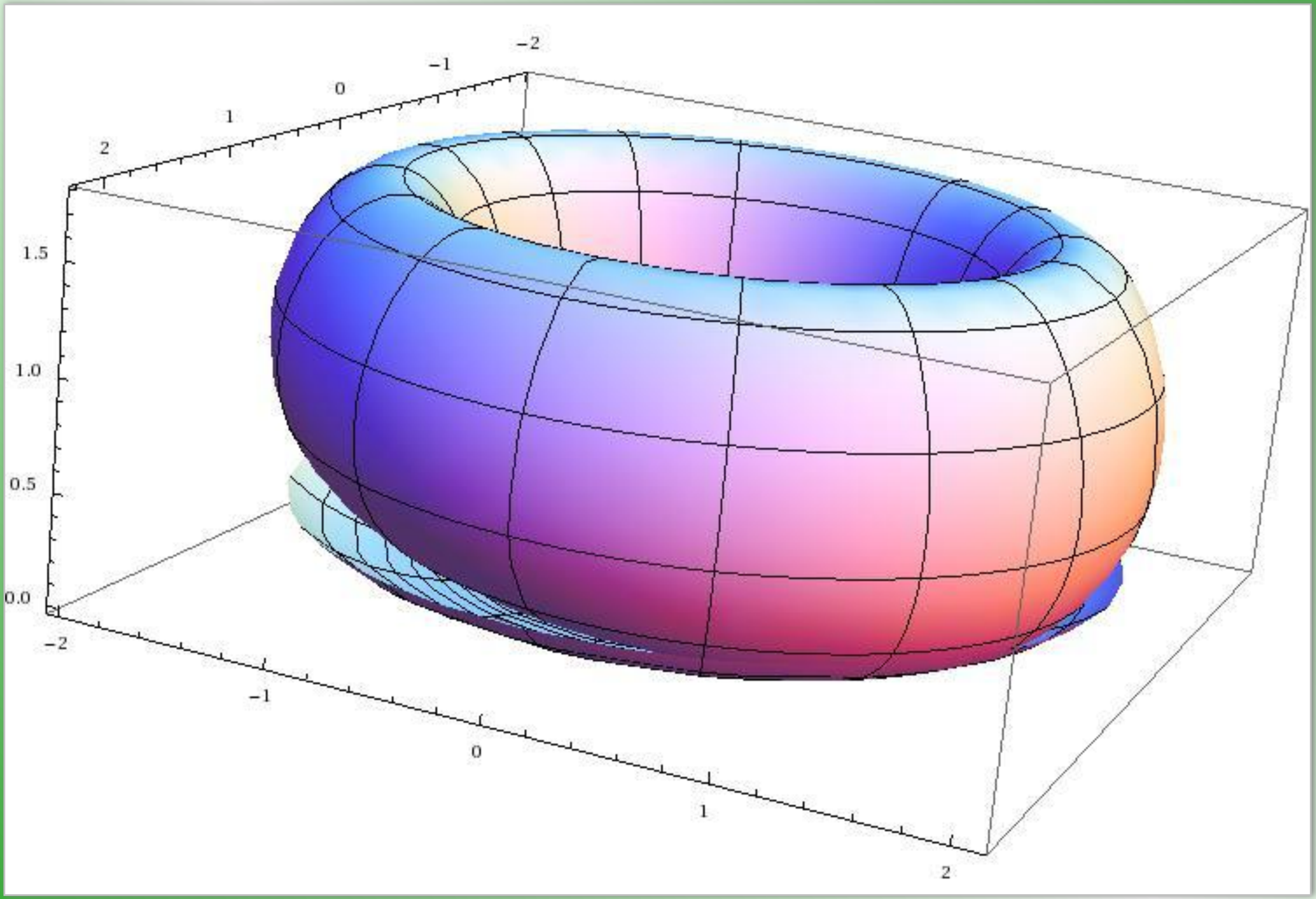


Сегмент гомоклинической траектории



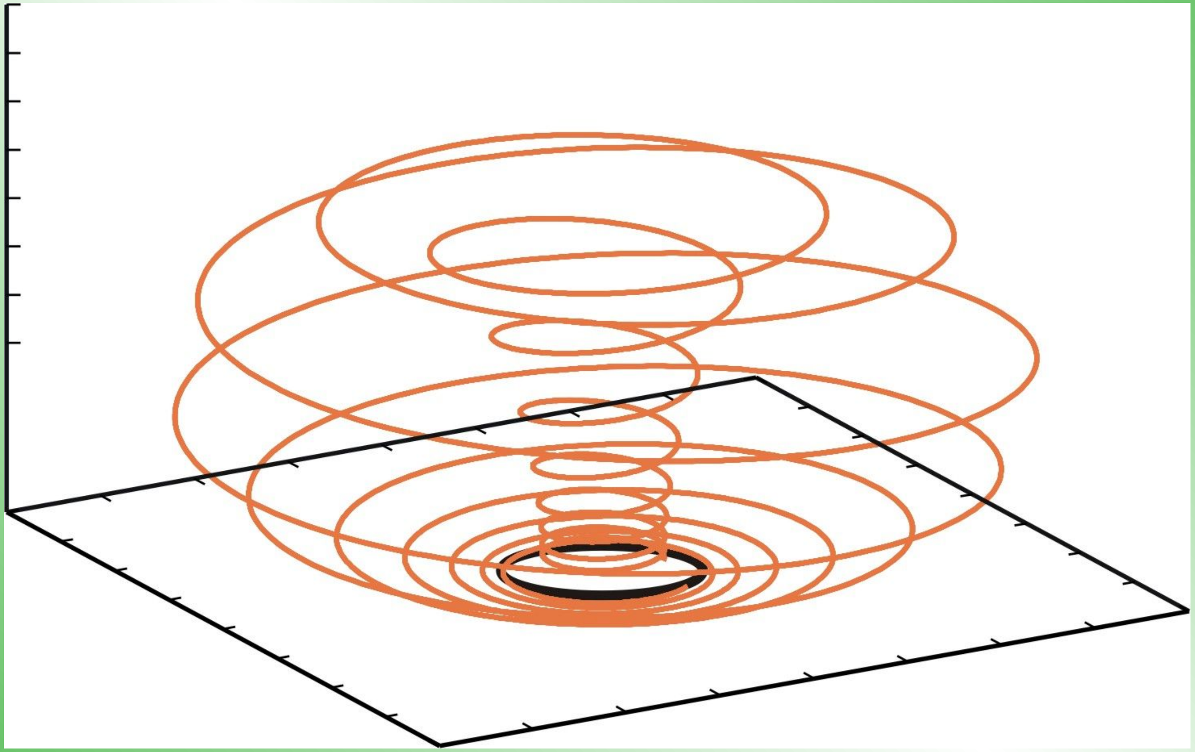


Гомоклиническое касание



Такие траектории обладают тем свойством, что

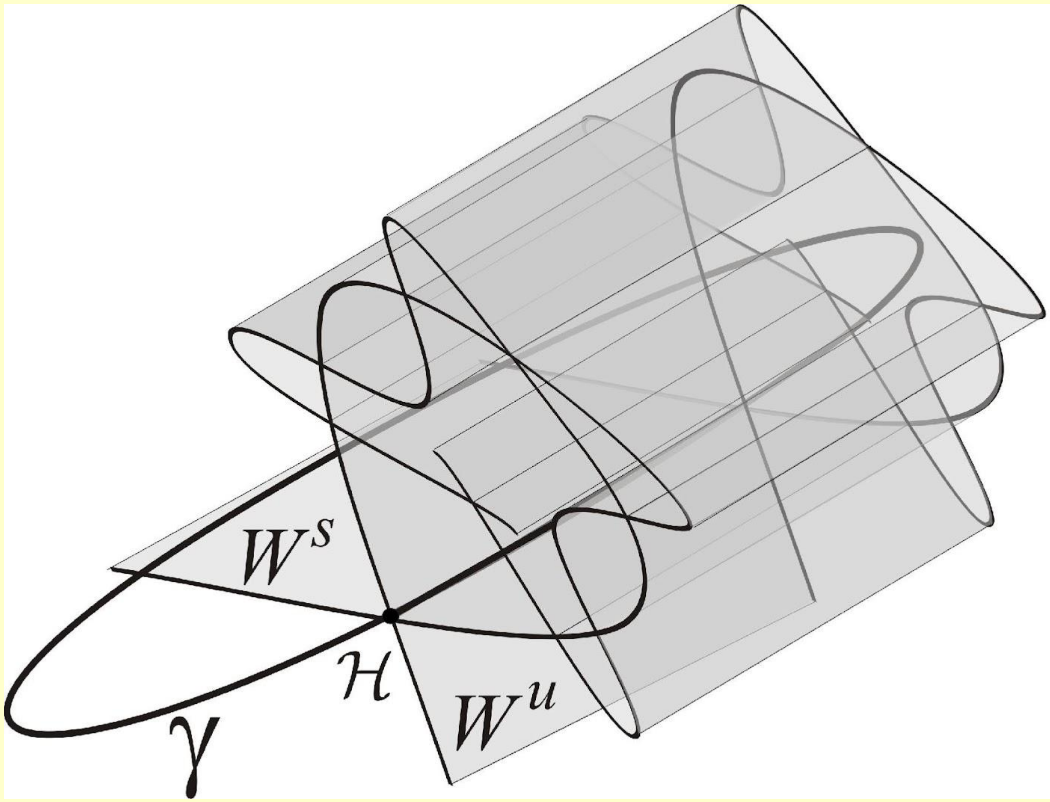
$$\Gamma, \Gamma_0\big|_{t\to\pm\infty} \to \gamma:$$



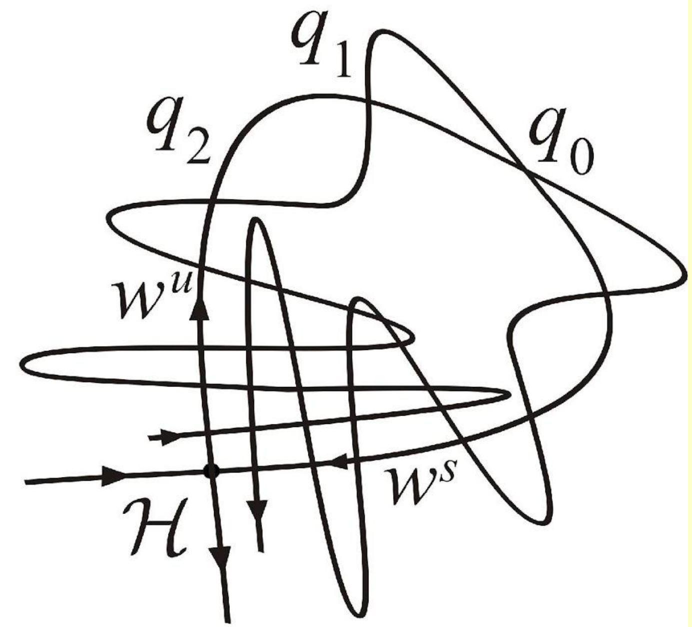
Поэтому гомоклинические траектории называются *двоякоасимптотическими*.

Из наличия одной гомоклинической траектории следует существование бесконечного их числа:

В исходном пространстве



В сечении



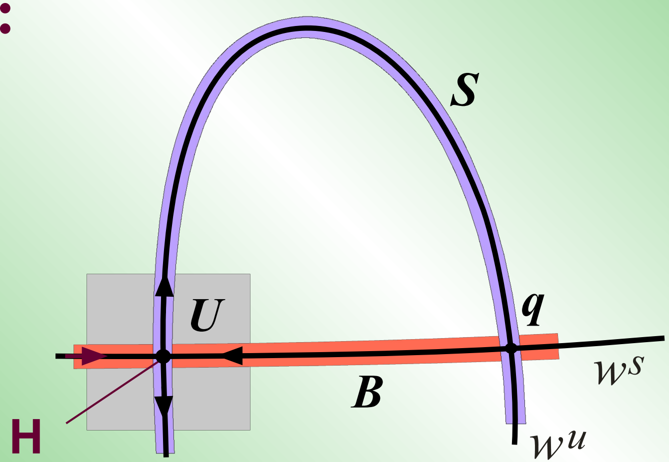
$$Q = \{q_i\}_{i=-\infty}^{+\infty},\ q_{i+1} = f(q_i)$$

Траектория

гомоклинической точки q_0.

Рождение подков

Рассмотрим малую окрестность U гиперболической точки H:



$$S = f^{m}(U)$$

$$B = f^{-n}(U)$$

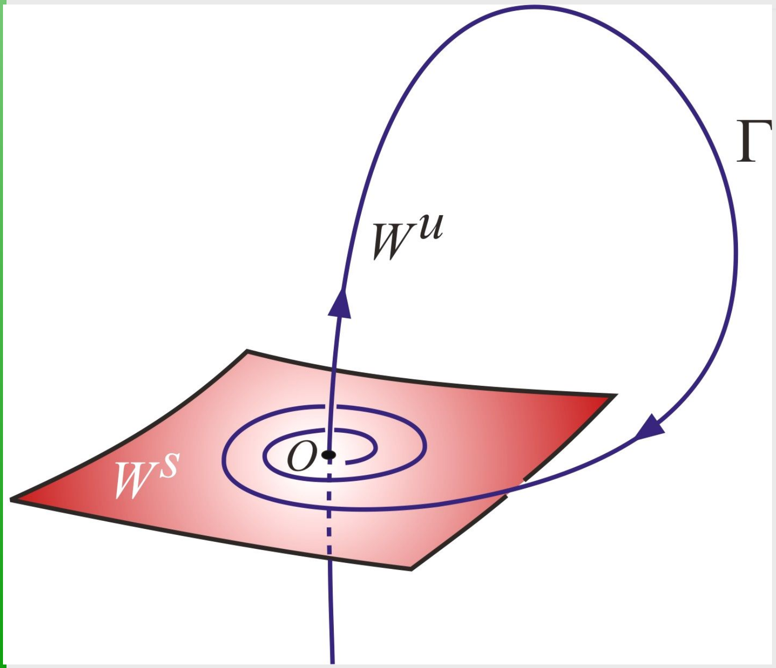
Действие отображения f приводит к тому, что найдутся такие m, n, что $q \in f^{k}(U)$ при $k \geq m$ и $q \in f^{-l}(U)$ при $l \geq n$.

Теорема Смейла-Биркгофа. **Если диффеоморфизм $f : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{n}$ имеет гиперболическую точку H и гомоклиническую точку q, то в *любой малой окрестности* H *существует подкова*.**

Следствие. **Наличие гомоклинической точки влечет *положительность энтропии* динамической системы.**

Системы с гомоклиническими петлями негрубые. Поэтому при возмущениях петли _расщепляются**_, что может приводить к рождению очень *сложной динамики*.**

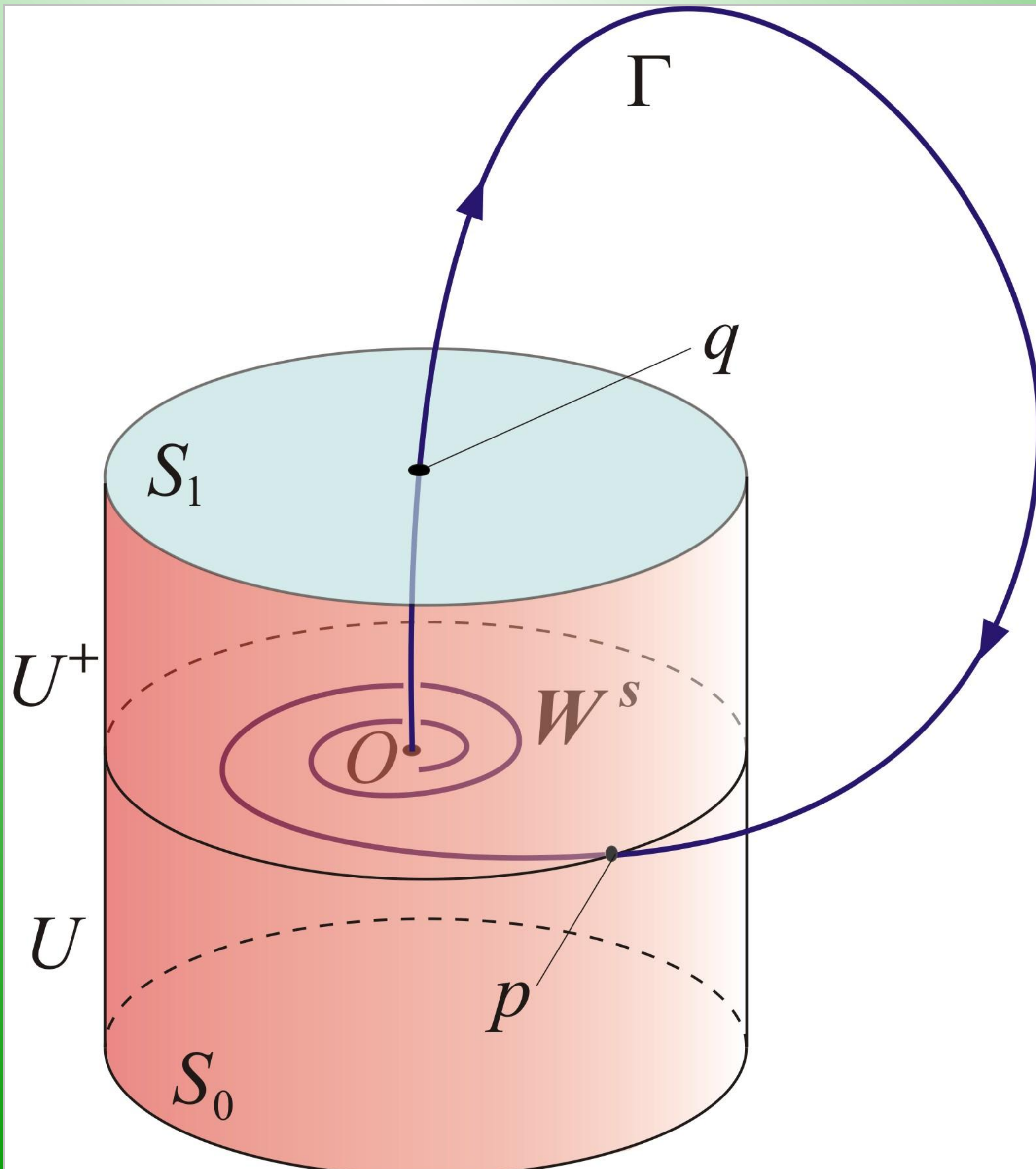
Среди динамических систем, имеющих гомоклинические структуры, важное место занимают такие, чей аттрактор содержит петлю состояния равновесия типа *седло-фокус:**



Теорема Шильникова: в полной окрестности значений параметра, при котором существует петля седло-фокуса, *имеются подковы Смейла*.

***Седло-фокус неисчерпаем, так же как и электрон.**

Рассмотрим рождение подковы из седло-фокуса Г.



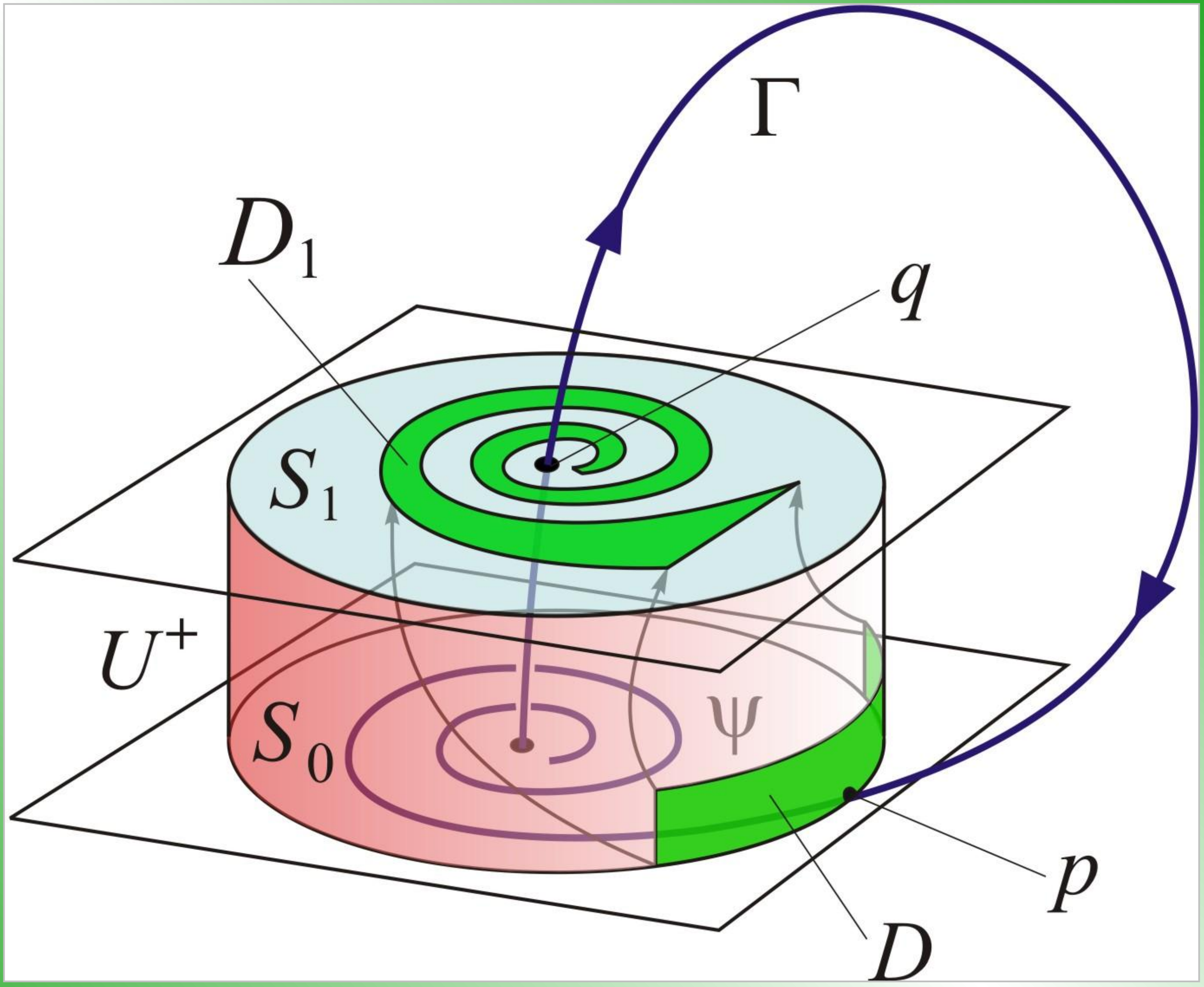
U **– окрестность точки** ***O*****:**

$$S_0 \cup S_1 \Rightarrow U$$

W ^{s} **делит** ***U*** **на** ***U*** $^+$ **и** $U \setminus U^+$.

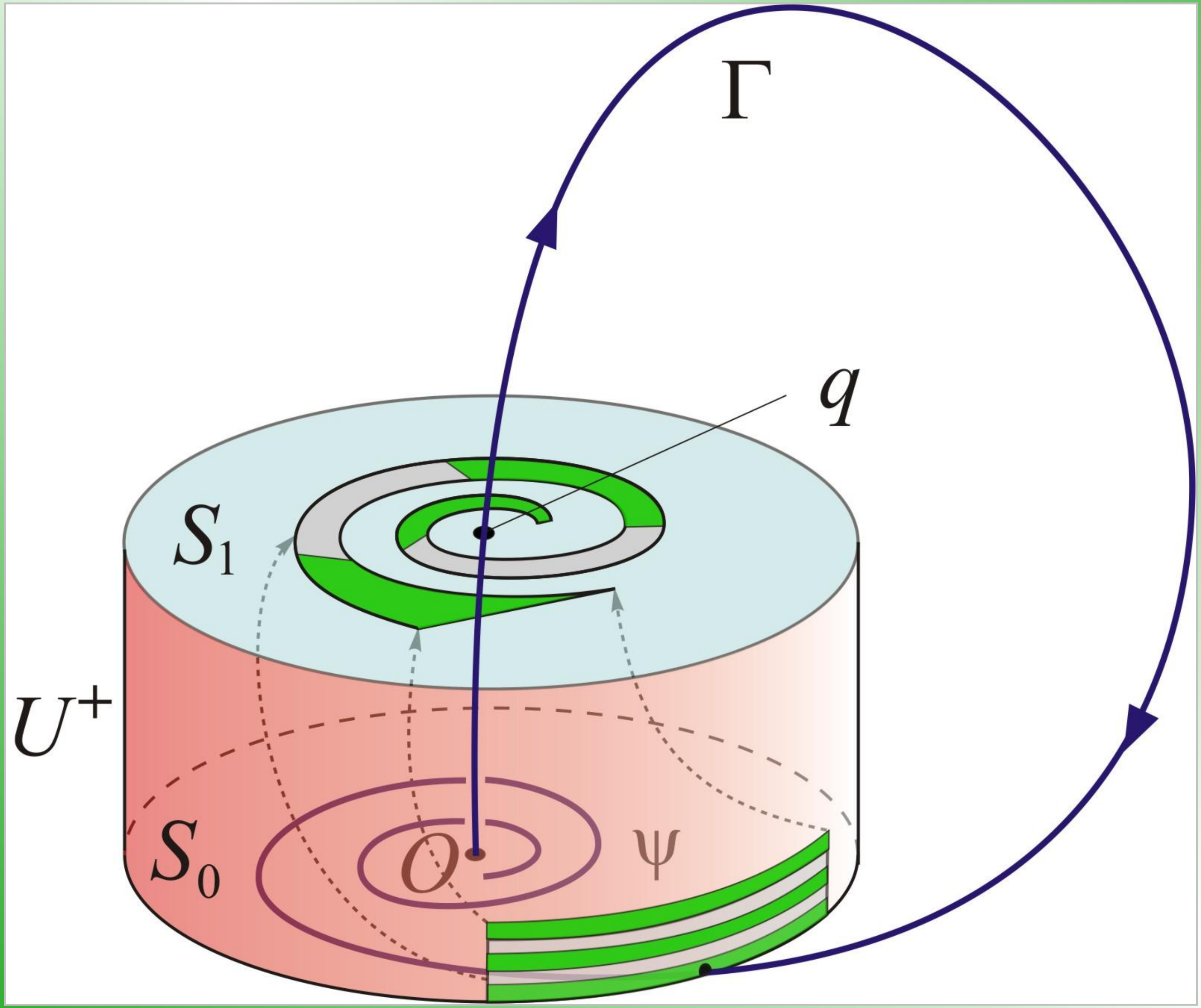
Для достаточно малого ***U*** $^+$ **существует отображение**

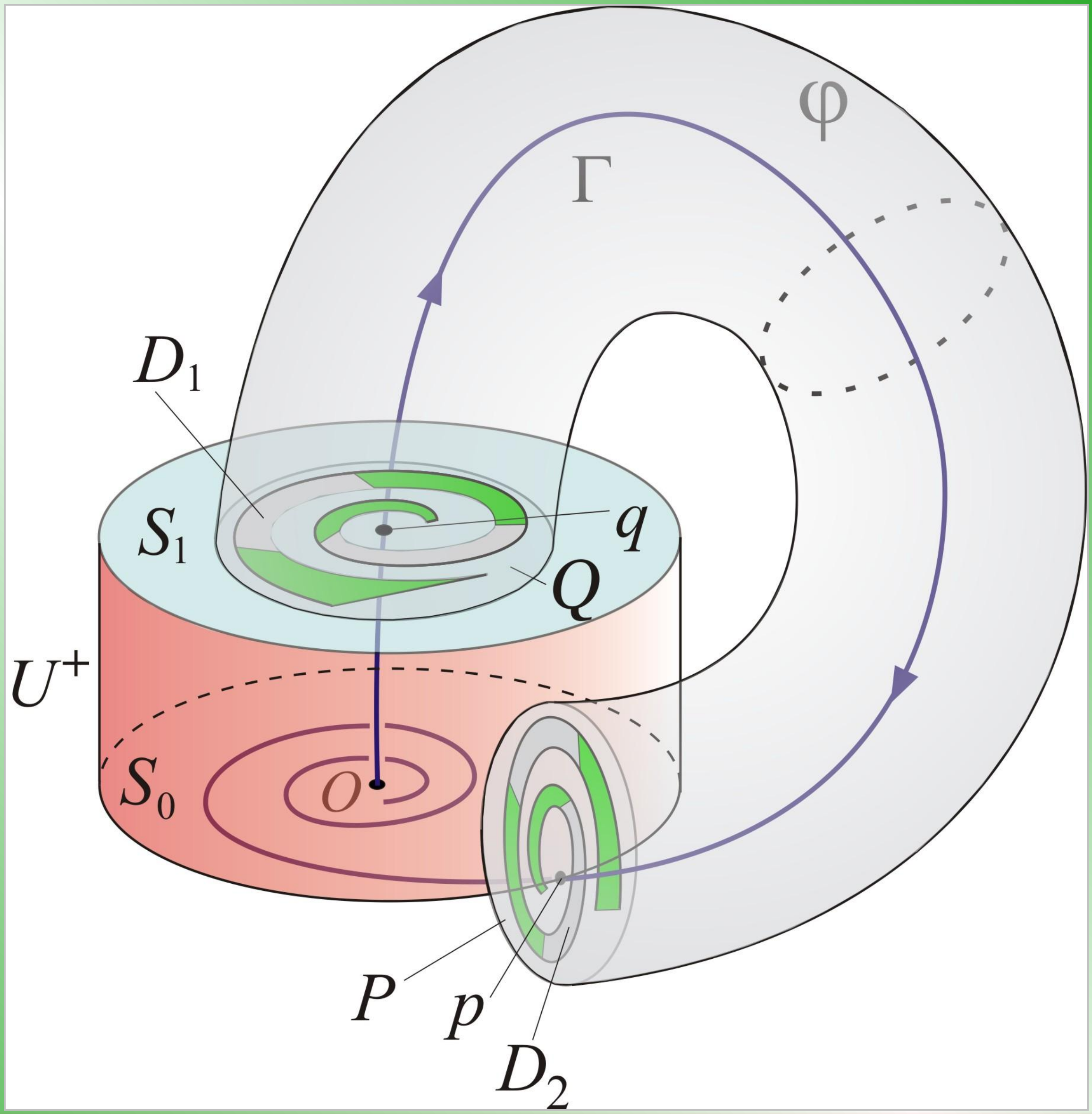
$$\psi : S_0 \to S_1$$



Отображение ψ **преобразует область** $D \subset S_0$ **в «толстую спираль»** $D_1 \subset S_1$**, т.е.** $\psi(D) = D_1$**.**

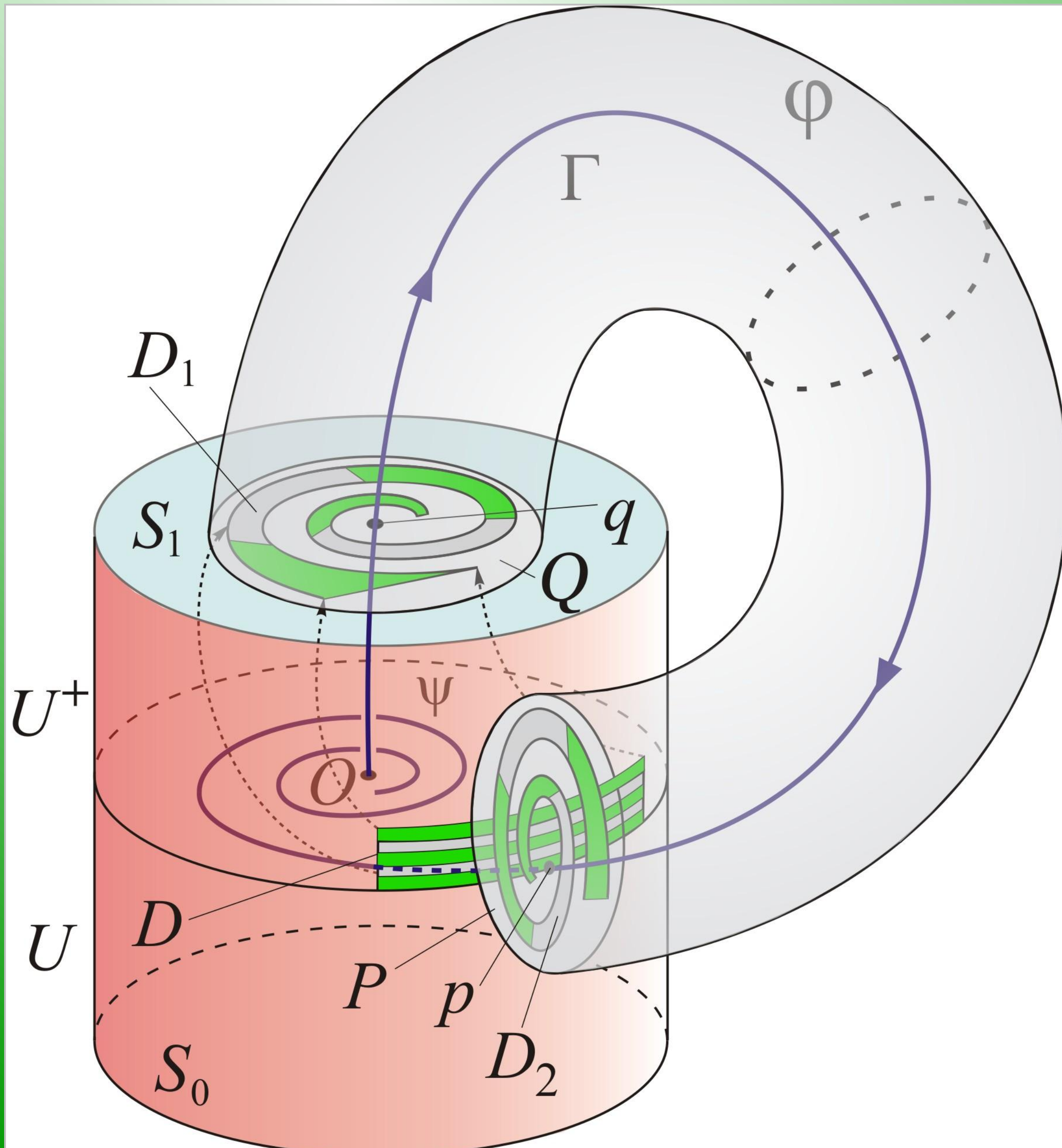
Таким образом, горизонтальные полосы на *D* отображаются на полосы, лежащие внутри двух принадлежащих S_1 спиралей, закручивающихся вокруг точки *q*:





Существует диффеоморфизм $\varphi : Q \to P$
и $\varphi(D_1) = D_2, \varphi(q) = p.$

Таким образом, получим следующую картину:

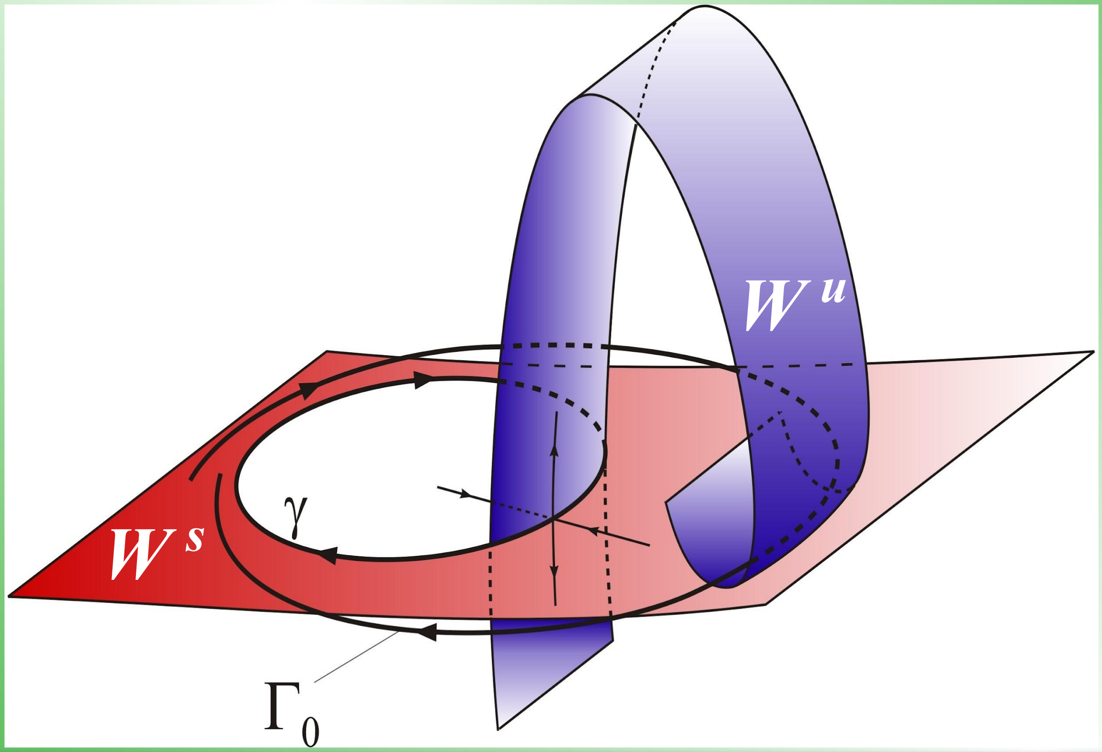


Отображение $\varphi(\psi)$ преобразует исходную полосу *D* в спираль D_1, которая отображается в D_2 и накладывается на *D*.

$$\varphi(\psi(D)) \cap D$$

подкова Смейла **Ω**

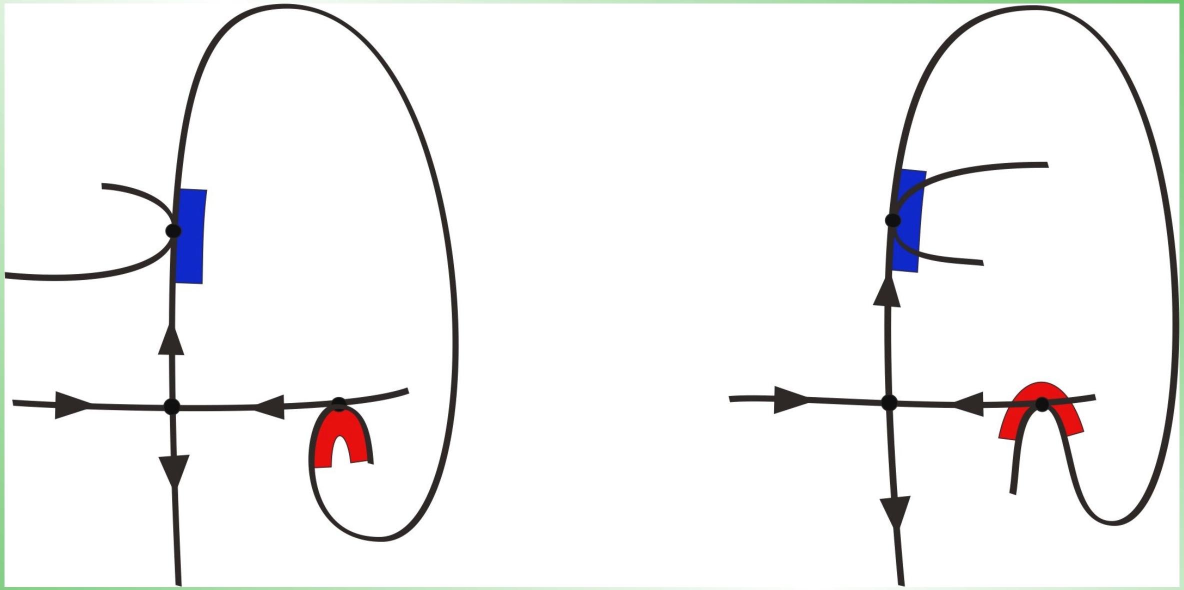
5. Дикие гиперболи-ческие множества



Системы с касаниями W^s и W^u <u>*плотны*</u> в пространстве динамических систем и образуют области, называемые *областями Ньюхауса*.

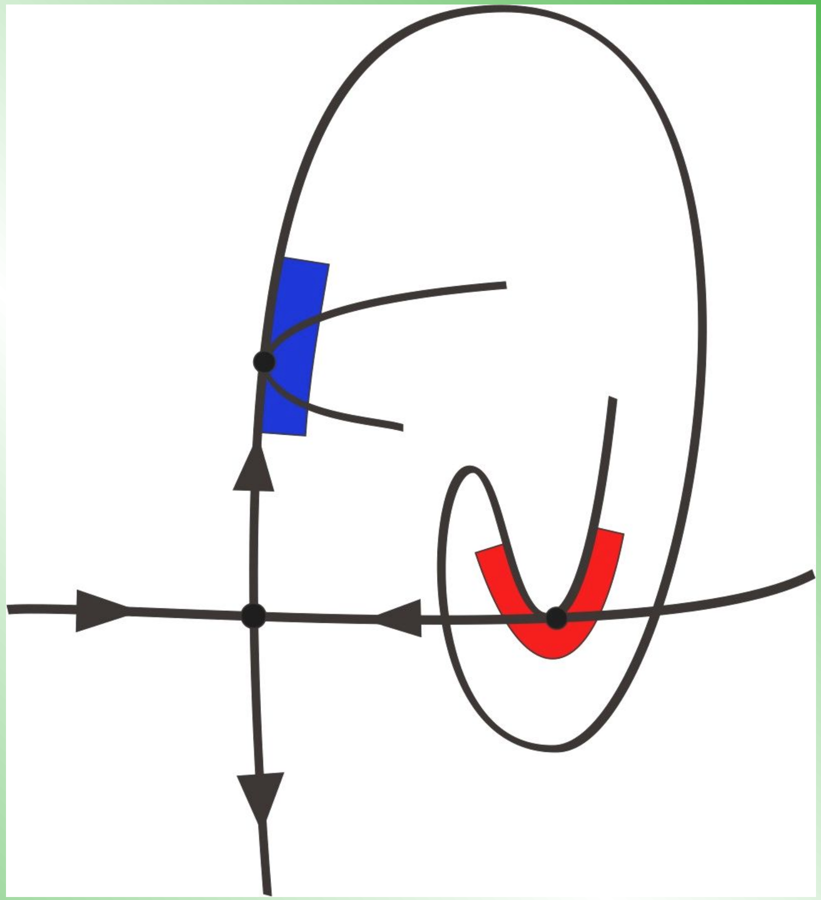
В зависимости от геометрии, в системе возможны только *три различных типа* гомоклинических касаний. Для каждого из них структура множества Δ траекторий в малой окрестности негрубой кривой Γ_0 может быть качественно различной.

I тип



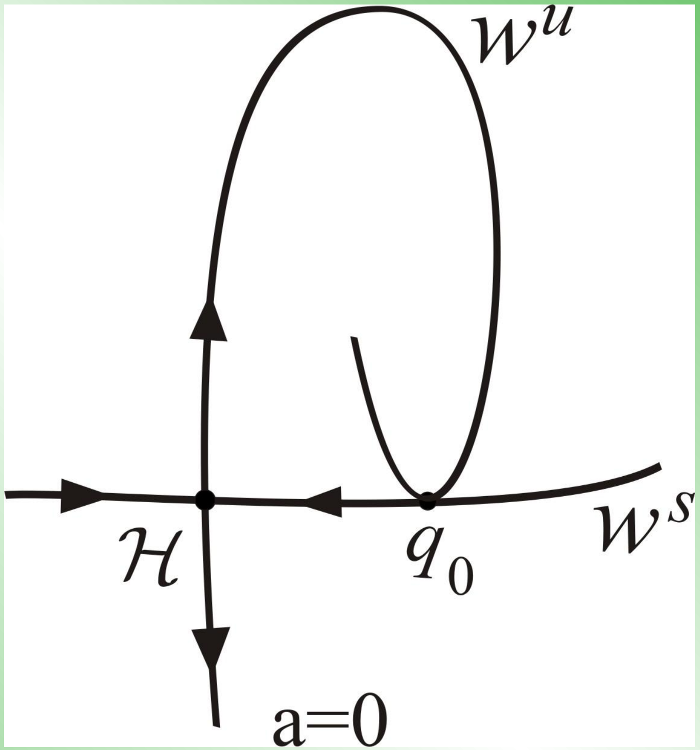
Такие диффеоморфизмы отвечают границам, отделяющим системы с простым поведением траекторий от областей с хаосом. При переходе через нее сложная динамика возникает «взрывным» образом. Такое явление называется *Ω-взрывом*.

II тип



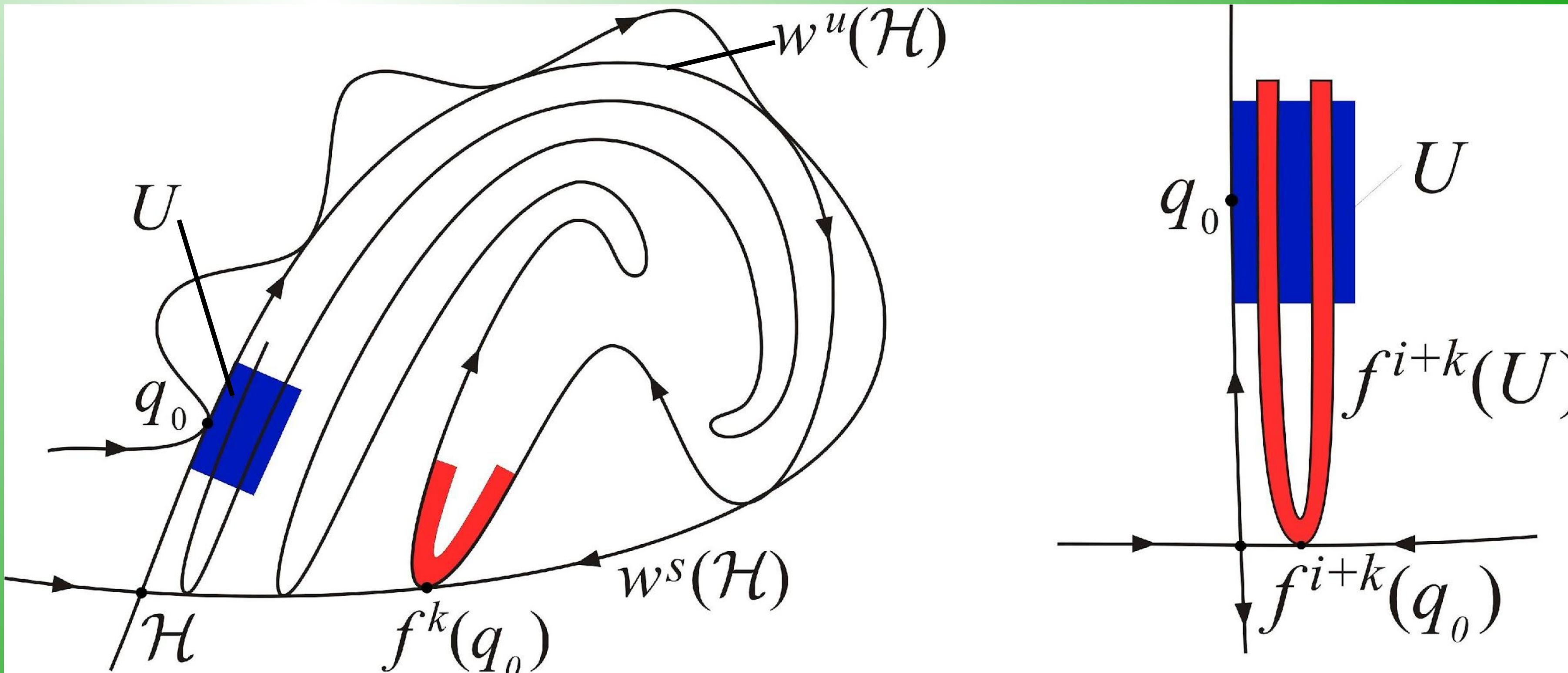
Множество Δ траекторий в малой окрестности негрубой кривой Γ_0 в системах такого типа имеет неравномерную гиперболическую структуру, т.е. *все траектории, кроме самого касания, – гиперболические*.

III тип



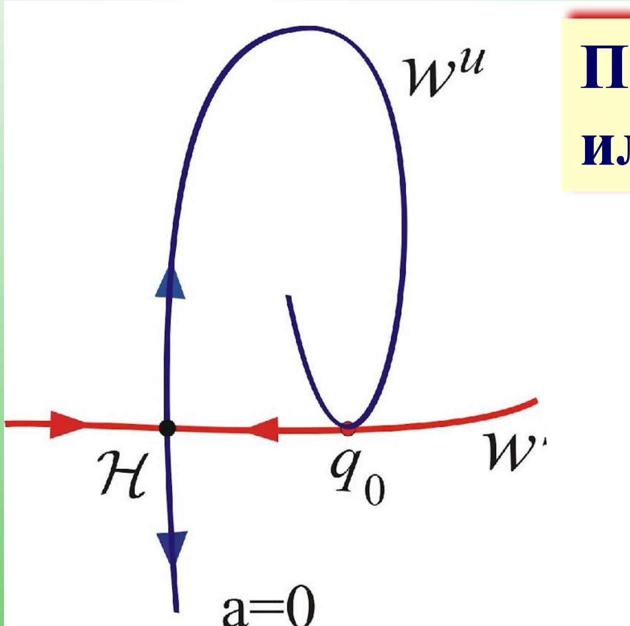
Множество Δ содержит *нетривиальные гиперболические подмножества* и, следовательно, системы такого типа обладают хаотической динамикой. При этом *касания третьего класса существуют в окрестности любой системы с гомоклиническим касанием*.

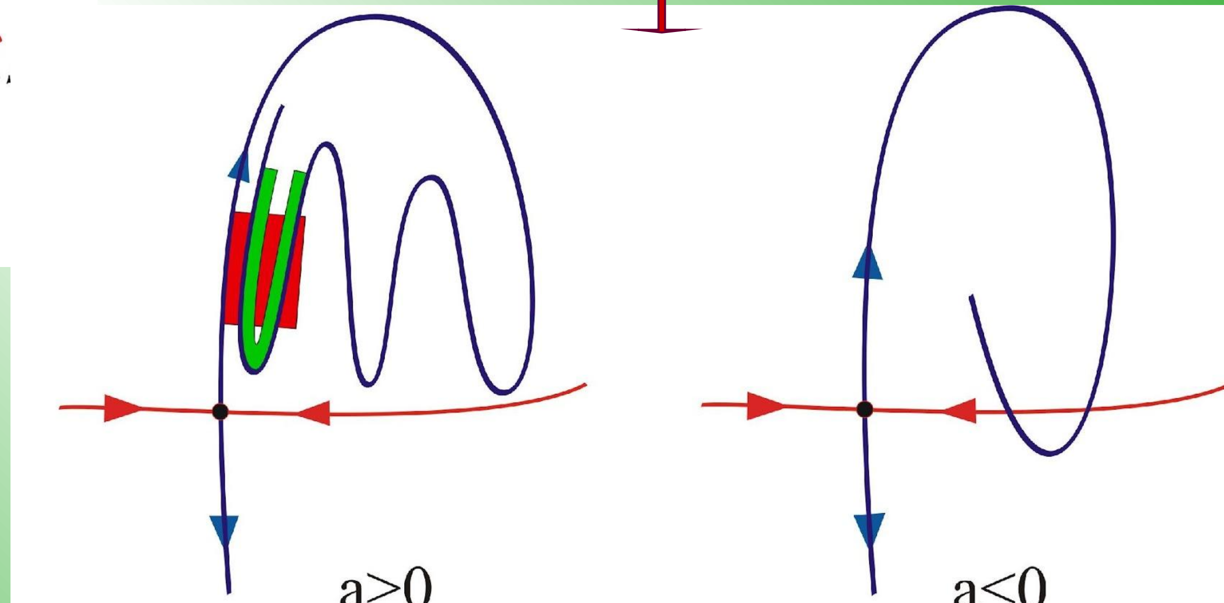
Этот результат поясняет следующее построение:



Действие отображения f приводит к тому, что для некоторого ***k*** точка $f^k(q_0)$ будет принадлежать ***w*** ^{s} (Н) . Тогда последовательные итерации $f^{i+k}(U)$ приведут к пересечению с ***U*** и к рождению подковы.

При возмущении *f*(*x*,*a*) касания *исчезают* или появляются *пересечения* многообразий

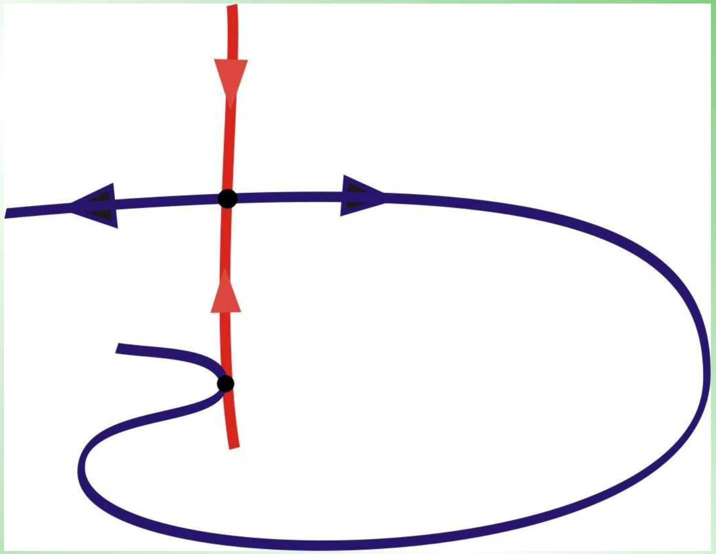




Происходит *качественная* перестройка:

- **если *a* > 0, то касания отсутствуют и *подковы исчезают*;**
- **при *a* < 0 отображение имеет трансверсальную гомоклиническую точку и, как следствие, *подкову*.**

Допустим, что устойчивое и неустойчивое многообразия имеют квадратичное касание:



При возмущении такой структуры наблюдаются эффекты, связанные с рождением т.н. *диких гиперболических множеств* – равномерно гиперболических множеств, устойчивое и *неустойчивое многообразия которых имеют квадратичное касание, которое невозможно устранить посредством малых гладких возмущений*.

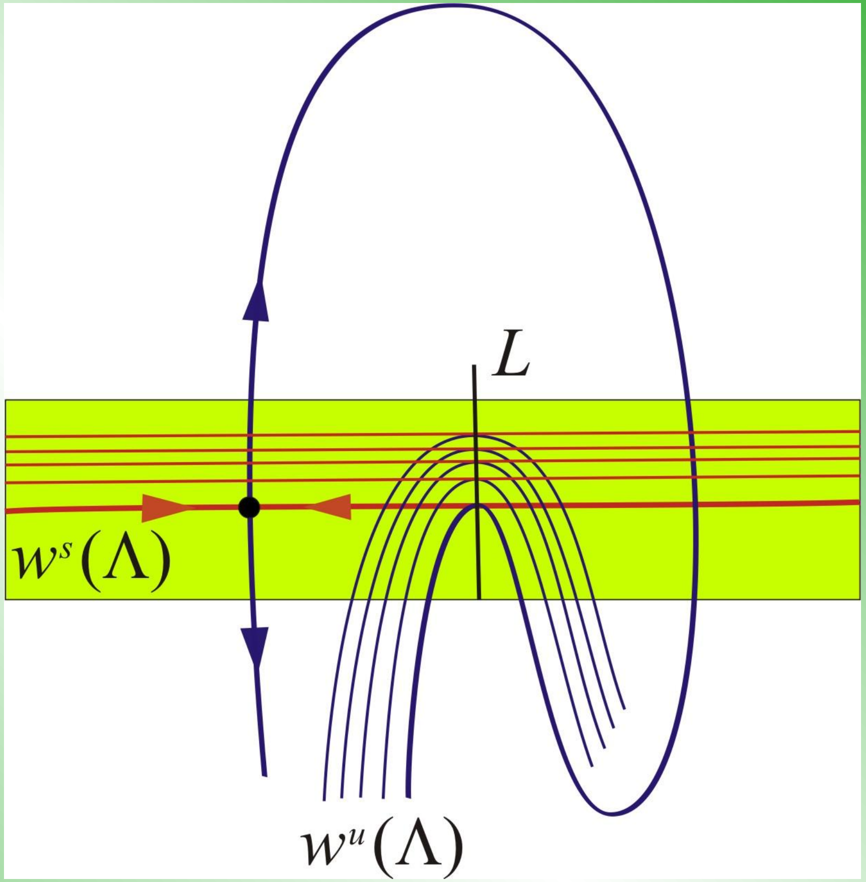
Теореме Ньюхауса: **для общих семейств диффео-морфизмов $f(x,a)$ существуют интервалы, где плотны значения параметра a, при которых $f(x,a)$ имеет гомоклинические касания.**

При касании многообразий рождаются подковы (Смейла)

Канторово множество

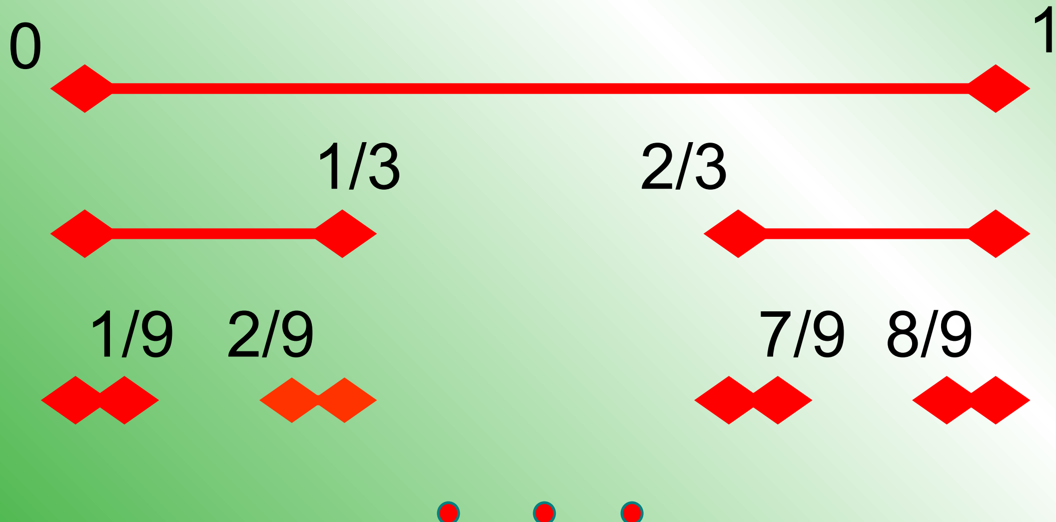
Таким образом, для гиперболического инвариантного множества Λ, которое задается диффеоморфизмом *f*(*x*,*a*), устойчивое и неустойчивое многообразия представляют собой произведение канторова множества на отрезок.

Пусть *L* – кривая, проходящая через w^u. На этой кривой существуют канторовы множества $K_s = w^s(\Lambda) \cap L$ **и** $K_u = w^u(\Lambda) \cap L$.
Если имеется точка $q_0 = K_s \cap K_u$, **то она будет точкой касания многообразий** $w^s(\Lambda)$ **и** $w^u(\Lambda)$ **.**



Чтобы определить возможность пересечения K_s и K_u, необходимо использовать метрическую характеристику канторова множества – его толщину $d(K)$

отношение длин интервалов, которые в процессе построения выбрасываются, к длинам остающихся промежутков:



$$d_F = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

__*Теорема (Ньюхаус, 1970).*__ **Если K_1 и K_2 – два канторовых множества, которые удовлетворяют неравенству $d(K_1)d(K_2) > 1$, то $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$.**

Доказательство существования касаний, которые *не исчезают при возмущениях*, сводится к построению канторовых множеств конечной толщины.

__*Теорема (Ньюхаус, 1979).*__ **В пространстве гладких динамических систем существуют открытые области, где плотны системы с гомоклиническими касаниями.**

Это – *области Ньюхауса*. Сами инвариантные гиперболические множества, содержащие касания, называются *дикими гиперболическими множествами*.

Сложность динамики систем с гомоклиническими касаниями

- В областях Ньюхауса плотны системы, имеющие *бесконечно много устойчивых циклов*.
- Здесь существует *счетное множество седловых и абсолютно неустойчивых циклов*.
- Такие системы имеют *счетное множество устойчивых и неустойчивых инвариантных торов, сосуществующих со счетным множест-вом седловых, устойчивых и абсолютно неустой-чивых циклов*.

При гладких возмущениях систем с гомоклиническими касаниями могут рождаться циклы произвольно высоких порядков вырождения.

! ***Невозможность полного качественного описания моделей со сложным поведением в рамках конечно-параметрического семейства динамических систем***

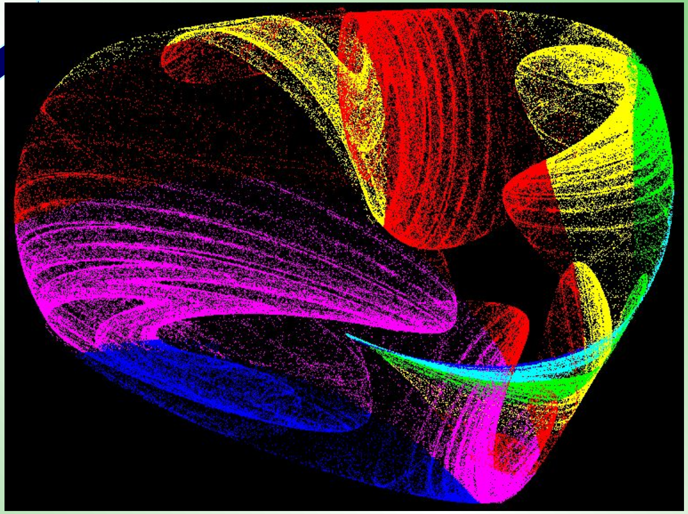
Более того, некоторые динамические свойства, которые казались *экзотическими*, на самом деле *являются типичными* для систем с гомоклиническими касаниями.

Негрубые гомоклинические траектории никогда не бывают изолированными.

6. Гиперболические и другие аттракторы

Аттрактор динамической системы называется *странным*, если он отличен от конечного объединения (гладких) под-многообразий пространства *M*

**подчеркивается *негладкая структура аттрактора*:
в некотором сечении он представляет собой *канторово множество* (фрактал).**



Странные аттракторы обладают *некоторой степенью* гиперболичности, однако эта гиперболичность имеет иную форму, нежели равномерная гиперболичность. Такие аттракторы действительно являются сложно устроенными множествами и они не могут быть изучены посредством использования результатов гиперболической теории.

В областях Ньюхауса могут быть плотны хаотические системы со *счетным числом странных аттракторов*. Более того, в окрестности семейства диффеоморфизмов, имеющего гомоклиническое касание устойчивого и неустойчивого многообразий гипреболической точки, могут существовать *подмножества систем, обладающих странными аттракторами*.

Понятие «странный аттрактор» имеет *собирательный* смысл

Обычно считается, что динамическая система обладает странным аттрактором, если в ее фазовом пространстве имеется предельное множество, состоящее из хаотических траекторий. При этом хаотичность может быть обеспечена самыми разными критериями:

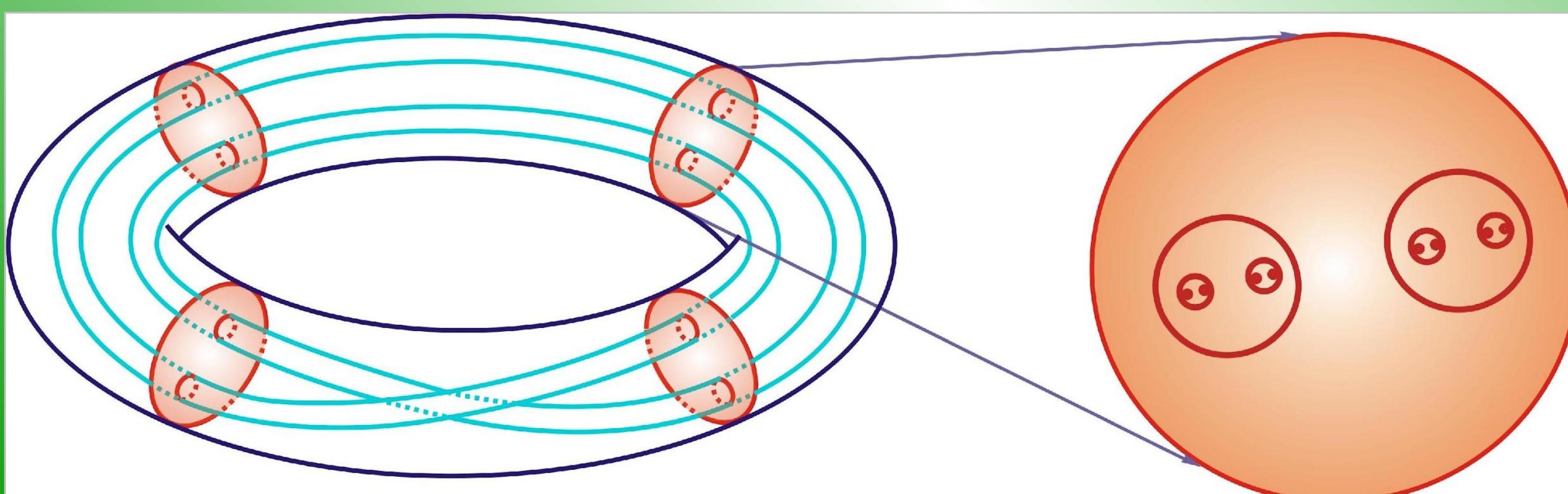
- ***гомо- и гетероклиничностью,***
- ***фрактальностью,***
- ***наличием положительного ляпуновского показателя,***
- ***непрерывностью спектра,***
- ***бифуркациями удвоения периода* и т.п.**

Таким образом, этот термин является скорее парадигмой, чем характеристикой какого-то математического объекта.

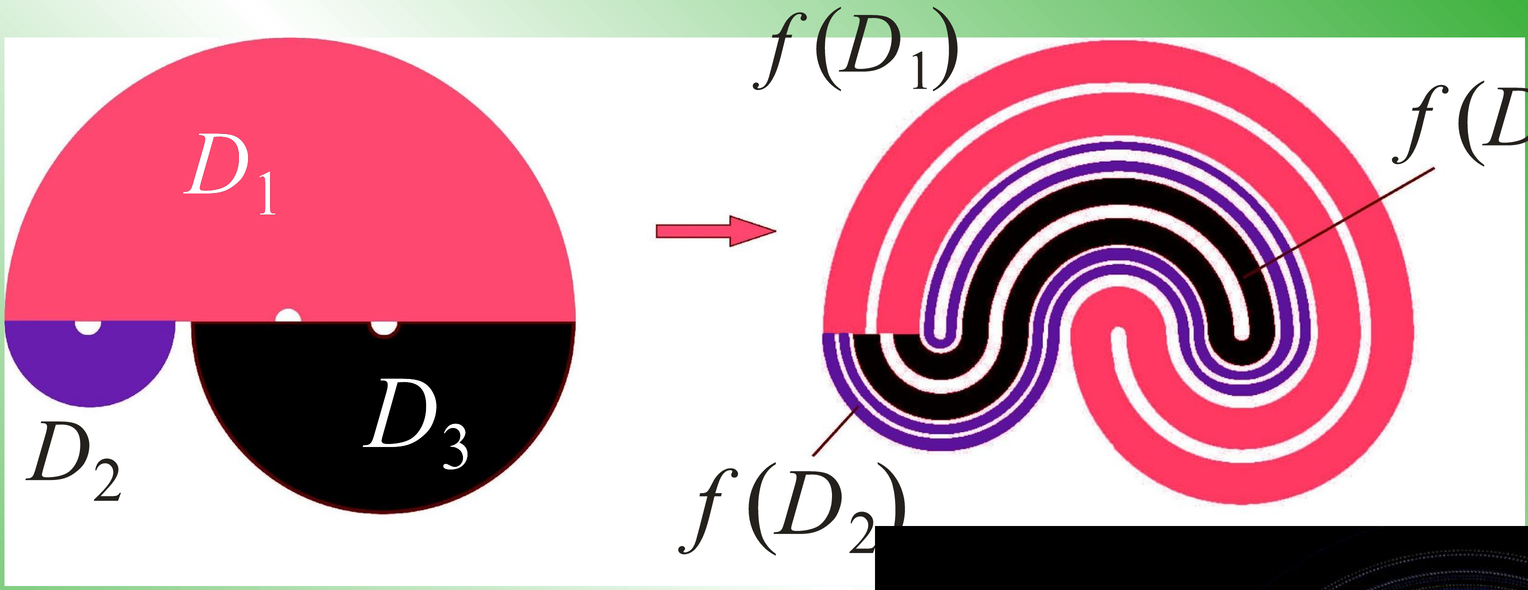
Множество Λ называется *гиперболическим аттрактором* динамической системы, если Λ – замкнутое топологически транзитивное гиперболическое множество и существует такая окрестность $U \subset \Lambda$, что $\Lambda = \bigcap_{n>0} f^{n}(U)$.

Структурно устойчивое (грубое) множество

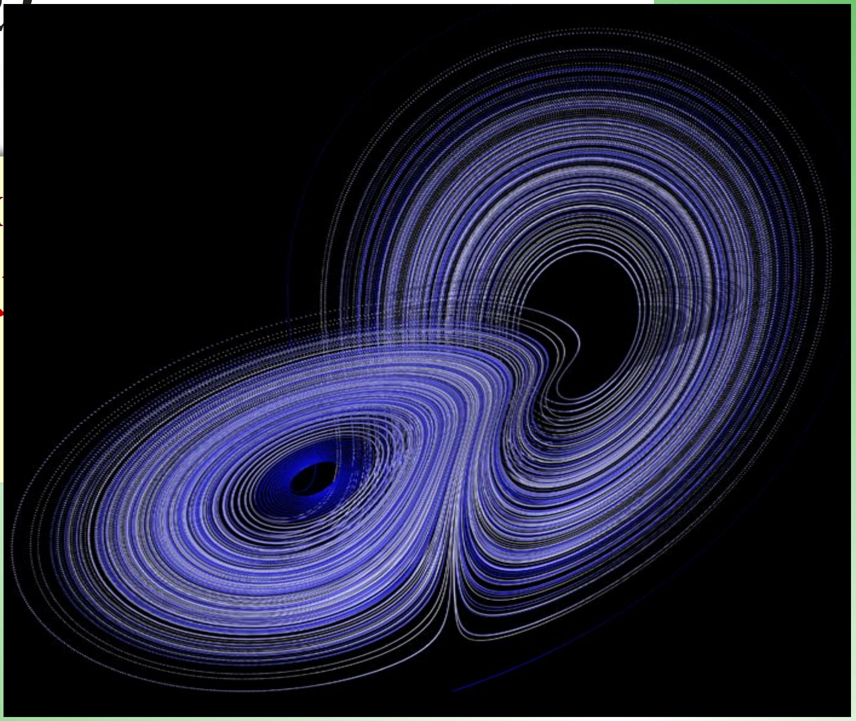
Гиперболический аттрактор Смейла-Вильямса



Гиперболический аттрактор Плыкина



Аттрактор Лоренца не относится гиперболическому типу. Это *негр* множество. Аттрактор Лоренца является *стохастическим*.



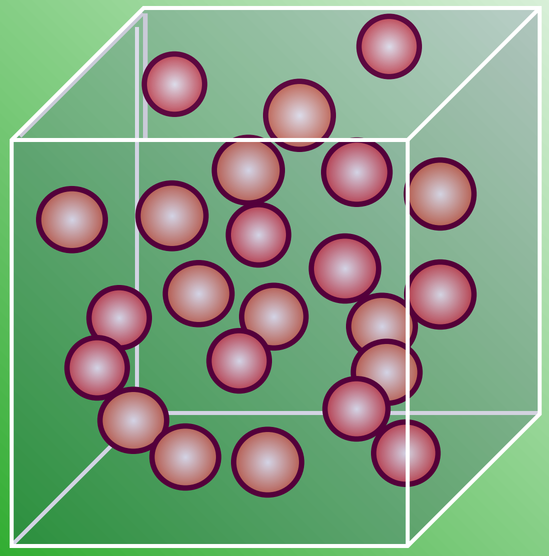
Адекватным математическим образом наблюдаемого развитого хаотического поведения *физической системы* может служить предложенный Я.Г.Синаем *стохастический аттрактор*. При этом, однако, определение «стохастический» *не* ассоциируется с наличием в системе внешних случайных возмущений. Этот термин связывается с существованием инвариантной меры.

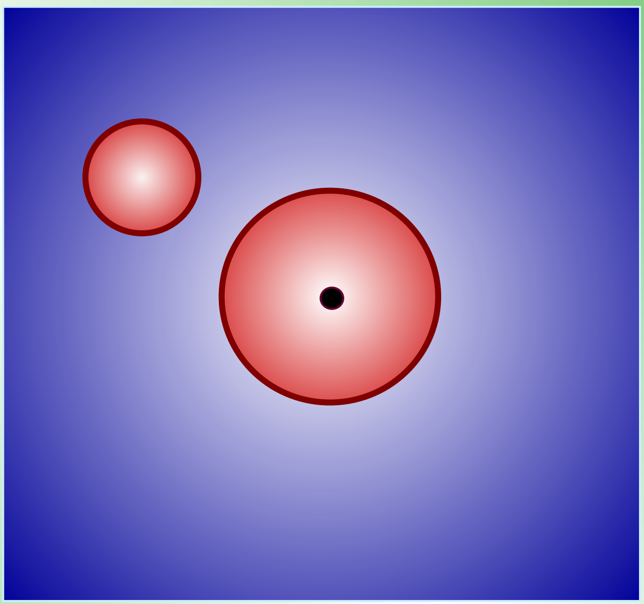
Аттрактор динамической системы называется *стохастическим*, если динамическая система обладает перемешиванием.

Однако большинство хаотических аттракторов принадлежит к *квазистохастическому типу* (т.е. они являются так называемыми *квазиаттракторами*). Такие аттракторы *содержат бесконечное множество устойчивых периодических траекторий*. Примеры: аттракторы Рёслера, Чуа и др. в системах ОДУ

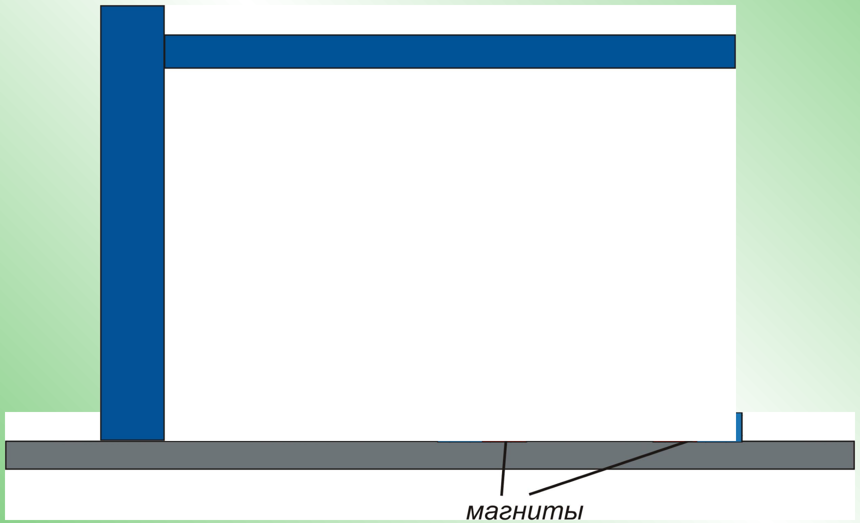
7. Приложения

<u>**Бильярды**</u> **– неравномерно гиперболические системы:**

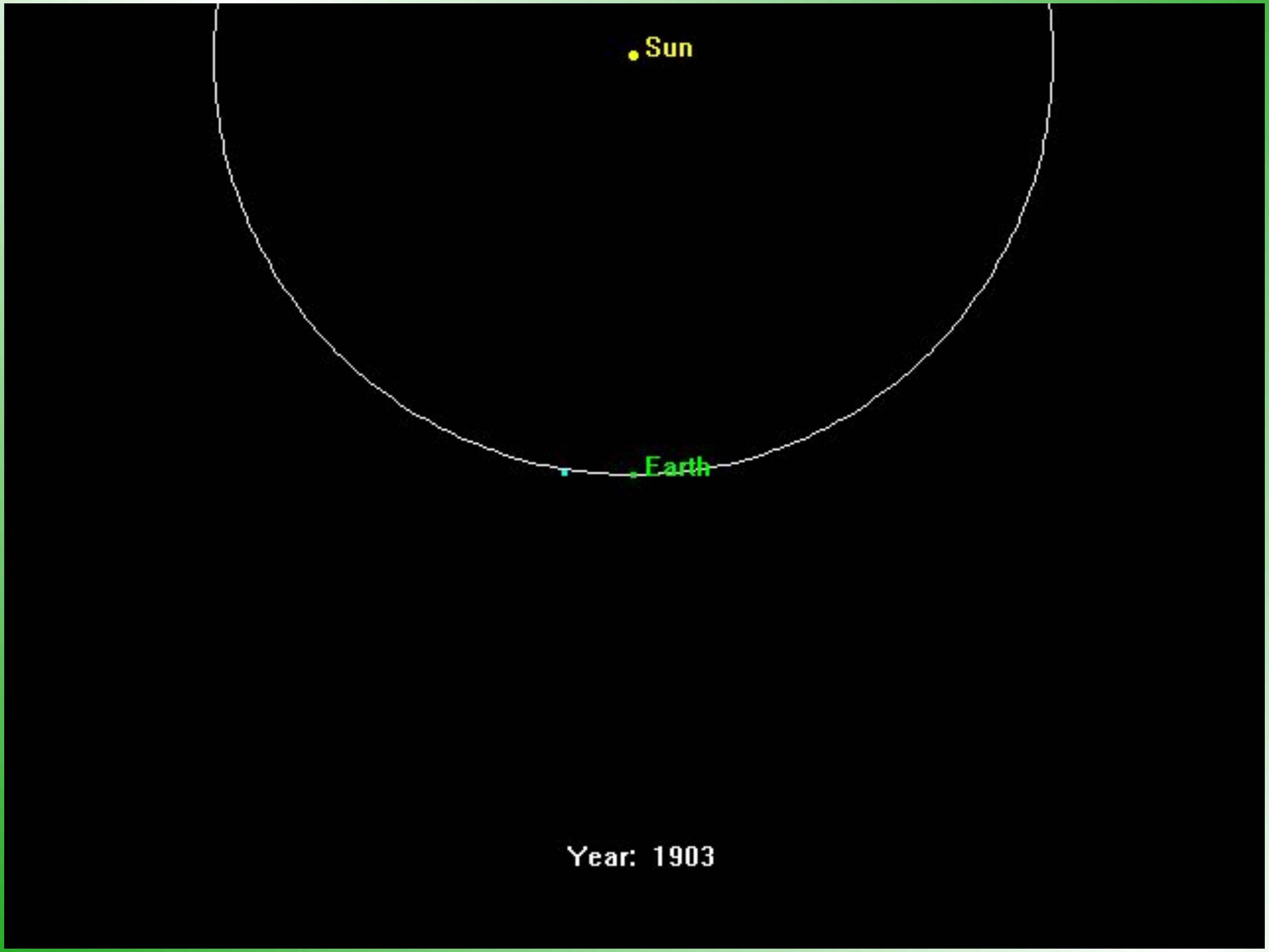




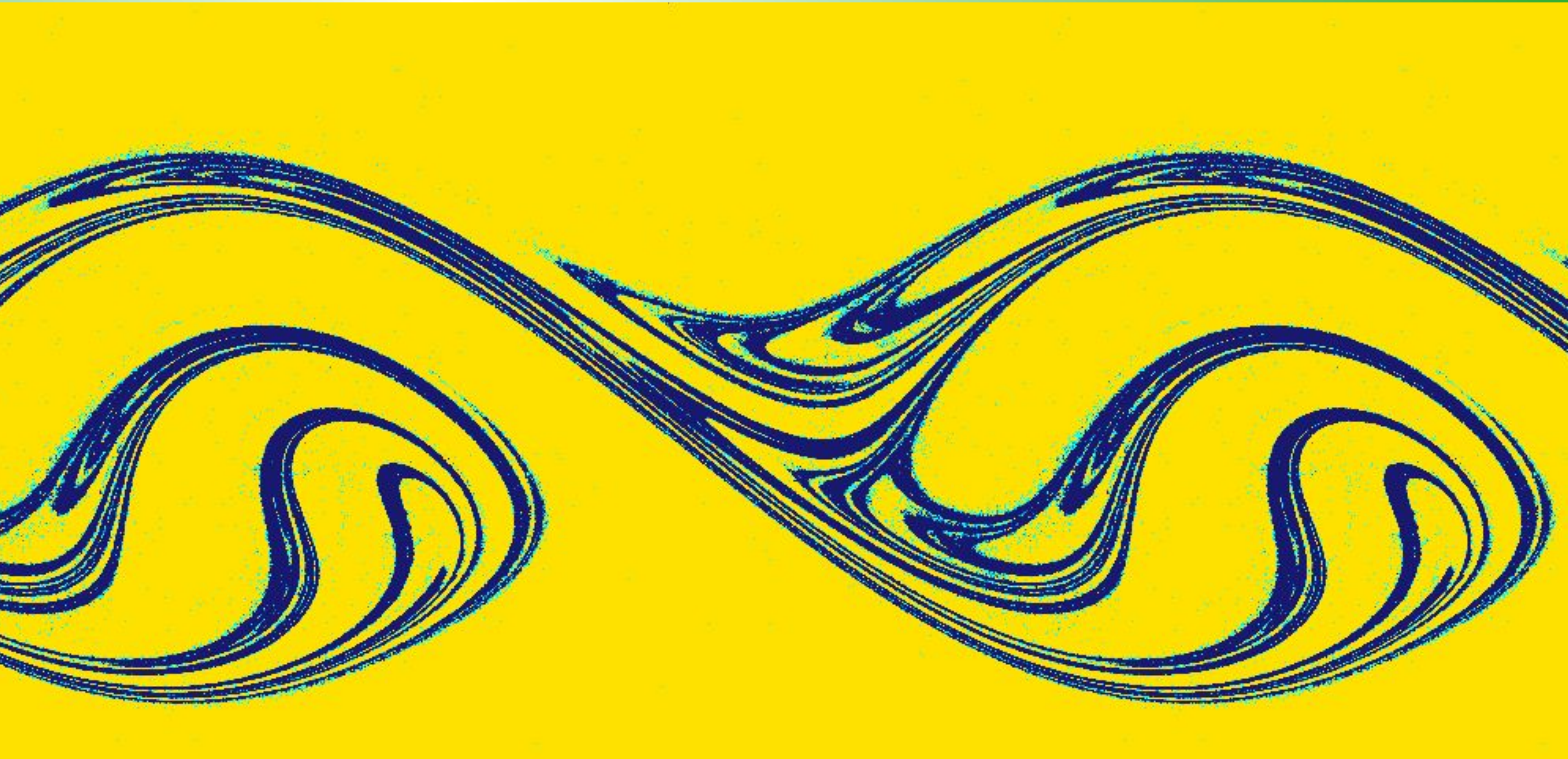
<u>Система Дуффинга.</u> **В такой системе существуют подковы Смейла.**



<u>Небесная механика.</u> Здесь тоже существуют подковы Смейла.



<u>Нелинейный маятник.</u> Здесь наблюдаются гомо- и гетероклинические структуры.



фазовое пространство

Основные достижения теории хаотических динамических систем:

- доказано, что даже очень ***простые системы могут проявлять случайные свойства***;
- достигнут значительный прогресс в понимании происхождения случайности в газе твердых сфер и, как следствие, в ***обосновании эргодический гипотезы Больцмана***;
- удалось частично ***решить проблему возникновения необратимости*** в обратимых детерминированных уравнениях движения;
- хаос рождается ***универсальными путями***, независимо от природы системы;
- случайность может быть обусловлена как внутренними свойствами, так и внешними факторами. При этом всегда можно ***отличить случайное поведение систем от детерминированного хаоса***.

Наконец, нельзя не сказать и об эстетической стороне результатов теории хаоса. Как заметил Д.Рюэль, это *область исследования, в которой будут открыты новые гармонии*.

Спасибо за внимание!