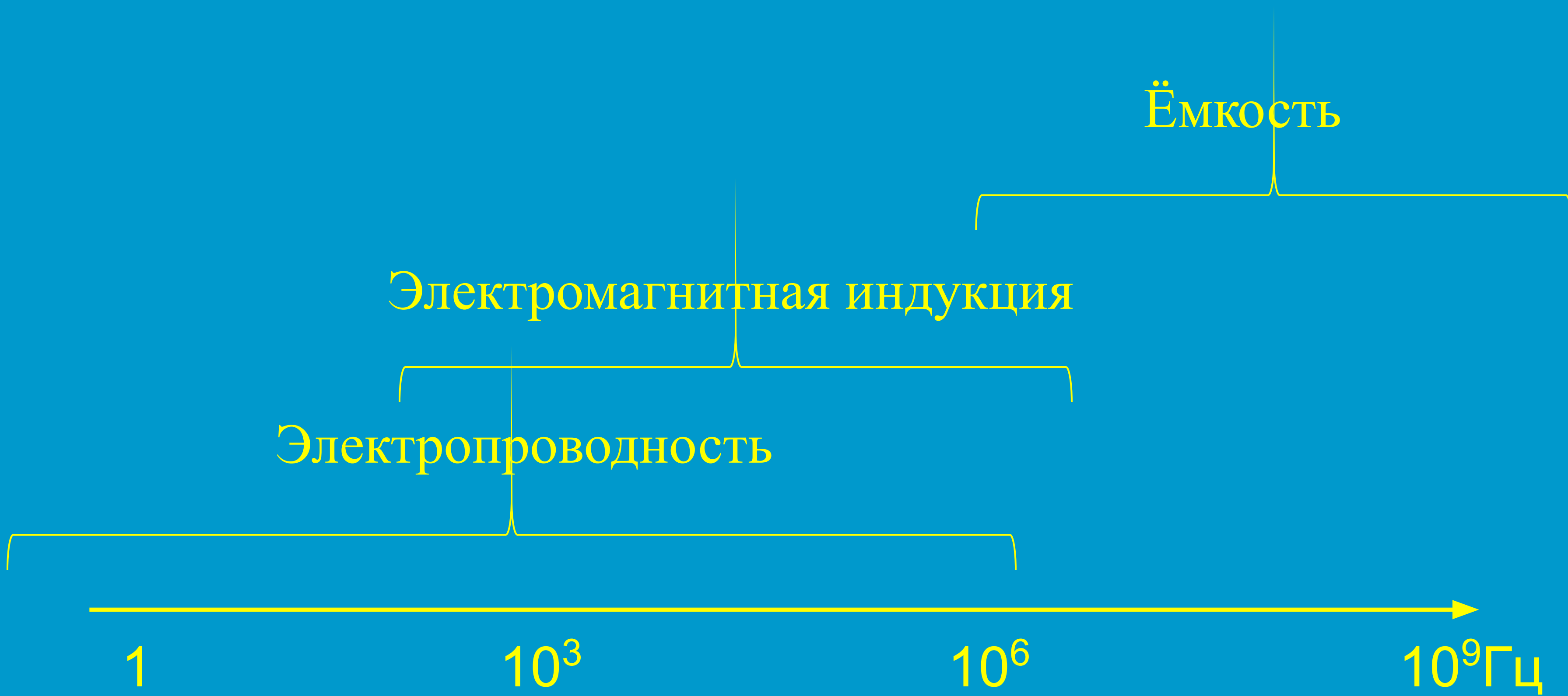
“**И**сследование земных недр электрическими методами входит в категорию смешанных дисциплин…
Надо быть инженером-математиком - физиком-геологом, обладать вкусом к экспериментальной работе и экспедициям, чтобы заниматься подобным проблемами”

Конрад Шлюмберже, 1921 г.

Геоэлектрика

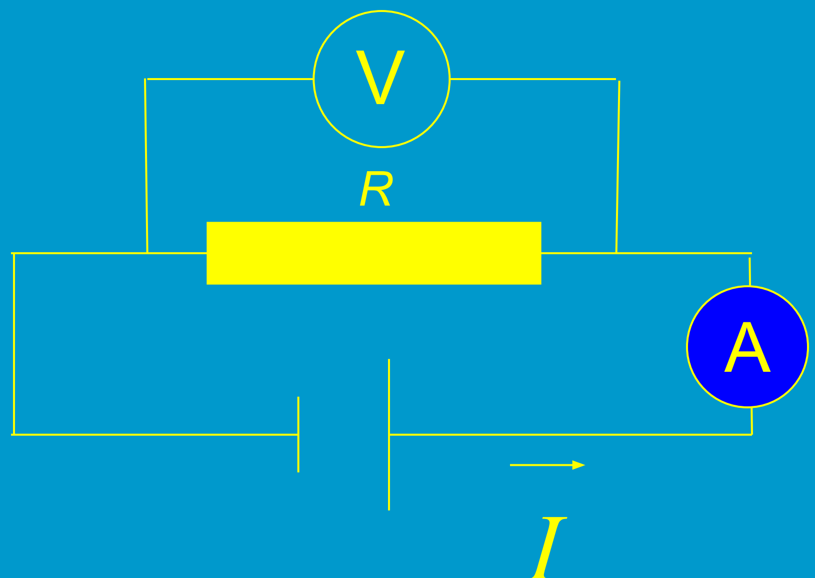
(электроразведка, электрометрия)

Введение (используемые явления)

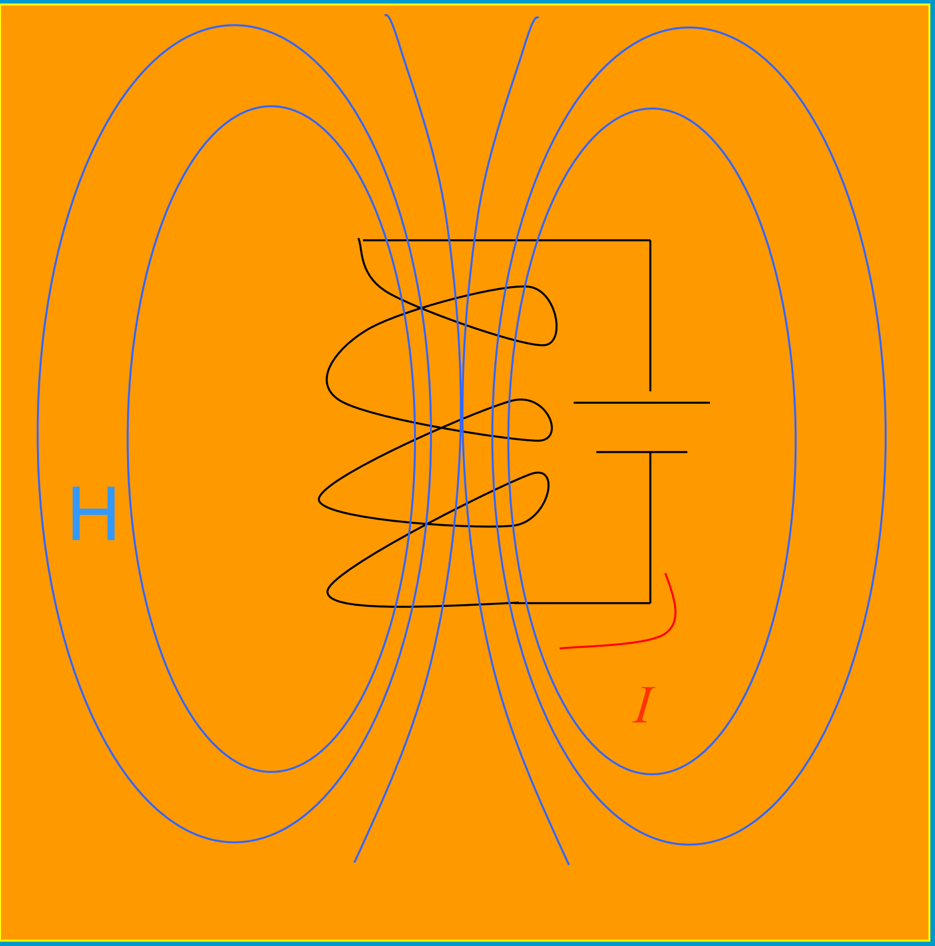


Шкала частоты электромагнитного поля

Электропроводность

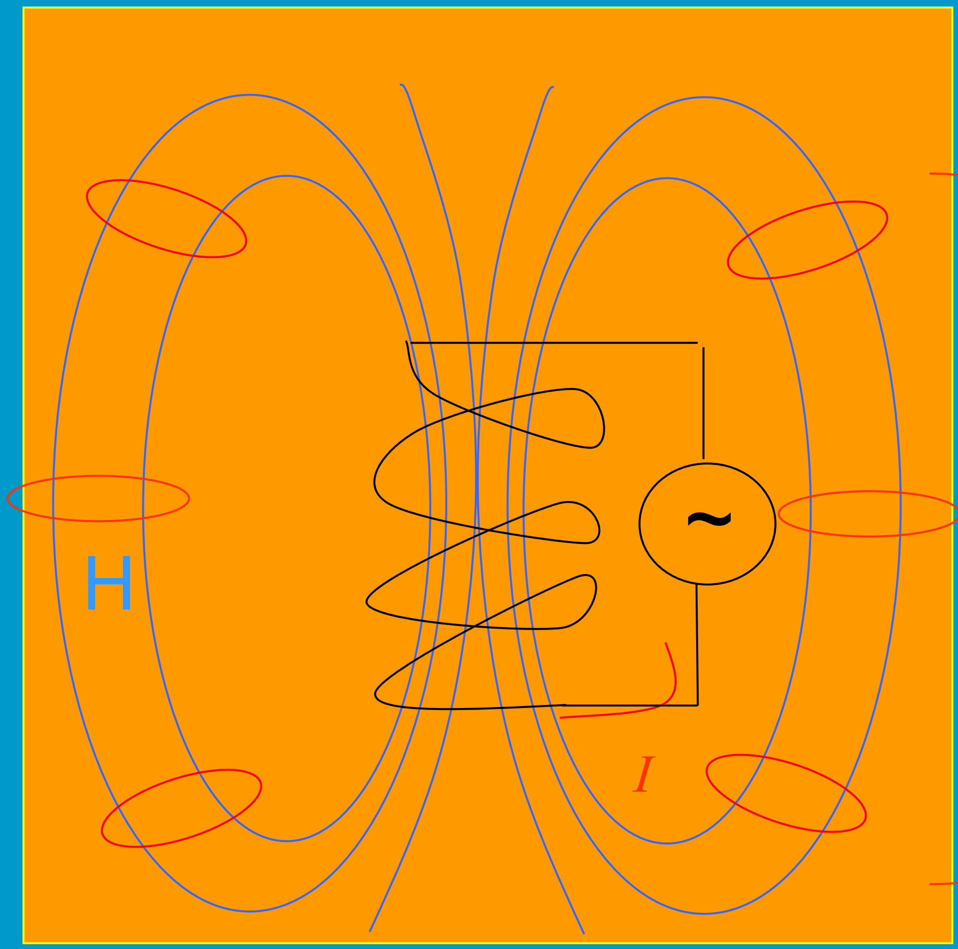


Индукция



Закон Био-Савара

Электрический ток порождает магнитное поле

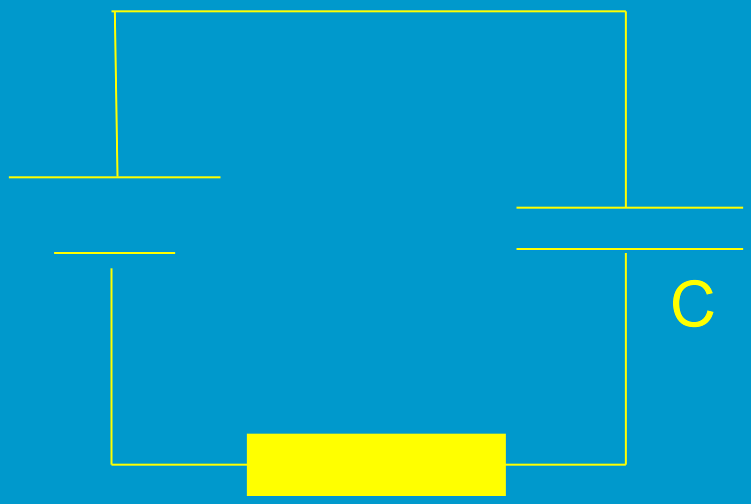


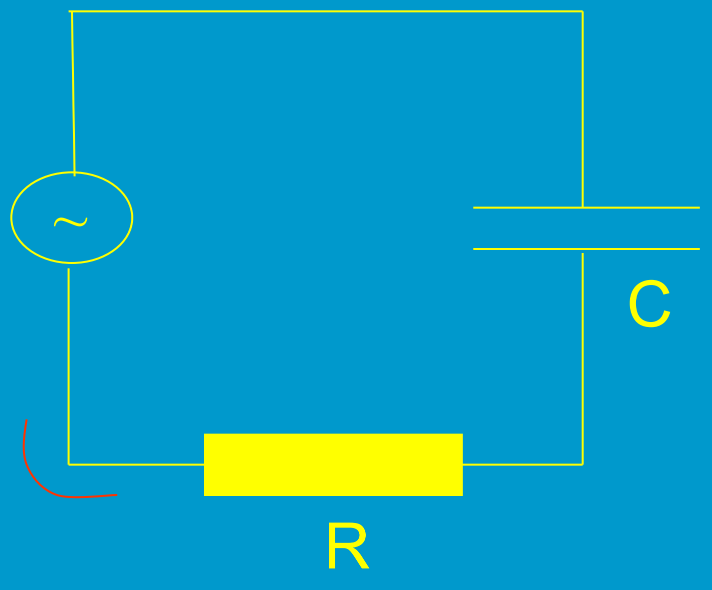
Закон электромагнитной индукции Фарадея

$E_i = -\Delta\Phi/\Delta t$

Переменное магнитное поле порождает электрическое поле

Ёмкость



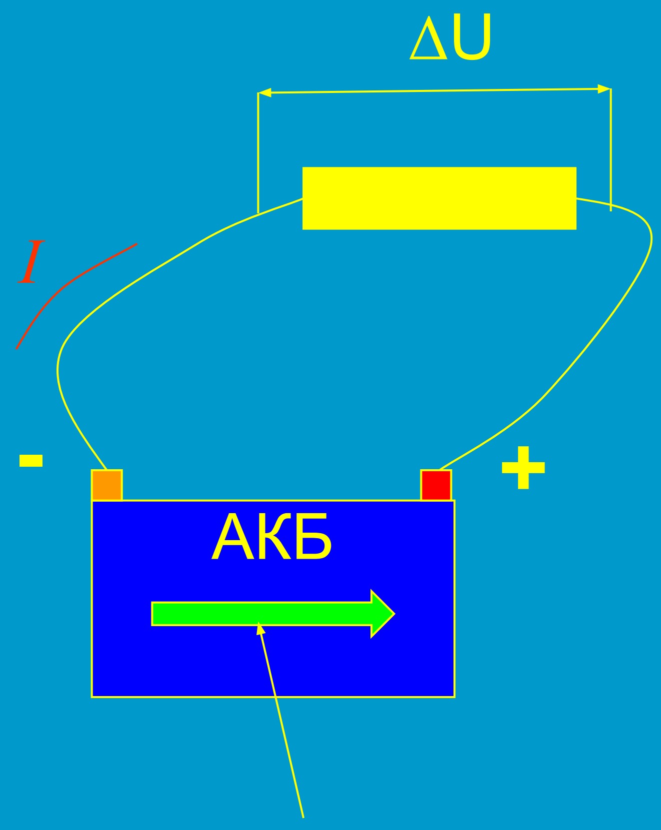


$Z=\infty$

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} = R - i\,\frac{1}{\omega C}$$

Среда способна накапливать электрическую энергию

Сторонние Силы



Сторонние силы
химической природы

Материальные Параметры Среды

- Электропроводность
- Диэлектрическая проницаемость
- Магнитная проницаемость
- Физико-химические параметры

Выводы

Методы геоэлектрики можно классифицировать используя разные признаки, например,

- Частоту поля, или, более общо, – зависимость поля от времени
- Исследуемый материальный параметр
- Решаемые геологические задачи
- Расположение технических устройств

1. Физико-математические основы

1.1 Уравнения Максвелла, Материальные Уравнения, Граничные Условия

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = q$$

У-я Максвелла

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \textit{Гн}/\text{м}$$

Материальные у-я

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$$

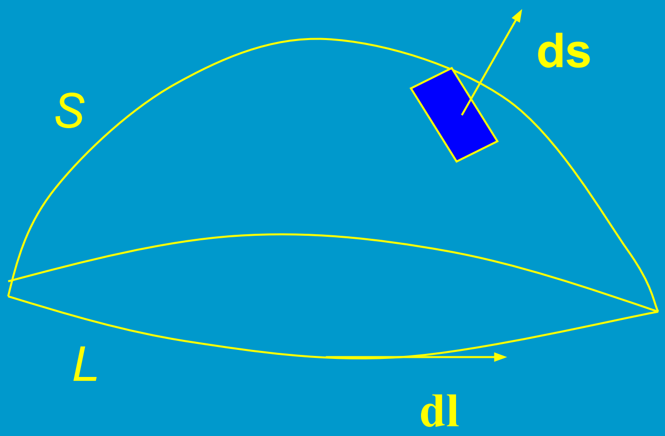
$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

Уравнение неразрывности

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

Физический Смысл Уравнений Максвелла

Второе Уравнение



$$\iint\limits_s \mathrm{rot}\mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_s \mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}$$

$$\iint\limits_s \mathrm{rot}\mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = \oint\limits_L \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}$$

$$\oint\limits_L \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_s \mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}$$

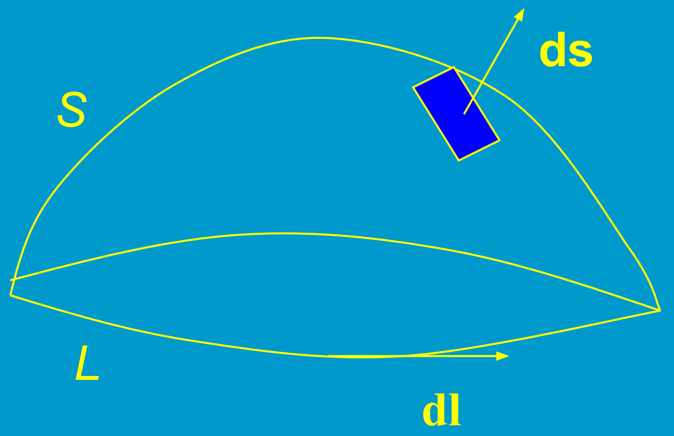
$$\oint\limits_L \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = \text{ЭДС}$$

$$\iint\limits_s \mathbf{B}\cdot\mathbf{ds} = \Phi$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\text{ЭДС} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

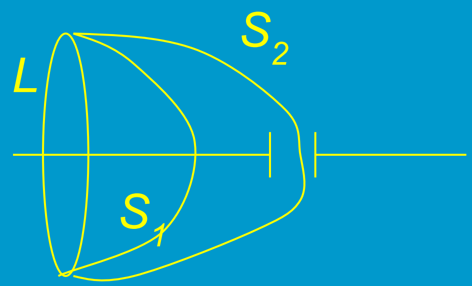
Первое Уравнение



$$\iint_s \mathrm{rot}\mathbf{H}\cdot\mathbf{ds} = \iint_s \mathbf{j}\cdot\mathbf{ds} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_s \mathbf{D}\cdot\mathbf{ds} = \iint_s \mathbf{c}\cdot\mathbf{ds} = I$$

$$\oint_L \mathbf{H}\cdot\mathbf{dl} = I$$

$$I = \iint_s \mathbf{j}\cdot\mathbf{ds} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_s \mathbf{D}\cdot\mathbf{ds} = I_{np} + I_{cм}$$



Третье и четвертое уравнения – характеристика источников поля

Приведем примеры полей, имеющих дивергенцию и характеризующихся нулевой дивергенцией.

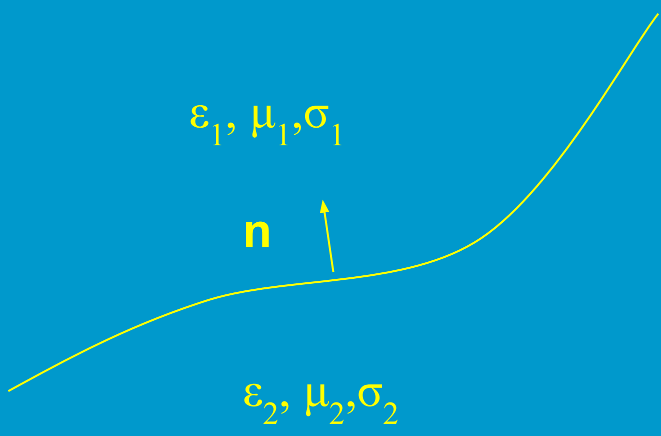
Физический смысл уравнения неразрывности

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

$$\iiint\limits_{\mathrm{V}} \operatorname{div}\mathbf{j}\,dv = -\iiint\limits_{V} \frac{\partial q}{\partial t}\,dv$$

$$\iint\limits_{S} \mathbf{j}\,ds = I = -\iiint\limits_{V} \frac{\partial q}{\partial t}\,dv = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

Граничные Условия



$$B_n^1 - B_n^2 = 0$$

$$D_n^1 - D_n^2 = q_s$$

$$\mathbf{n} \times \left(\mathbf{H}^2 - \mathbf{H}^1 \right) = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{n} \times \left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{E}^1 \right) = 0$$

1.2 Поле в однородной среде, модели поля

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \sigma E + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{H} = 0$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{E}) = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{H} =$$

$$= -\mu\mu_0\sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

rot

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{E}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$$

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\mu_0\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2\mathbf{H} - \mu\mu_0\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

Телеграфные уравнения

$$\nabla^2\mathbf{E} = \nabla^2 E_x\mathbf{i} + \nabla^2 E_y\mathbf{j} + \nabla^2 E_z\mathbf{k}$$

1.3 Электростатическое поле

Закон Кулона (1785)

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$$

Электрическое поле (Фарадей, 1845)

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Электрическая поляризация

В диэлектрике, наряду с электрическим полем внешних источников, действует дополнительная сила **P**, равная дипольному моменту поляризации единичного объема среды. Суммарное воздействие называют электрической индукцией **D**.

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\varepsilon = 1 + \chi$$

χ - диэлектрическая восприимчивость

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = q$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla U_э$$

Получим уравнения Лапласа и Пуассона для электростатического потенциала

Граничные условия для $U_э$

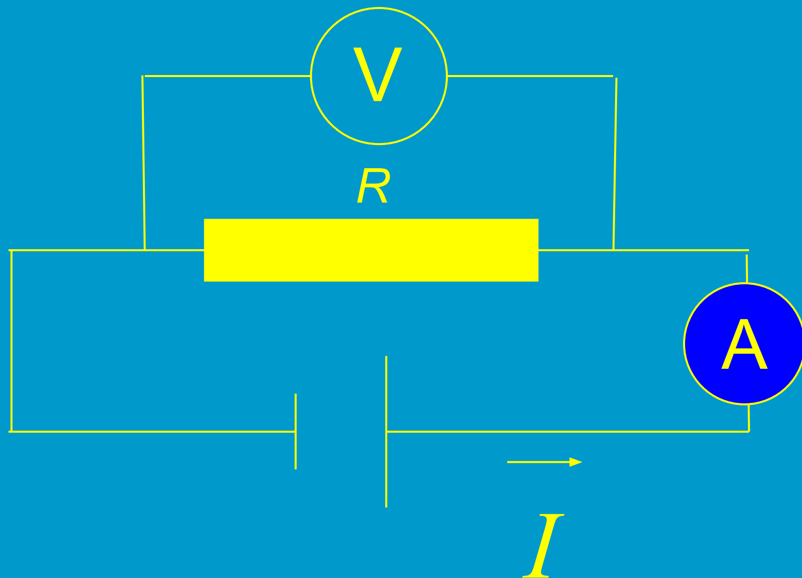
Из граничных условий для полей **D** и **E** следует:

$$\boxed{\left(\frac{\partial U_э}{\partial \tau}\right)^{(2)} = \left(\frac{\partial U_э}{\partial \tau}\right)^{(1)} \qquad \varepsilon_2\left(\frac{\partial U_э}{\partial n}\right)^{(2)} - \varepsilon_1\left(\frac{\partial U_э}{\partial n}\right)^{(1)} = -q_s} \quad (*)$$

Кроме того, потенциал – непрерывен, следовательно,

$$\boxed{U_э^{(2)} = U_э^{(1)}} \quad (*)$$

1.4 Электрическое поле постоянного тока



Закон Ома для участка цепи:

$$\Delta U = RI$$

Для цилиндрического проводника:

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

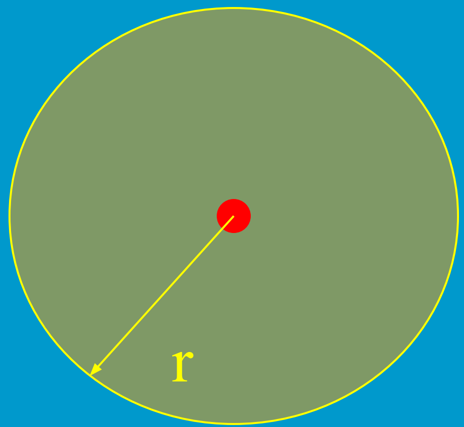
Преобразуем:

$$\frac{\Delta U}{\ell} = \rho \frac{I}{S}$$

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$$ или $$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Точечный источник тока в однородной среде, диссипация заряда



$$\mathbf{j} = \frac{I}{4\pi r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \mathbf{E} = \frac{I\cdot\rho}{4\pi\cdot r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Сравним напряженность электростатического поля и поля постоянного тока:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \Leftrightarrow \frac{I\rho}{4\pi} \qquad I = -\frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{Q}{I} = \rho\varepsilon_0 = \tau \quad Q = \tau I = -\tau\frac{dQ}{dt} \longrightarrow Q = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Электростатическая аналогия

Электростатика:

$$rot\mathbf{E} = 0 \qquad div\mathbf{D} = q \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$$

Постоянное электрическое поле

$$rot\mathbf{E} = 0 \qquad div\mathbf{j} = \frac{\partial q}{\partial t} \qquad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

Аналогичные параметры:

$$\mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{E} \qquad q \Leftrightarrow \frac{\partial q}{\partial t} = i_v$$

$$\mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{j} \qquad \varepsilon\varepsilon_0 \Leftrightarrow \sigma$$

Пример для электрического потенциала точечного источника

Введем функцию
и вычислим ее градиент:

$$U = \frac{I\rho}{4\pi r}$$

$$\nabla U = \frac{dU}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{I\rho}{4\pi r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Убедимся, что последнее выражение с точностью до знака совпадает с выражением для напряженности электрического поля. Следовательно, $\mathbf{E} = -\nabla U$

Далее, применив принцип суперпозиции, распространим результат на любую комбинацию источников поля!

Уравнения Пуассона и Лапласа

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla U) = i_v$$

У-е Пуассона

$$\sigma \nabla^2 U = i_v$$

У-е Лапласа

$$\nabla^2 U = 0$$

Принципы взаимности и суперпозиции,
Постановка задачи для неоднородной среды
Граничные условия