

Уравнение переноса излучения с учетом поглощения в линиях

Уравнение переноса излучения с учетом поглощения в линиях

- Теперь общий коэффициент поглощения равен сумме коэффициентов поглощения в континууме α_v^c и в линиях α_v^l

- Соответственно и оптическая глубина будет определяться как:

$$dt_v = -(\alpha_v^c + \alpha_v^l)dx$$

Функция источника также будет иметь следующий вид:

$$S_v = \frac{\epsilon_v^l + \epsilon_v^c}{\alpha_v^l + \alpha_v^c}, \quad S_v^l = \frac{\epsilon_v^l}{\alpha_v^l}, \quad S_v^c = \frac{\epsilon_v^c}{\alpha_v^c}, \quad S_v = \frac{S_v^c + \frac{\alpha_v^l}{\alpha_v^c} S_v^l}{1 + \frac{\alpha_v^l}{\alpha_v^c}}$$

- Уравнение переноса будет формально иметь обычный вид:

$$\cos \vartheta \frac{dI_v}{dt_v} = I_v - S_v \longrightarrow I_v(0) = \int_0^\infty S_v e^{-t_v \sec \theta} \sec \theta dt_v$$

$$dt_v = -(\alpha_v^c + \alpha_v^l)dx$$

Функция источника для линий при ЛТР

- Чтобы решить уравнение переноса, надо знать функции источника для континуума и линии.
- **Проблема с S_v^l** : она зависит от населенностей уровней, которые сами зависят от поля излучения в континууме и от функции S_v^c
Эта взаимосвязь сильно усложняет решение уравнения переноса с учетом линий.

Простейший случай - ЛТР: $S_v^c = B_v(T), \quad S_v^l = B_v(T)$

- Что это означает физически?
 - населенности уровней зависят только от температуры и не зависят от поля излучения,
 - это приближение хорошо работает только в том случае, когда населенности уровней определяются только столкновениями, а не полем излучения.

Линии при ЛТР

$$\cos \vartheta \frac{dI_v}{d\tau_v} = I_v - B_v, \quad d\tau_v = -\alpha_v^c dx \quad \longrightarrow \quad \text{Для непрерывного спектра}$$

$$\cos \vartheta \frac{dI_v}{dt_v} = I_v - B_v, \quad dt_v = -(\alpha_v^c + \alpha_v^l) dx \quad \longrightarrow \quad \text{Для непрерывного спектра и линии}$$

Решение:

$$I_v^c(0, \vartheta) = \int_0^\infty B_v(T) e^{-\tau_v \sec \theta} \sec \theta d\tau_v$$
$$I_v^l(0, \vartheta) = \int_0^\infty B_v(T) e^{-t_v \sec \theta} \sec \theta dt_v \quad (\text{a})$$

Профиль линии (остаточная интенсивность)

$$r_v(\vartheta) = \frac{I_v^l(0, \vartheta)}{I_v^c(0, \vartheta)} \quad (\text{только для Солнца}) \quad r_v = \frac{H_v^l(0)}{H_v^c(0)} \quad (\text{для звезд})$$

Для интегрирования (а) положим, что

$$B_v(T) = B_v(T_0)(1 + \beta_v \tau + \dots) \quad d\tau = -\alpha dx$$

$$B_v(T) = B_v(T_0)\left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_v^c} \beta_v \tau_v + \dots\right) \quad d\tau_v = -\alpha_v^c dx$$

$$B_v(T) = B_v(T_0)\left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_v^c + \alpha_v^l} \beta_v t_v\right) \quad dt_v = -(\alpha_v^c + \alpha_v^l) dx$$

Тогда:

$$r_v(\vartheta) = \frac{1 + \beta_v \frac{\alpha}{\alpha_v^c + \alpha_v^l} \cos \vartheta}{1 + \beta_v \frac{\alpha}{\alpha_v^c} \cos \vartheta}, \quad r_v = \frac{1 + \frac{2}{3} \beta_v \frac{\alpha}{\alpha_v^c + \alpha_v^l}}{1 + \frac{2}{3} \beta_v \frac{\alpha}{\alpha_v^c}}$$

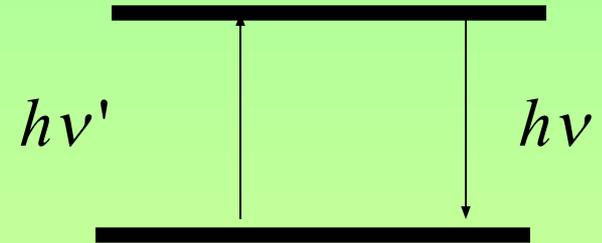
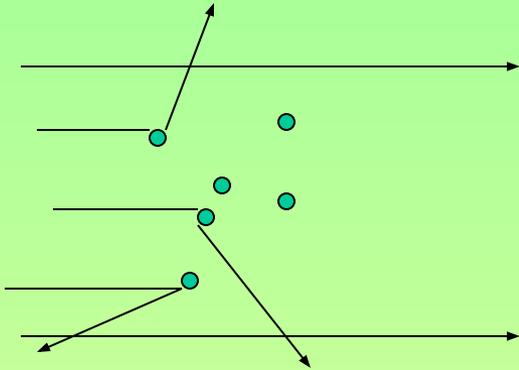
Сравнение с наблюдениями (для Солнца)

Теория:

при $\theta \rightarrow 90^\circ$ (на краю лимба) линия исчезает: $r_v \rightarrow 1$

Наблюдения:

Линии поглощения при рассеянии



Два главных предположения:

- чистое рассеяние**- энергия, излученная в линии, равна энергии, поглощенной в этой линии,
- когерентное рассеяние**- несмотря на размытость уровней, считаем, что нет перераспределения энергии по частотам внутри линии.

Условие монохроматического лучистого равновесия

$$4\pi\varepsilon'_\nu = \alpha'_\nu \oint_{4\pi} I_\nu d\omega,$$

$$\frac{\varepsilon'_\nu}{\alpha'_\nu} = \frac{1}{4\pi} \oint_{4\pi} I_\nu d\omega \equiv J_\nu = S'_\nu \text{ функция источника полностью}$$

определяется полем излучения

$$S'_\nu = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_\nu \sin \vartheta d\theta$$

Модель Шварцшильда-Шустера

«обращающий» слой
(атмосфера)

$$\alpha_v^l \neq 0, \varepsilon_v^l \neq 0, \alpha_v^c = 0, \varepsilon_v^c = 0$$

t_v^0

фотосфера

$$\alpha_v^l = 0, \varepsilon_v^l = 0, \alpha_v^c \neq 0, \varepsilon_v^c \neq 0$$

УП:

$$\cos \vartheta \frac{dI_v}{dt_v} = I_v - S_v^l$$

$$dt_v = -\alpha_v^l dx$$

$$S_v^l = J_v = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_v \sin \vartheta d\vartheta$$

Решим эту систему методом Шварцшильда-Шустера

Напоминание: метод Шварцшильда-Шустера основан на усреднении интенсивностей по нижней и верхней полу – сферам и на выносе из под интеграла среднего значения

$$\cos \theta = \pm 1 / 2$$

$$\int_0^{\pi/2} I \sin \theta \cos \vartheta d\vartheta \approx \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} I \sin \vartheta d\vartheta$$

Обозначим:

$$I'_v = \int_0^{\pi/2} I_v \sin \vartheta d\vartheta, \quad I''_v = \int_{\pi/2}^{\pi} I_v \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$\overline{\cos \theta} = 1/2 \qquad \overline{\cos \theta} = -1/2$$

Получим систему:

$$\frac{1}{2} \frac{dI'_v}{d\tau_v} = I'_v - S_v$$

$$S_v = \frac{1}{2} (I'_v + I''_v)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dI''_v}{d\tau_v} = I''_v - S_v$$

Сумма уравнений \longrightarrow $I'_v - I''_v = \text{const} = F'_v$

Разность уравнений \longrightarrow $I'_v + I''_v = 2F'_v + c_v$

Граничные условия:

$$I'_v(t_v = 0) = 0, \text{ если } \vartheta > \pi/2$$

$$I''_v(t_v = t_v^0) = \bar{I}_v^c(t_v = t_v^0) = \bar{I}_v^c(t_v = 0), \text{ если } \vartheta < \pi/2$$



$$c_v = F'_v, \quad F'_v = \frac{\bar{I}_v^c}{1+t_v^0}, \quad S_v = \frac{\bar{I}_v^c}{1+t_v^0} \left(\frac{1}{2} + t_v^0 \right)$$

Вычисляем потоки:

$$F_v^c = 2\pi \int_0^\pi I_v \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \approx \pi \int_0^{\pi/2} I_v \sin \vartheta d\vartheta$$

$$\bar{I}_v^c = \frac{\oint I_v^c d\omega}{2\pi} = \int_0^{\pi/2} I_v^c \sin \vartheta d\vartheta \Rightarrow F_v^c = \pi \bar{I}_v^c$$

$$\begin{aligned}
 I_v(\tau_v = 0, \mu) &= \int_0^{t_v^0} S_v(t_v) e^{-\frac{t_v}{\mu}} \frac{dt_v}{\mu} = \frac{\bar{I}_v^0}{1+t_v^0} \left(\frac{1}{2} + t_v^0 \right) \int_0^{t_v^0} e^{-\frac{t_v}{\mu}} \frac{dt_v}{\mu} = \\
 &= \frac{\bar{I}_v^0}{1+t_v^0} \left(\frac{1}{2} + t_v^0 \right) \left(1 - e^{-\frac{t_v^0}{\mu}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_v(\tau_v = 0, \mu) &= \frac{I_v(\tau_v = 0, \mu)}{I_v^c(\tau_v = 0, \mu)} = \\
 &= \frac{\bar{I}_v^0}{\underbrace{\text{const}(1 + \beta\mu)}_{\text{закон потемнения}}(1+t_v^0)} \left(\frac{1}{2} + t_v^0 \right) \left(1 - e^{-\frac{t_v^0}{\mu}} \right)
 \end{aligned}$$

Для непрерывного спектра взят обычный (линейный) закон потемнения.

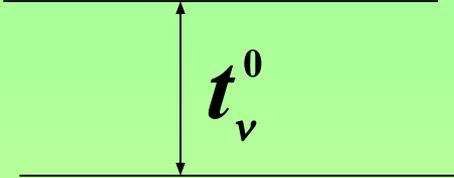
$$r_v(\tau_v = 0, \mu) = \frac{\bar{I}_v^0}{const(1 + \beta\mu)(1 + t_v^0)} \left(\frac{1}{2} + t_v^0 \right) \left(1 - e^{-\frac{t_v^0}{\mu}} \right)$$

Частные случаи:

$$t_v^0 \ll 1, \quad r_v(\tau_v = 0, \mu) = \frac{\bar{I}_v^0}{const(1 + \beta\mu)} \frac{1}{2} \frac{t_v^0}{\mu}$$

$$t_v^0 \gg 1, \quad r_v(\tau_v = 0, \mu) = \frac{\bar{I}_v^0}{const(1 + \beta\mu)}$$

Вычисляем остаточную интенсивность:

$$F_v^l = \pi F_v^c = \frac{\pi \overline{I_v^c}}{1 + t_v^0}, \quad \Rightarrow \quad r_{vF} = \frac{F_v^l}{F_v^c} = \frac{1}{1 + t_v^0}$$


$$t_v^0 = -\int_0^Z \alpha_v^l dz = -\int a_v^l N dz \approx a_v^l \int N dz = a_v^l N_{abs}$$



$$r_v = \frac{1}{1 + a_v^l N_{abs}}$$

N_{abs} - «число поглощающих атомов» - число атомов, производящих линию и находящихся в столбце сечением в 1 см^2 и протяженностью, равной протяженности «обращающего слоя».

Модель Милна-Эддингтона

В этой модели нет разделения на слои: в каждой точке атмосферы имеется поглощение и излучение как в континууме, так и в линии.

$$\cos \vartheta \frac{dI_\nu}{dz} = -(\alpha_\nu^c + \alpha_\nu^l) I_\nu + \varepsilon_\nu^c + \varepsilon_\nu^l$$

$$\varepsilon_\nu^c = \alpha_\nu^c B_\nu(T), \quad \varepsilon_\nu^l = \alpha_\nu^l J_\nu$$

Полагаем, что

$$\eta_\nu = \frac{\alpha_\nu^l}{\alpha_\nu^c}, \quad d\tau_\nu = -\alpha_\nu^c dz$$

$$\cos \theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = (1 + \eta_\nu) I_\nu - B_\nu(T) - \eta_\nu J_\nu$$

Из условия монохроматического лучистого равновесия

Для континуума считаем, что выполняется ЛТР (это оправдано)

Для получения **аналитического** решения необходимо сделать основное предположение: величина η_ν является постоянной, т.е. не зависит от глубины.

Решение методом Милна=Эддингтона

$$\cos\theta \frac{dI_v}{d\tau_v} = (1 + \eta_v)I_v - B_v(T) - \eta_v J_v,$$

обозначим $H_v = \frac{\int I_v \cos\theta d\omega}{4\pi} \left(= \frac{F_v}{4\pi} \right)$

1) Умножаем на $\frac{d\omega}{4\pi}$ и интегрируем по всем направлениям:

$$\frac{dH_v}{d\tau_v} = (1 + \eta_v)J_v - \eta_v J_v - B_v(T) = J_v - B_v(T)$$

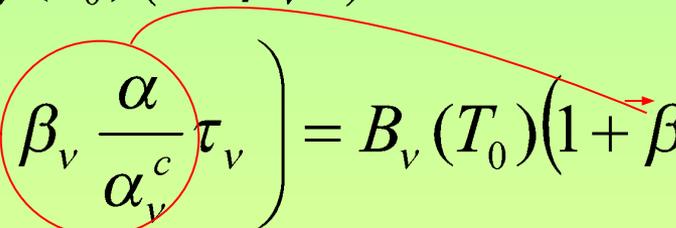
2) Умножаем на $\cos\theta \frac{d\omega}{4\pi}$ и интегрируем по направлениям:

$$\frac{1}{3} \frac{dJ_v}{d\tau_v} = (1 + \eta_v)H_v \quad (1)$$

3) В итоге: $\frac{1}{3} \frac{d^2 J_v}{d\tau_v^2} = (1 + \eta_v) \frac{dH_v}{d\tau_v} = (1 + \eta_v)(J_v - B_v)$

4) Перепишем
$$\frac{1}{3} \frac{d^2(J_\nu - B_\nu)}{d\tau_\nu^2} = (1 + \eta_\nu)(J_\nu - B_\nu)$$

5) Это возможно, если функция Планка является линейной по оптической глубине

$$B_\nu(T) = B_\nu(T_0)(1 + \beta_\nu \tau) =$$
$$B_\nu(T_0) \left(1 + \beta_\nu \frac{\alpha}{\alpha_\nu^c} \tau_\nu \right) = B_\nu(T_0) (1 + \beta_\nu^* \tau_\nu)$$


6) Решение:

$$J_\nu(\tau_\nu) = C_\nu \exp[-\tau_\nu \sqrt{3(1 + \eta_\nu)}] + D_\nu \exp[+\tau_\nu \sqrt{3(1 + \eta_\nu)}] + B_\nu(\tau_\nu)$$

(2)

7) Граничные условия:

– при $\tau_v \rightarrow \infty$ имеем $J_v \rightarrow B_v \Rightarrow D_v = 0$

– при $\tau_v = 0$ имеем $J_v(\tau_v = 0) = 2H_v(\tau_v = 0)$, т.к. **(3)**

$$J_v(\tau_v = 0) = \frac{\int I_v(\tau_v = 0) d\omega}{4\pi} = \frac{\int I_v(\tau_v = 0) d\omega}{4\pi}$$

$$H_v(\tau_v = 0) = \frac{\int I_v(\tau_v = 0) \cos\theta d\omega}{4\pi} \approx \frac{1}{2} \frac{\int I_v(\tau_v = 0) d\omega}{4\pi}$$

8) Из (2) имеем:

$$J_v(\tau_v = 0) = C_v + B_v(T_0) \quad \mathbf{(4)}$$

9) Из (1) имеем:

$$H_v(\tau_v) = \frac{1}{3(1+\eta_v)} \left[-C_v \sqrt{3(1+\eta_v)} \exp(-\tau_v \sqrt{3(1+\eta_v)}) + B_v(T_0) \beta_v^* \right]$$

$$H_v(\tau_v = 0) = \frac{1}{3(1+\eta_v)} \left[-C_v \sqrt{3(1+\eta_v)} + B_v(T_0) \beta_v^* \right] \quad (5)$$

10) Из (3-5) имеем:

$$C_v + B_v(T_0) = \frac{2}{3(1+\eta_v)} \left[-C_v \sqrt{3(1+\eta_v)} + B_v(T_0) \beta_v^* \right]$$

⇓

$$C_v \sqrt{3(1+\eta_v)} = -\frac{3(1+\eta_v) - 2\beta_v^*}{\sqrt{3(1+\eta_v)} + 2} B_v(T_0)$$

11) Теперь (5) будет иметь вид:

$$F_v(\tau_v = 0) = 4\pi H_v = \frac{4\pi B_v(T_0)}{3(1+\eta_v)} \left[\frac{3(1+\eta_v) - 2\beta_v^*}{\sqrt{3(1+\eta_v)} + 2} + \beta_v^* \right] =$$
$$= 4\pi B_v(T_0) \frac{1 + \frac{\beta_v^*}{\sqrt{3(1+\eta_v)}}}{\sqrt{3(1+\eta_v)} + 2}$$

12) Чтобы получить поток в непрерывном спектре, надо положить $\eta_v = 0$

$$F_v^c(\tau_v = 0) = 4\pi B_v(T_0) \frac{1 + \frac{\beta_v^*}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + 2}$$

13) Окончательно для профиля линии (остаточной интенсивности) имеем:

$$r_v = \frac{1 + \frac{\beta_v^*}{\sqrt{3(1+\eta_v)}}}{\sqrt{3(1+\eta_v)} + 2} \frac{\sqrt{3} + 2}{1 + \frac{\beta_v^*}{\sqrt{3}}}$$

14) Оценим глубину профиля линии (остаточной интенсивности) для центральной частоты линии. В этом случае

$$\alpha_{v_0}^l \gg \alpha_{v_0}^c \Rightarrow \eta_{v_0} \gg 1$$

Тогда из (6) имеем

$$r_{v_0} \approx \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3 + \beta_v^*}} \frac{1}{\sqrt{\eta_{v_0}}} \approx \frac{1}{\sqrt{\eta_{v_0}}}$$

~1 ←

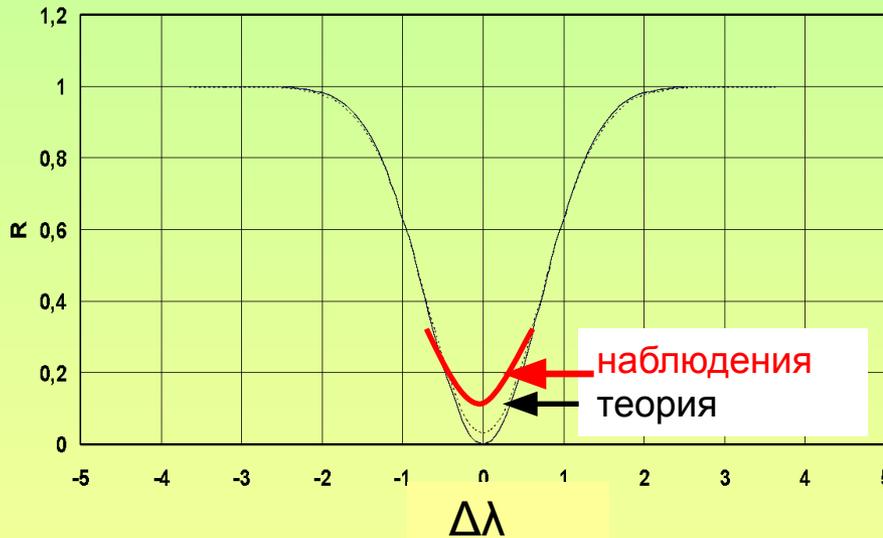
15) Сравнение с наблюдениями

Теория

Типичное значение 10^6-10^8 . Это означает,

что теория дает значение $r_{v_0} \sim 10^{-3}$.

Наблюдения дают значения $r_{v_0} \sim 10^{-2} - 10^{-1}$



Вывод: наша теория не учитывает появление дополнительных квантов в линии. Следует найти такой механизм