

## 3. Метод сопротивления

### 3.1 Нормальные поля

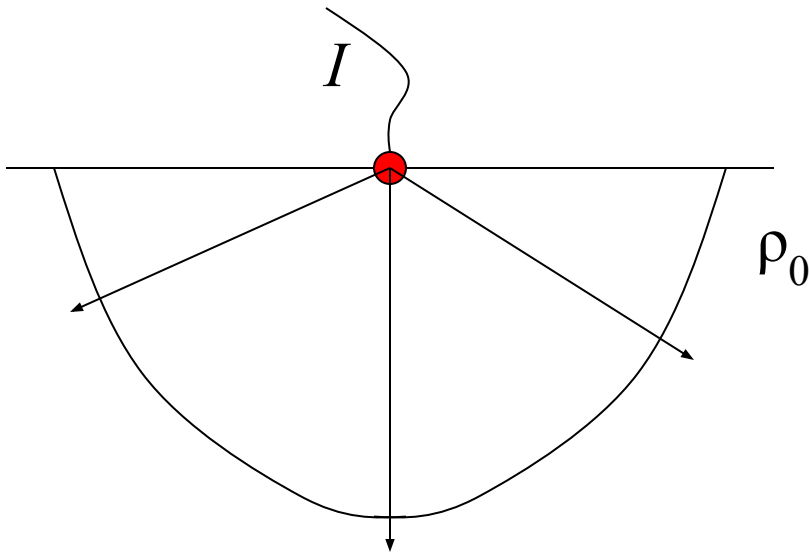
# Поле точечного источника

Уравнение Лапласа в сферической системе координат

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$$

С учетом симметрии:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0$$



$$U = \frac{I \rho_0}{2\pi} \frac{1}{r}$$

# Понятие кажущегося сопротивления

Нормальное поле – поле в однородной среде:

$$\Delta U_0 = \frac{I\rho_0}{2\pi} \cdot \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} \right)$$

В неоднородной среде:

$$\frac{\Delta U}{\Delta U_0} = \frac{\rho_k}{\rho_0}$$

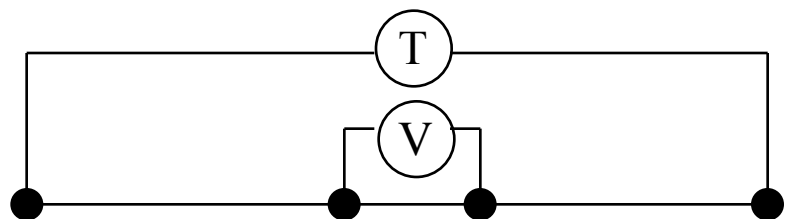
или

$$\rho_k = \frac{\Delta U}{L \cdot I} = K \cdot \frac{\Delta U}{I}$$

где  $L$  – нормальное поле при  $I=1$ ,  $\rho_0=1$

$$L = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} \right)$$

# Установки КС

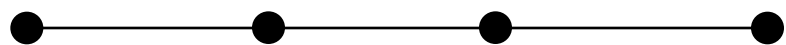


A M N B



Шлюмберже

A M N B

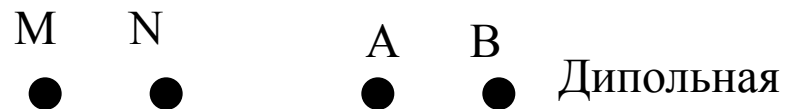


Веннера

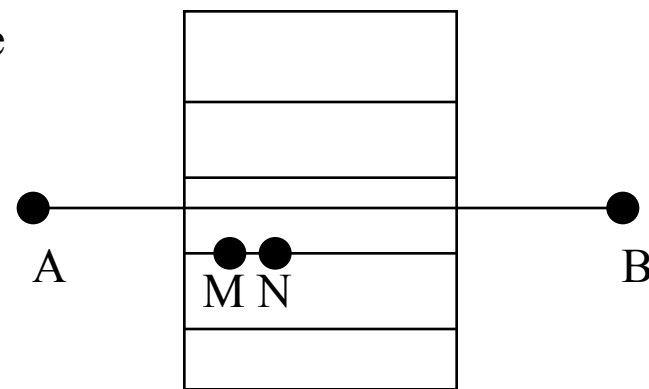
A M N



Трехэлектродная

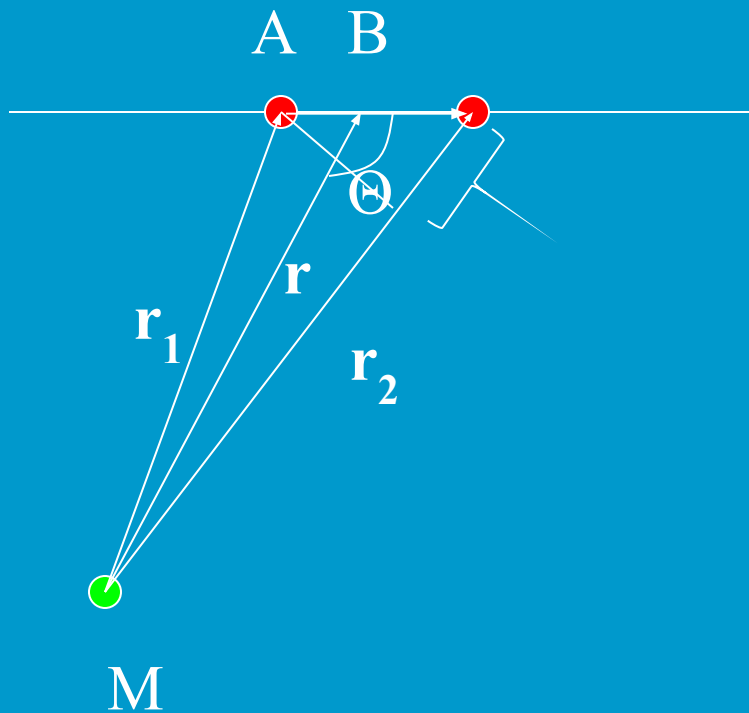


Дипольная



Срединных градиентов

# Поле дипольного источника



$$U_d(M) = \frac{I\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{I\rho}{2\pi} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$r_2 - r_1 \approx AB \cos \Theta$$

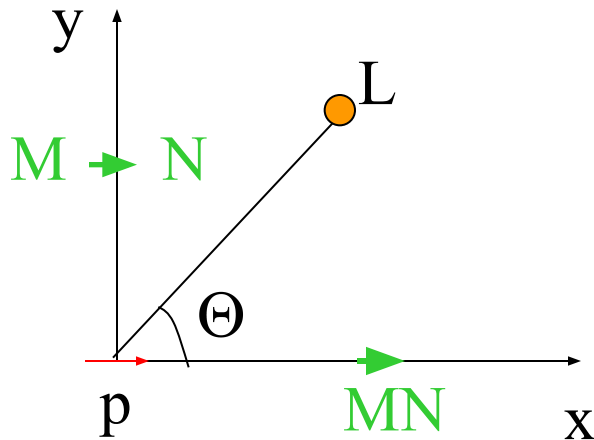
$$r_1 r_2 \approx r^2$$

$$U_d(M) = \frac{I\rho}{2\pi} \frac{AB}{r^2} \cos \Theta = \frac{p\rho}{2\pi r^2} \cos \Theta$$

Найдем компоненты поля диполя в полярной системе координат

$$U_d(M) = \frac{p\rho}{2\pi r^2} \cos \Theta \quad E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{p\rho}{\pi r^3} \cos \Theta = \frac{p\rho}{\pi r^4} x$$

$$E_\Theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \Theta} = \frac{p\rho}{2\pi r^3} \sin \Theta = \frac{p\rho}{2\pi r^4} y$$

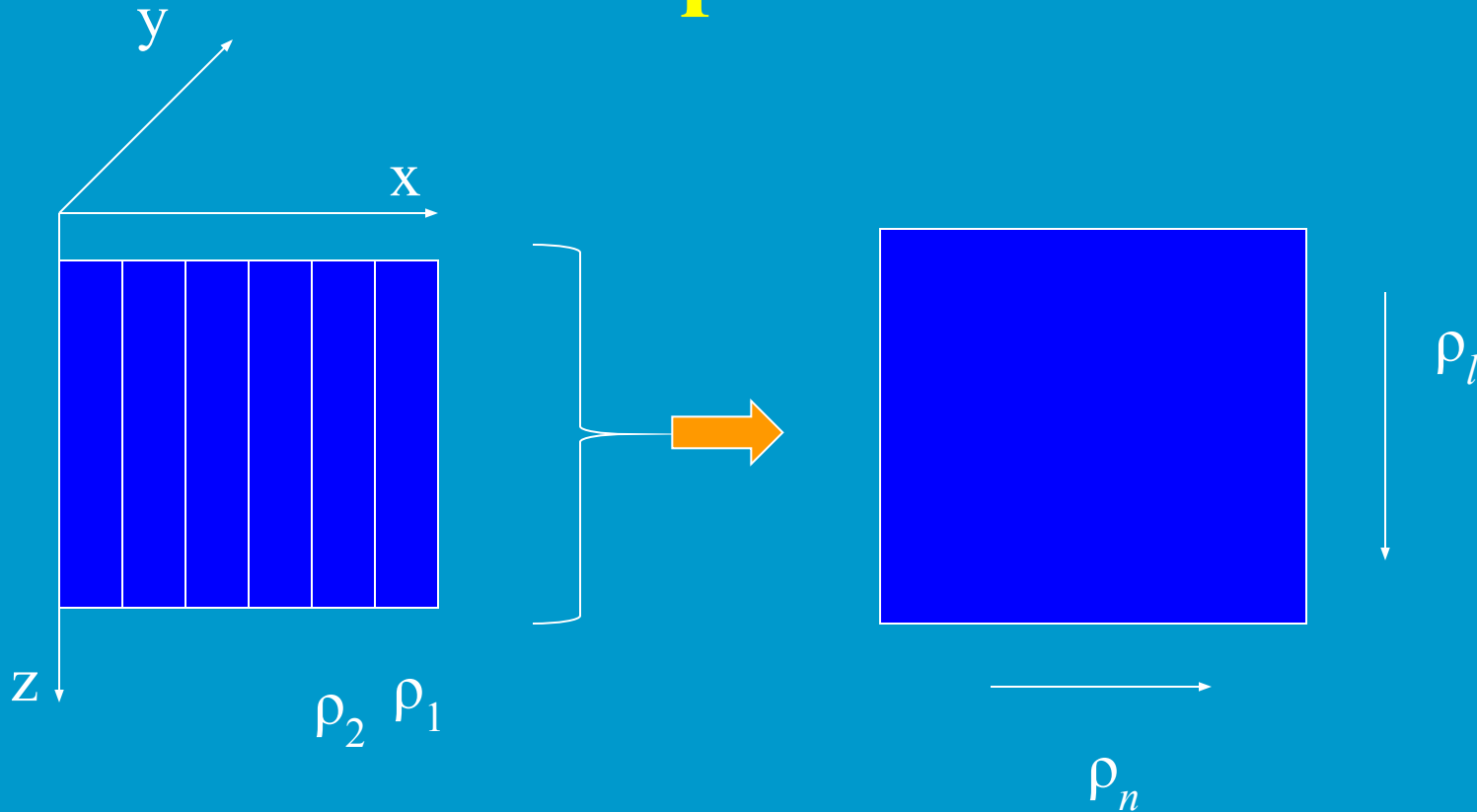


Вдоль оси x:  $\Theta = 0: E_r = \frac{p\rho}{\pi r^3}; E_\Theta = 0$

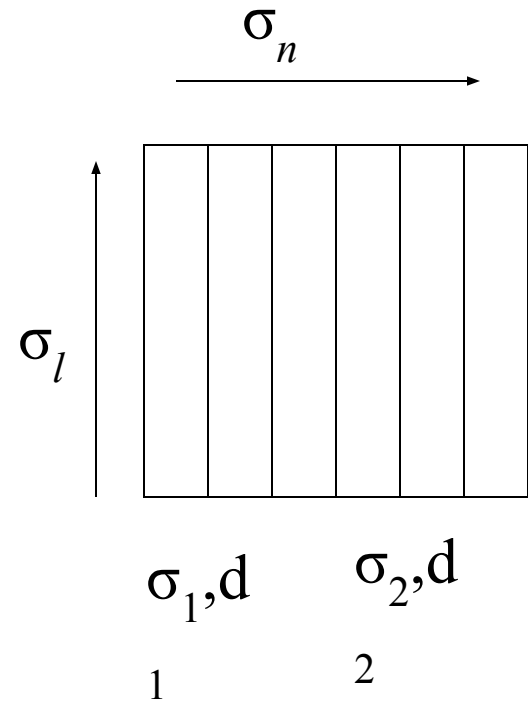
Вдоль оси y:  $\Theta = \frac{\pi}{2}; E_r = 0; E_\Theta = \frac{p\rho}{2\pi r^3}$

Дипольная осевая и дипольная экваториальная установки

# Анизотропия удельного сопротивления



# ВЫЯСНИМ СООТНОШЕНИЕ $\sigma_n$ И $\sigma_l$



$$\begin{aligned} \frac{\sigma_l}{\sigma_n} &= \frac{(\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2)(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}{(d_1 + d_2)^2} = \\ &= \frac{d_1^2 + d_1 d_2 \sigma_1 \rho_2 + d_1 d_2 \sigma_2 \rho_1 + d_2^2}{(d_1 + d_2)^2} = \\ &= \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2 \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)}{(d_1 + d_2)^2} \end{aligned}$$

$$\sigma_l = \frac{\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2}{d_1 + d_2}$$

$$\sigma_n = \frac{d_1 + d_2}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\rho_2}{\rho_1} \\ \frac{1}{x} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + \frac{1}{x} > 2 \\ x^2 - 2x + 1 > 0 \end{array}$$

$$x \neq 1 \Rightarrow \sigma_l > \sigma_n$$



Плотность тока:

$$j_x = \frac{E_x}{\rho_n} = -\frac{1}{\rho_n} \frac{\partial U}{\partial x} \quad j_y = \frac{E_y}{\rho_{\boxtimes}} = -\frac{1}{\rho_{\boxtimes}} \frac{\partial U}{\partial y} \quad j_z = \frac{E_z}{\rho_l} = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial U}{\partial z}$$

В среде нет источников тока:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{1}{\rho_n} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho_{\boxtimes}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = 0$$

Введем новые координаты:  $x_1 = x \sqrt{\rho_n}$     $y_1 = y \sqrt{\rho_{\boxtimes}}$     $z_1 = z \sqrt{\rho_l}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \sqrt{\rho_n} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x} \sqrt{\rho_n} = \frac{\partial^2 U \partial x_1}{\partial x_1^2 \partial x} \sqrt{\rho_n} = \rho_n \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\left( \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2} \right) = 0$$

Решение:

$$U = \frac{I\rho_n \sqrt{\rho_n}}{4\pi \sqrt{\rho_n x^2 + \rho_l (y^2 + z^2)}}$$

Введем коэффициент анизотропии:  $\lambda = \sqrt{\frac{\rho_n}{\rho_l}} \geq 1$

Линии равного потенциала:  $\rho_n x^2 + \rho_l (y^2 + z^2) = const$

$$\frac{x^2}{\rho_l} + \frac{y^2}{\rho_n} + \frac{z^2}{\rho_n} = const$$

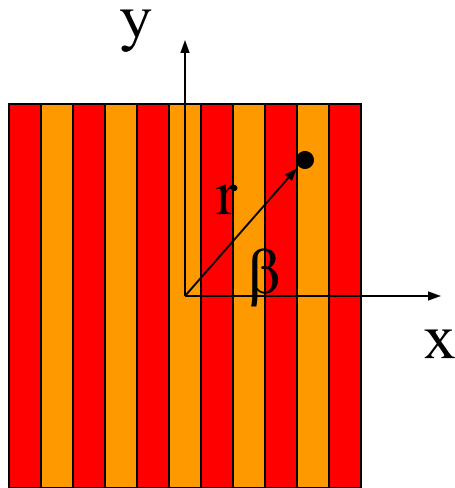
Концентрические сжатые эллипсоиды вращения, малая ось направлена вдоль оси X

Для анизотропного полупространства:

$$U = \frac{I\rho_{\boxtimes}\sqrt{\rho_n}}{2\pi\sqrt{\rho_n x^2 + \rho_l(y^2 + z^2)}}$$

и на дневной поверхности:

$$U = \frac{I\rho_{\boxtimes}\sqrt{\rho_n}}{2\pi\sqrt{\rho_n x^2 + \rho_l y^2}}$$



Введем полярные координаты:

$$x = r \cos \beta; y = r \sin \beta$$

$$U = \frac{I\rho_{\boxtimes}\sqrt{\rho_n}}{2\pi\sqrt{\rho_n r^2 \cos^2 \beta + \rho_l r^2 \sin^2 \beta}} =$$

$$= \frac{I\rho_{\boxtimes}\sqrt{\rho_n}}{2\pi r \sqrt{\rho_n \cos^2 \beta + \rho_l \sin^2 \beta}}$$

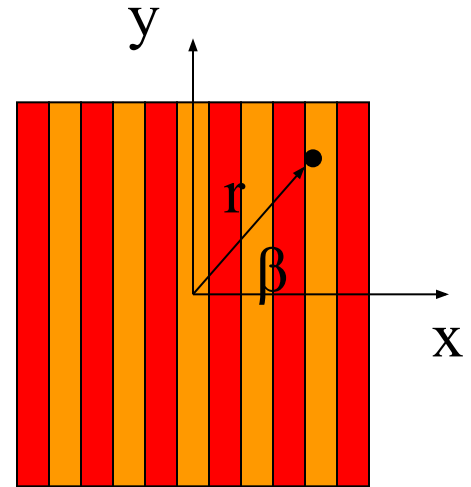
$$U = \frac{I\rho_{\text{эфф}}}{2\pi r}$$

$$\rho_{\text{эфф}}(\beta) = \frac{\rho_{\boxtimes} \sqrt{\rho_n}}{\sqrt{\rho_n \cos^2 \beta + \rho_l \sin^2 \beta}}$$

$$\rho_{\text{эфф}}(0) = \frac{\rho_{\boxtimes} \sqrt{\rho_n}}{\sqrt{\rho_n}} = \rho_{\boxtimes}$$

$$\rho_{\text{эфф}}(\pi/2) = \frac{\rho_{\boxtimes} \sqrt{\rho_n}}{\sqrt{\rho_l}} = \sqrt{\rho_{\boxtimes} \rho_n}$$

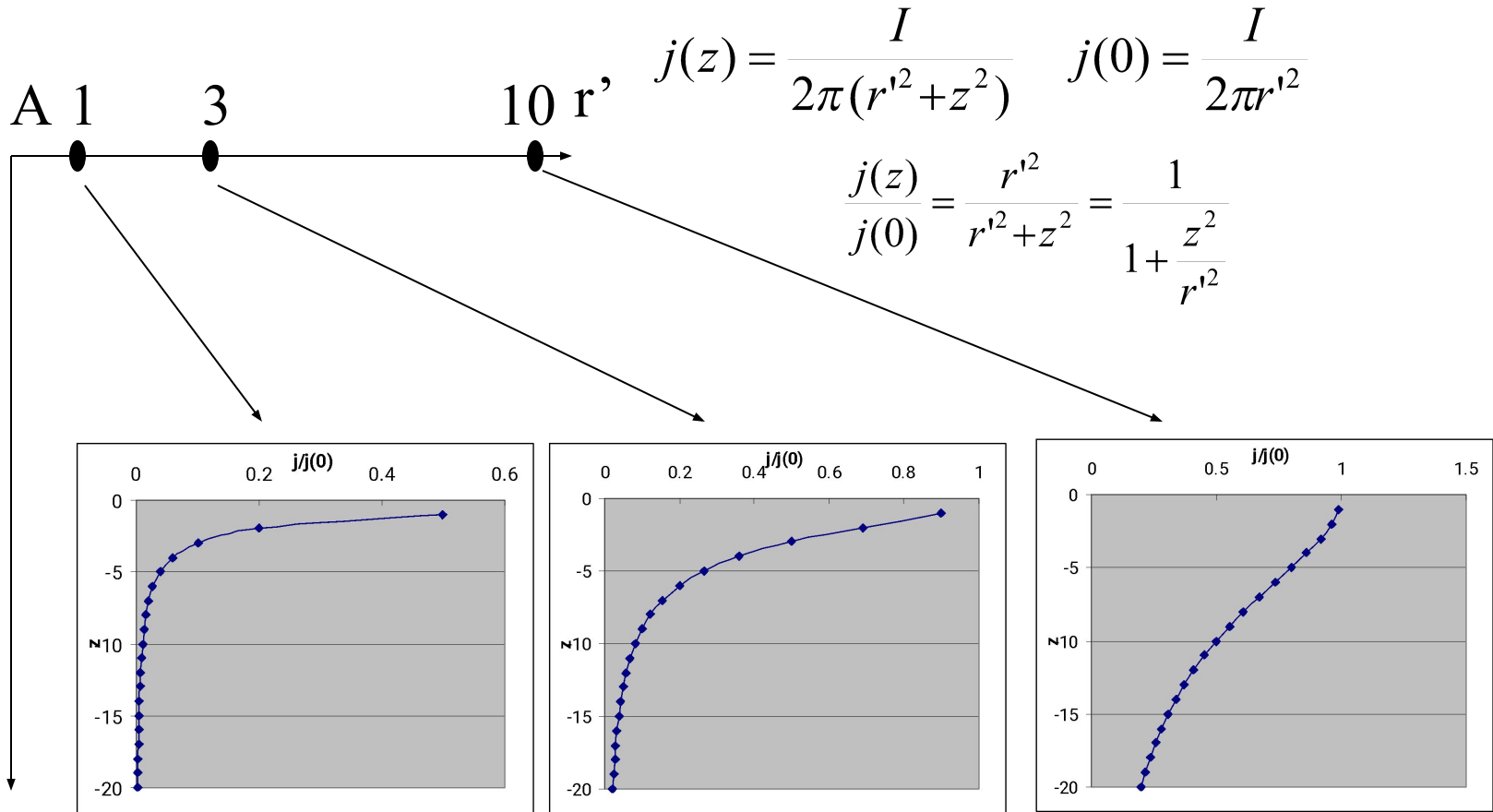
$$\frac{\rho_{\text{эфф}}(\pi/2)}{\rho_{\text{эфф}}(0)} = \frac{\sqrt{\rho_l \rho_n}}{\rho_l} = \sqrt{\frac{\rho_n}{\rho_l}} = \lambda$$



Среднее геометрическое сопротивление

Эффективное (кажущееся) сопротивление в направлении слоистости – больше, чем в направлении вкрест слоистости-  
Парадокс анизотропии!

# Глубина проникновения тока



Глубина проникновения тока растет с расстоянием между источником поля и точкой наблюдения!