

Белорусский государственный университет транспорта  
кафедра «ЛОКОМОТИВЫ»

# МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

**Лекторы:** *д.т.н., проф. Сосновский Леонид Адамович*  
*к.т.н., доц. Комиссаров Виктор Владимирович*

**Ассистент:** *асс. Таранова Е.С.*

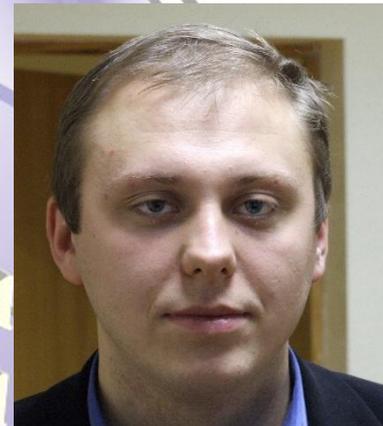
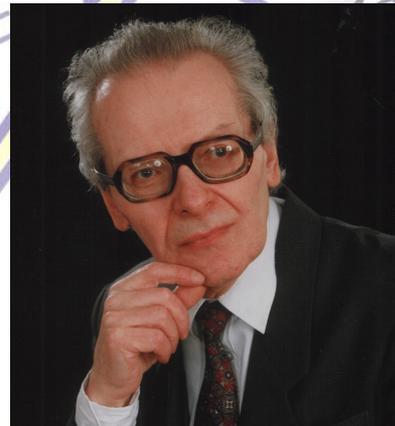
*Лекции – 4 часа*

*Лаб. работы – 4 часа*

*Форма контроля знаний – экзамен*

*(по всем вопросам обращаться в ауд. 1415а, 1403)*

**ГОМЕЛЬ, 2017**





## Основная:

1. ***Сосновский Л.А. Основы трибофатики: Учебное пособие для студентов технических высших учебных заведений (допущено Министерством образования Республики Беларусь). – Гомель: БелГУТ, 2003. – Т.1. – 246 с., – Т.2. – 234 с. (в библиотеке)***
2. ***Сенько В.И., Сосновский Л.А. Основные идеи трибофатики и их изучение в техническом университете. Пособие. – Гомель: БелГУТ, 2005. – 187 с. (в библиотеке)***

## Дополнительная:

1. *Сосновский Л.А., Комиссаров В.В. Основы трибофатики. Пособие к лекционному курсу. – Ч.1. – Гомель: БелГУТ, 2005. – 164 с. (в продаже, БелГУТ)*
2. *Сосновский Л.А., Комиссаров В.В., Щербаков С.С. Основы трибофатики. Пособие к лекционному курсу. – Ч.2. – Гомель: БелГУТ, 2008. – 216 с. (в продаже, БелГУТ)*
3. *Богданович А.В., Еловой О.М., Марченко А.В., Сосновский Л.А., Тюрин С.А. Основы трибофатики. Лабораторный практикум. – Ч.1 – Гомель: БелГУТ, 1999. – 44 с. (в библиотеке)*
4. *Сосновский Л.А., Щербаков С.С. Сюрпризы трибофатики. – Гомель: БелГУТ, 2005. – 192 с. (в библиотеке)*
5. *Sosnovskiy L.A., Sherbakov S.S. Surprises of Tribo-Fatigue. – Minsk: Magic book, 2009. – 200 p.*
6. Слово о трибофатике. Редактор-составитель А. В. Богданович / Авт.: Ботвина Л. Р., Высоцкий М. С., Горбацевич М. И., Грунтов П. С., Дроздов Ю. Н., Корешков В. Н., Кухарев А. В., Марченко В. А., Махутов Н. А., Павлов В. Г., Сосновский Л. А., Старовойтов Э. И., Стражев В. И., Трощенко В. Т., Шуринов В. А., Фролов К. В., Эфрос Д. Г. –Гомель-Минск-Москва-Киев: Remika, 1996. –132 с. (в библиотеке)
7. *Сосновский Л.А. Механика износоусталостного повреждения. – Гомель: БелГУТ, 2007. –434 с. (в библиотеке)*
8. *Сосновский Л.А. L-риск (механотермодинамика необратимых повреждений). – Гомель: БелГУТ, 2004. –317 с. (в продаже, БелГУТ)*
9. **Фундамент и прикладн задачи тф**

# Лекция 1

## ОБЪЕМНОЕ РАЗРУШЕНИЕ: СТАТИКА (МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ)

### СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ:

- 3.1 Нагрузки.
- 3.2 Условие прочности. Допускаемое напряжение.
- 3.3 Внутренние усилия: метод сечений.
- 3.4 Механические свойства.
- 3.5 Основные типы статического разрушения.
- 3.6 Механические состояния. Закон Гука. Энергия деформации.
- 3.7 Сложное напряженное состояние.
- 3.8 Теории прочности. Методы расчета на прочность.



# 3.1 НАГРУЗКА, ПРОЧНОСТЬ, ЖЕСТКОСТЬ



**Нагрузка**, в самом общем понимании, – это любое воздействие на тело (или объект).

Если дело имеют с механической нагрузкой, приложенной в точке, то важнейшим параметром, ее характеризующим, является сила (измеряемая, например, в ньютонах – Н).

**Сила** – это мера механического взаимодействия тел (рисунок 2.1, а).

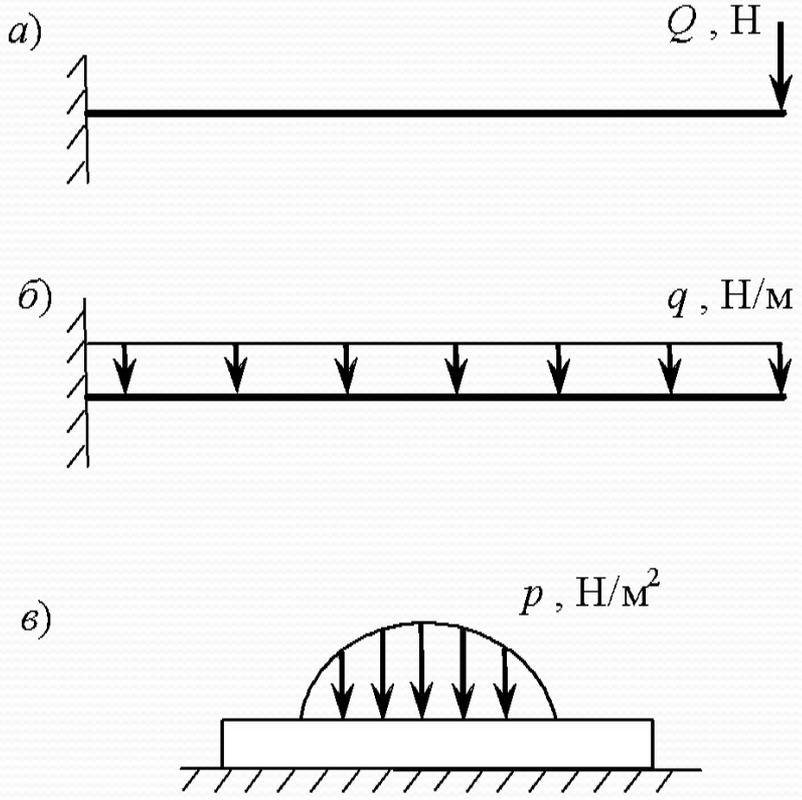
В ряде случаев вводят представление о **погонной нагрузке**, которую характеризует сила, приходящаяся на единицу длины (Н/м) (рисунок 2.1, б); ее называют также **интенсивностью** (распределенной) **нагрузки**.

Когда такое взаимодействие осуществляется по поверхности (или площадке) контакта, то параметром, его характеризующим, служит **давление** (измеряемое силой, приходящейся на единицу площади контакта –  $\text{МН/м}^2 = \text{МПа}$ ) (рисунок 2.1, в).

Процесс действия нагрузки на объект называют **нагружением**. Иными словами, **нагружение** – это закон изменения нагрузки во времени.

**Прочность** – это способность твердого тела воспринимать и выдерживать нагрузку, не разрушаясь.

**Жесткость** – это его способность сохранять свои размеры и форму при действии механической нагрузки.



**Рисунок 1 – Схематическое изображение нагрузки (а), погонной нагрузки (б), давления (в)**



## 3.2 УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ.

5

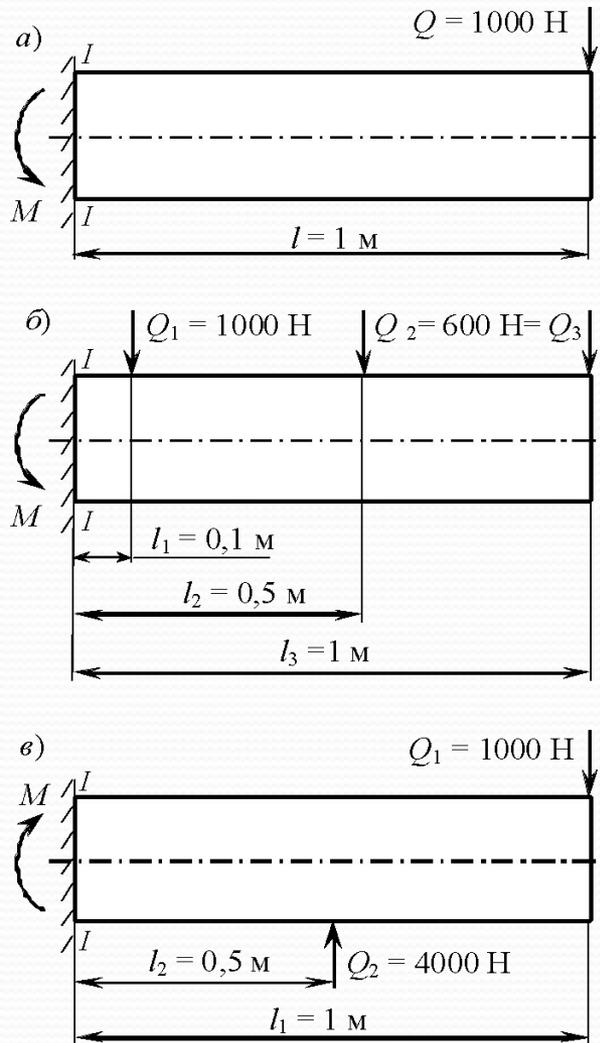
*Условие прочности при линейном напряженном состоянии, или условие недостижения предельного состояния, записывают так:*

$$\sigma \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{n} . \quad (3.1)$$

Используя условие (2.1) в той или иной форме, реализуют следующие *три процедуры расчетов на прочность*:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\text{max}} \leq [\sigma]; \\ W \geq M / [\sigma]; \\ [\sigma] \geq M / W, \end{array} \right\} . \quad (3.2)$$

которые называют соответственно: *проверка прочности*; *определение размеров поперечного сечения* элемента конструкции; *выбор материала* для его изготовления.

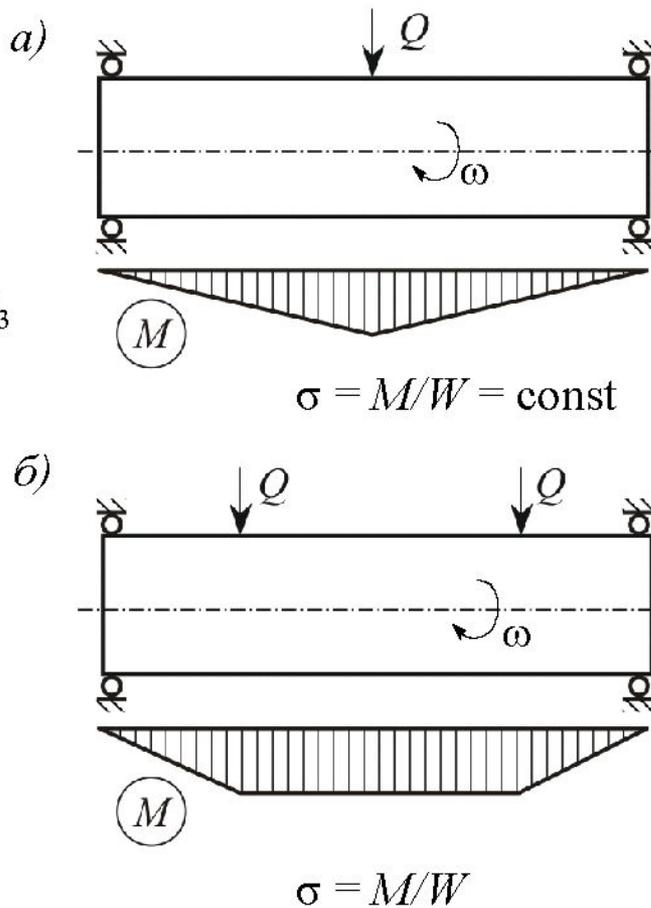
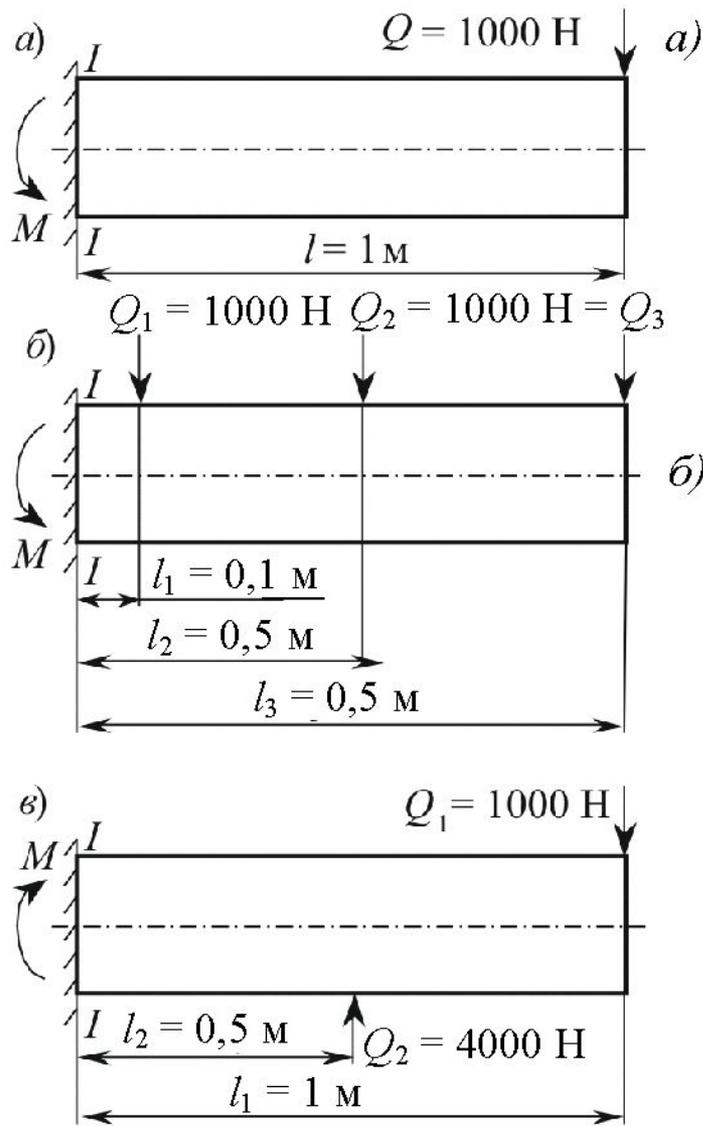


**Рисунок 2 – К задаче о расчете на прочность балки при ее изгибе**



## 3.2 УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ.

6



$$\sigma = \frac{M}{W} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{n_{\sigma}}$$

**Какая из балок  
нагружена сильнее?**

**Какой из валов  
имеет меньшую  
(большую)  
прочность?**



# 3.3 ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ

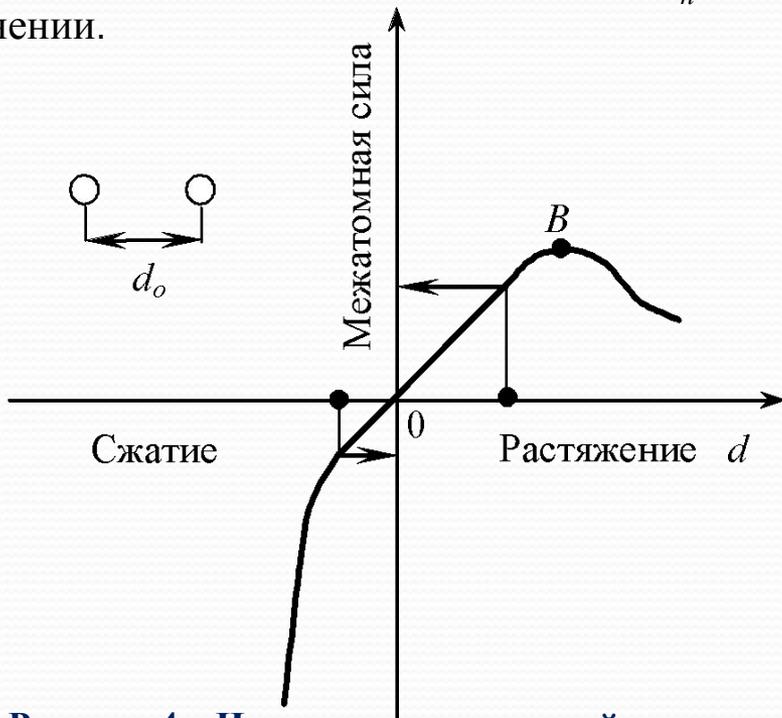


$$Q - Q_n = 0$$

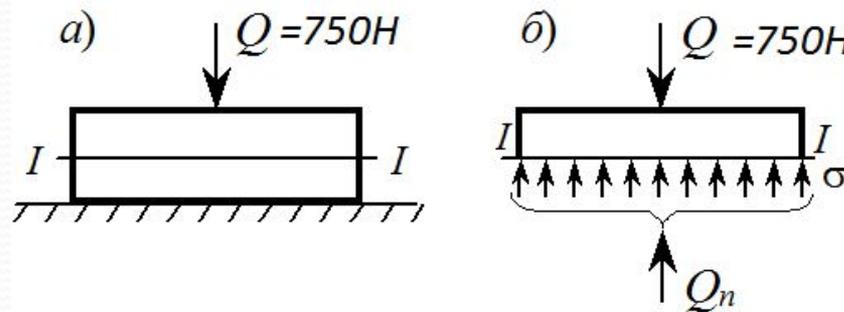
**Интенсивность внутренней силы**

$$\sigma = Q_n / A_0$$

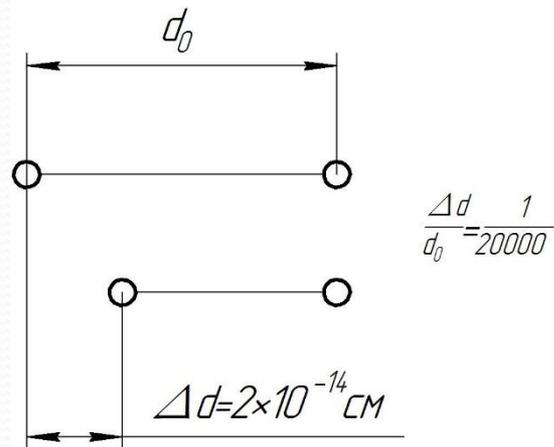
**напряжение** – это внутреннее усилие, приходящееся на единицу площади (Н/м<sup>2</sup>, МПа и др.). равнодействующая напряжений в данном сечении и есть **внутреннее усилие**  $Q_n$  в этом сечении.



**Рисунок 4 – Изменение межатомной силы взаимодействия при относительном смещении двух атомов**



**Рисунок 3 – К определению внутреннего усилия в кирпиче**



При сжатии кирпича нагрузкой  $Q$  (см. рисунок 2.3, а) расстояние между его атомами уменьшается на  $\sim 2 \cdot 10^{-14}$  см.

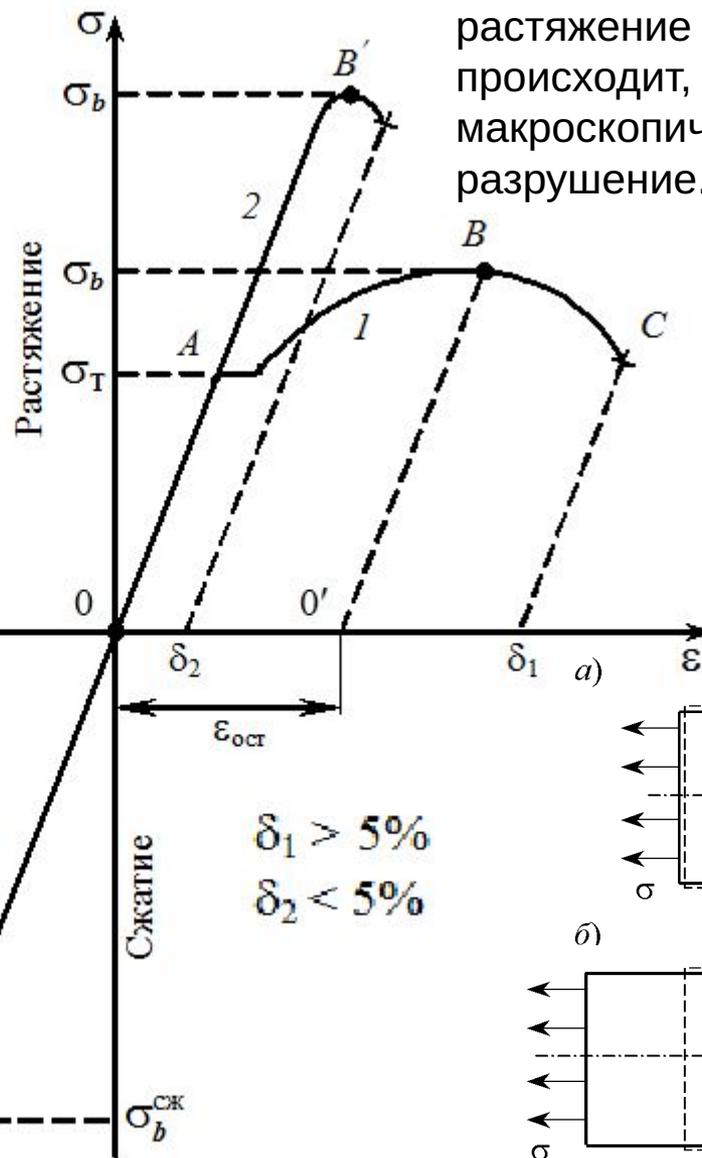
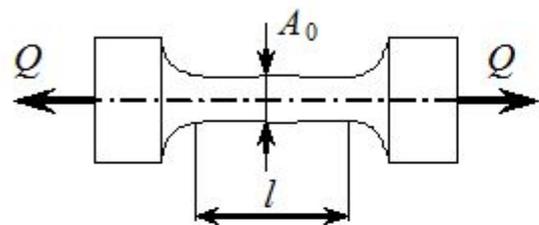
Смещение “всех атомов” кирпича под воздействием той же нагрузки, то оказывается, что его сжатие (т.е. уменьшение размера в направлении действия  $Q$ ) составит  $\sim 1/20000$  см, что уже ощутимо.

Такая степень сжатия и возбуждает совсем не малое результирующее внутреннее усилие  $Q_n = 750$  Н

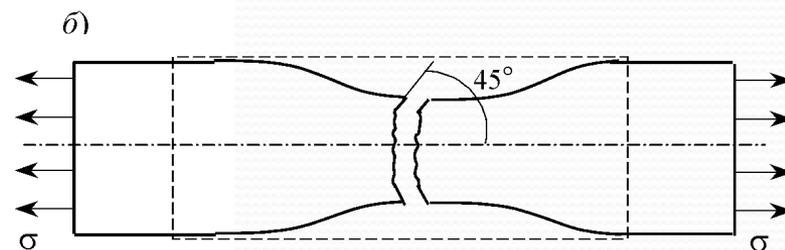
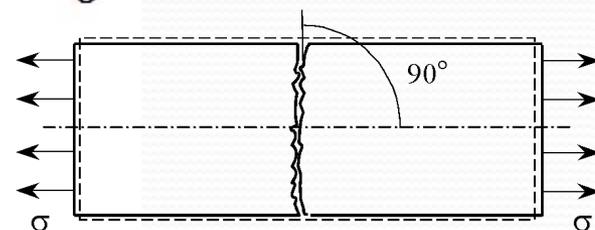


# 3.4 МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ/СЖАТИИ

Когда проводят стандартные испытания на растяжение стального образца, происходит, по существу, то же самое – макроскопическое (объемное) разрушение.



**Рисунок 6 – Схемы статического разрушения металлических образцов в хрупком (а):  $\delta < 5\%$  и пластическом (б):  $\delta > 5\%$  состояниях**



**Рисунок 5 – Диаграммы растяжения образца мягкой стали (1) и растяжения-сжатия образца высокопрочной стали (2)**



# 3.5 МЕХАНИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ. ЗАКОН ГУКА

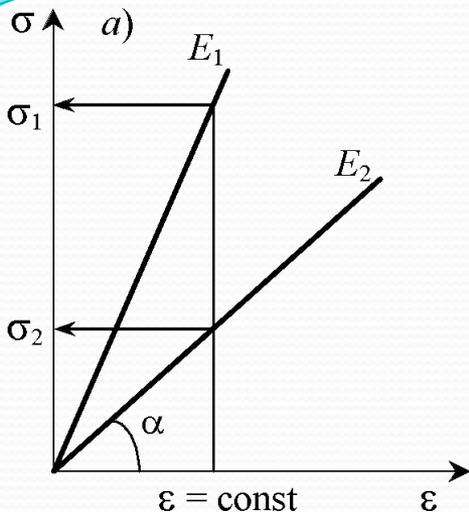
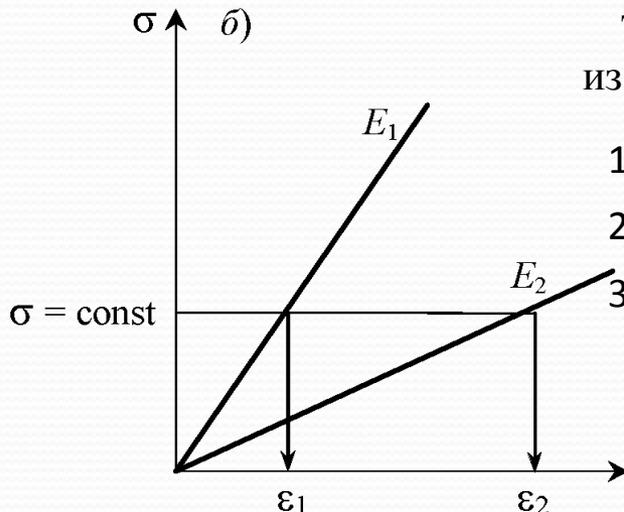


Рисунок 7 – К определению смысла модуля нормальной упругости



Твердое тело может находиться в одном из трех *механических состояний*.

1. Состояние упругости;
2. Состояние пластичности;
3. Состояние разрушения

*Состояние упругости* описывается *законом Гука*

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.3)$$

*E* есть характеристика жесткости материала (**МОДУЛЬ ЮНГА**).

## ЧТО ТАКОЕ ЗАКОН?

*Пластическое состояние* характеризуется нелинейной зависимостью  $\sigma(\varepsilon)$  между напряжениями и деформациями (кривая *AB* на рисунке 2.4), при этом с ростом  $\sigma$  увеличивается и  $\varepsilon$ :

$$\sigma = E_p \varepsilon. \quad E_p = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha_p = \operatorname{var} \quad (3.4)$$

Здесь *модуль пластичности*  $E_p = \sigma/\varepsilon = \operatorname{tg} \alpha_p = \operatorname{var}$  изменяется в интервале  $E > E_p \geq 0$ , достигая значения  $E_p = 0$  в точке *B* (т. к. здесь  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ ).

*Состояние разрушения* можно было бы описать обратной нелинейной зависимостью  $\sigma(\varepsilon)$  (кривая *BC* на рисунке 2.4): увеличение  $\varepsilon$  сопровождается уменьшением номинальных напряжений  $\sigma$ .



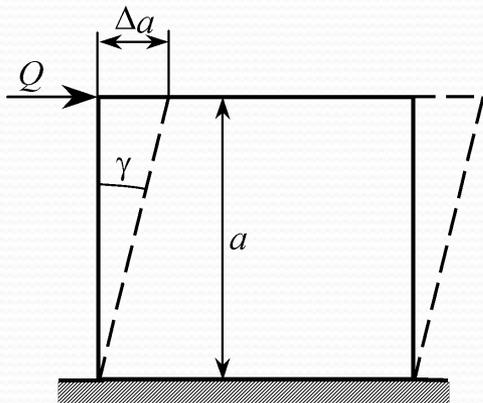
# 3.5 МЕХАНИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ. ЗАКОН ГУКА



*Закон Гука при сдвиге*

$$\tau = G\gamma, \tag{3.6}$$

где *относительный сдвиг*  $\gamma \approx \text{tg } \gamma = \Delta a/a$ ,  $\gamma \ll 1$  и  $\tau = Q/A$  – *касательное напряжение*



$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \tag{3.7}$$

**$G \approx 0,4 E$  – МОДУЛЬ СДВИГА**

**Рисунок 8 – Схема чистого сдвига**

Для описания трехосного напряженного состояния деформируемого твердого тела используют *интенсивность напряжения*

$$\sigma_{\text{инт}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2} \tag{3.8}$$

Интенсивность напряжения (3.8) связана простейшей зависимостью с *октаэдрическим касательным напряжением*  $\tau_{\text{окт}}$ :

$$\sigma_{\text{инт}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}} \tag{3.8a}$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \tag{3.9}$$

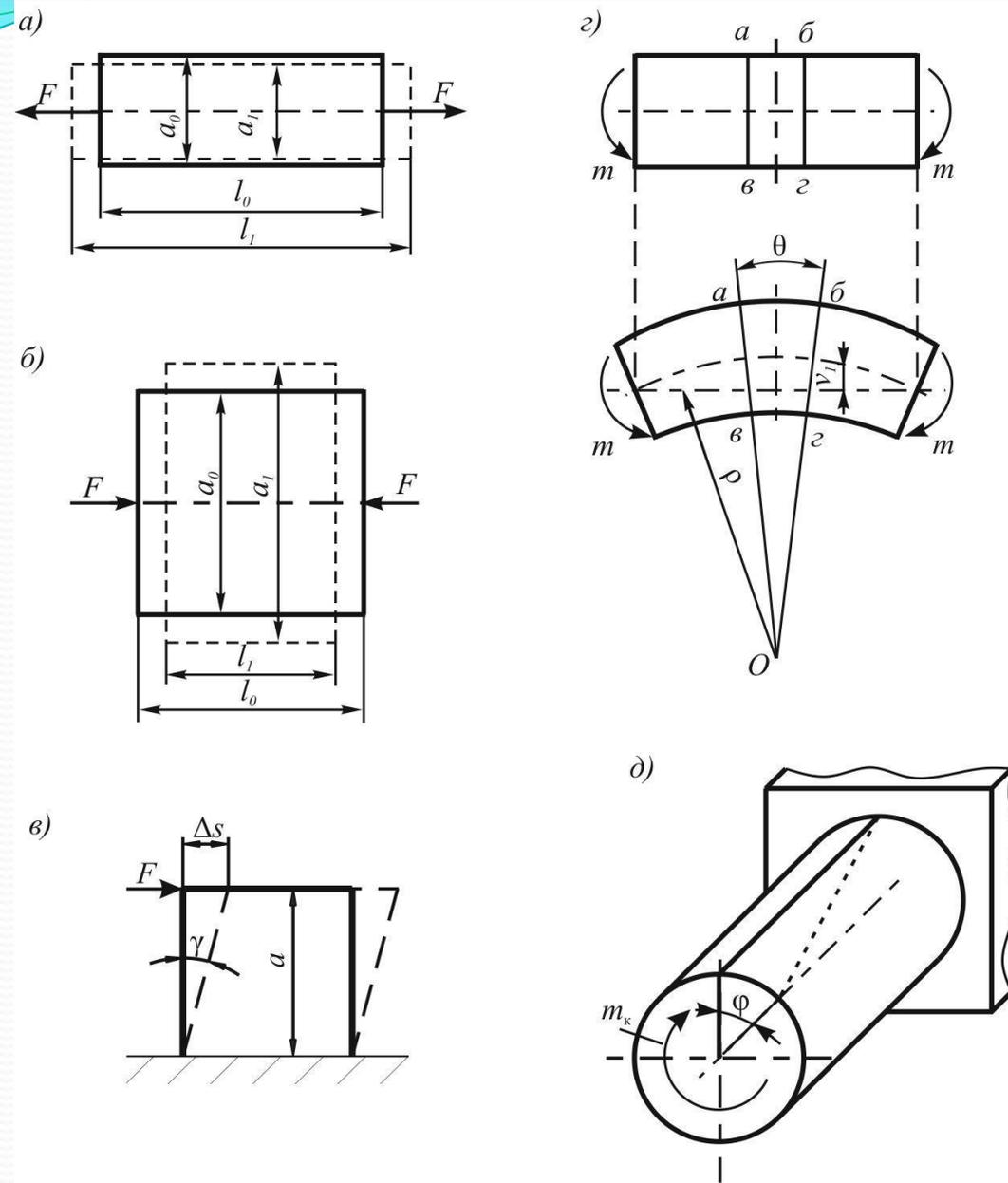


Рисунок 9 – Схемы основных видов нагружения:

*a* – растяжение;

*б* – сжатие;

*в* – изгиб;

*г* – сдвиг;

*д* – кручение

# ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ: ЕДИНИЧНОЕ, ОСОБЕННОЕ, ОБЩЕЕ

## Основные виды деформации: единичное, особенное, общее

Отдельное	Особенное		
	Растяжение и сжатие	Чистый изгиб	Поперечный изгиб
I. Схема деформации			
II. Распределение напряжения по сечению			
III. Напряжения в произвольной точке сечения	$\sigma = \frac{N}{A}$	$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{M}{I/y} = \frac{M}{Y^2}$	$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{M}{I/y} = \frac{M}{Y^2}$ $\tau = \frac{Q \delta^{max}}{bI} = \frac{Q}{bI/S^{max}} = \frac{Q}{Y_1}$
IV. Напряжения максимальные	$\sigma_{max} = \frac{N}{A}$	$\sigma_{max} = \frac{M}{W}$	$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$ $\tau_{max} = k \frac{Q}{A} = \frac{Q}{Y_2}$
V. Условие прочности	$\frac{N}{A} \leq [\sigma]$	$\frac{M}{W} \leq [\sigma]$	$\frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma], \frac{Q}{A/k} \leq [\tau]$
VI. Перемещения и деформации (абсолютные)	$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{N}{EA/l} = \frac{N}{\gamma_N}$	$v = \frac{Ml^2}{2EI} = \frac{M}{2EI/l^2} = \frac{M}{\gamma_M}$ $\theta = \frac{Ml}{EI} = \frac{M}{EI/l} = \frac{M}{\gamma_M}$	$v_{max} = \frac{Ql^3}{3EI} = \frac{Q}{3EI/l^3} = \frac{Q}{\gamma_Q}$ $\theta_{max} = \frac{Ql^2}{2EI} = \frac{Q}{2EI/l^2} = \frac{Q}{\gamma_Q}$ $\theta = \frac{Q}{2EI/l^2} = \frac{M}{\gamma_M}$
VII. Потенциальная энергия упругой деформации	$U_N = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{N^2}{2EA/l} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{\gamma_N}$	$U_M = \frac{M^2 l}{2EI} = \frac{M^2}{2EA/l} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{\gamma_M}$	$U_Q = \frac{M^2 l}{2EI} = \frac{M^2}{2EA/l} = \frac{M^2}{2\gamma_M}$ $U_Q = \frac{Q^2 l}{2GA} = \frac{Q^2}{2GA/l} = \frac{Q^2}{2\gamma_Q}$

Особенное		Общее
Чистый сдвиг	Кручение	
		Деформация – это изменение размеров и (или) формы тела
		Напряжения распределены по сечению непрерывно (без скачков)
$\tau = \frac{Q}{A}$	$\tau = \frac{M_x \rho}{I_p} = \frac{M_x}{I_p/\rho} = \frac{M_x}{Y_4}$	Напряжение = $\frac{\text{Характерный силовой фактор}}{\text{Соответствующая геометрическая характеристика сечения}}$
$\tau_{max} = \frac{Q}{A}$	$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_p}$	
$\frac{Q}{A} = [\tau]$	$\frac{M_x}{W_p} \leq [\tau]$	Максимальное действующее напряжение $\leq$ Допускаемое напряжение
$\Delta \delta = \frac{Q \alpha}{GA} = \frac{Q}{GA/\alpha} = \frac{Q}{\gamma_Q}$	$\varphi = \frac{M_x l}{GI_p} = \frac{M_x}{GI_p/l} = \frac{M_x}{\gamma_M}$	Деформация = $\frac{\text{Характерный силовой фактор}}{\text{Соответствующая погонная жесткость тела}}$
$U_Q = \frac{Q^2 \alpha}{2GA} = \frac{Q^2}{2GA/\alpha} = \frac{Q^2}{2\gamma_Q}$	$U_{M_x} = \frac{M_x^2 l}{2GI_p} = \frac{M_x^2}{2GI_p/l} = \frac{M_x^2}{2\gamma_M}$	ПЭД = $\frac{1}{2} \frac{\text{Квадрат характерного силового фактора}}{\text{Соответствующая погонная жесткость тела}}$



# ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗЛИЧНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

## Характеристики различных напряженных состояний

Напряженное состояние	Схема приложения нагрузок	Тензор напряжения	Примеры
Линейное: одноосное растяжение		$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_1 > 0$	Растяжение гладких образцов до образования шейки
одноосное сжатие		$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 < 0$	Сжатие образцов при смазке торцовых поверхностей. Приближенно: свободная ковка, прокатка узких заготовок в гладких валках
Плоское одноименное: двухосное растяжение		$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 > 0$	<p>Нагружение тонкостенной шаровой емкости внутренним давлением <math>\sigma_1 = \sigma_2</math></p> <p>Нагружение тонкостенной трубы одновременно внутренним давлением и осевым растяжением <math>\sigma_1 = \sigma_2</math>.</p> <p>Нагружение обечайки цилиндрической тонкостенной емкости внутренним давлением <math>\sigma_1 = 2\sigma_2</math></p>
двухосное сжатие		$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$	Прокатка в ручьевых валках ковка в штампах, закрытых с двух сторон $\sigma_2 \leq \sigma_3$

Напряженное состояние	Схема приложения нагрузок	Тензор напряжения	Примеры
Плоское разноименное		$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ $\sigma_1 > 0$ $\sigma_3 < 0$	<p>Кручение цилиндрического стержня <math>\sigma_1 = -\sigma_3</math></p> <p>Внутренние зоны толстостенной трубы, подвергнутой внутреннему давлению <math>\sigma_1 \neq -\sigma_3</math></p>
Объемное одноименное: трехосное растяжение		$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ $\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 > 0$ $\sigma_3 > 0$	<p>Гидростатическое растяжение в центре быстро нагреваемого шара <math>\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3</math> При растяжении цилиндрического образца с кольцевым надрезом в центральных зонах <math>\sigma_1 &gt; \sigma_2, \sigma_2 \approx \sigma_3</math></p>
трехосное сжатие		$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ $\sigma_1 < 0$ $\sigma_2 < 0$ $\sigma_3 < 0$	<p>Гидростатическое сжатие <math>-\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma_3</math> Прессование, сжатие под гидростатическим давлением (опыты Кармана). Закрытая ковка (в штампах). Вдавливание (при испытаниях твердости по Бриггеллю, Роквеллу и т.д.) <math>-\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma_3</math></p>
Объемное разноименное		$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ $\sigma_3 < 0 \text{ или } \sigma_1 > 0$ $\sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$	Растяжение образца с шейкой под гидростатическим давлением; волочение прутков, проволоки и труб



# ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

14

При действии пространственной системы сил, характеризуемой *главными напряжениями*  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , состояние упругости описывает *обобщенный закон Гука*

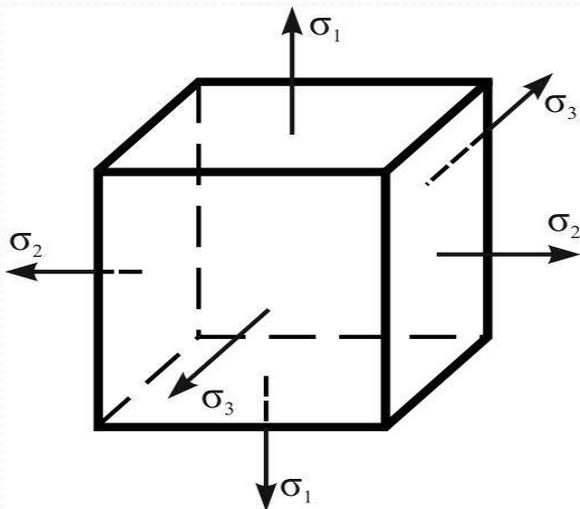


Рисунок 10 – Тензор напряжения

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2G \left[ \varepsilon_1 + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_{\text{ср}} \right]; \\ \sigma_2 &= 2G \left[ \varepsilon_2 + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_{\text{ср}} \right]; \\ \sigma_3 &= 2G \left[ \varepsilon_3 + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_{\text{ср}} \right],\end{aligned}\tag{3.5a}$$

где *средняя деформация*

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$



# 3.6 СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

При трехосном напряженном состоянии, которое характеризуется главными напряжениями  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , расчеты на прочность ведут по следующей схеме:

$$\begin{array}{l}
 \sigma_1 \rightarrow \\
 \sigma_2 \rightarrow \\
 \sigma_3 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{|c}
 \hline
 \text{Теория} \\
 \text{проч-} \\
 \text{ности} \\
 \hline
 \end{array}
 \rightarrow f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_j, \dots) = \sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{n}. \quad (3.10)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{n} \quad (3.11)$$

Наиболее широкое распространение получили *классические теории прочности*.

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 f\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right) \quad (3.12)$$

По первой (I), третьей (III) и четвертой (IV) теориям прочности имеем

$$\left. \begin{array}{l}
 \sigma_{\text{ЭКВ}}^I = \sigma_1; \\
 \sigma_{\text{ЭКВ}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1 \left(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right); \\
 \sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\
 = \sigma_1 \left[1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) - \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \left(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right]^{1/2}.
 \end{array} \right\} (3.13)$$

Пусть

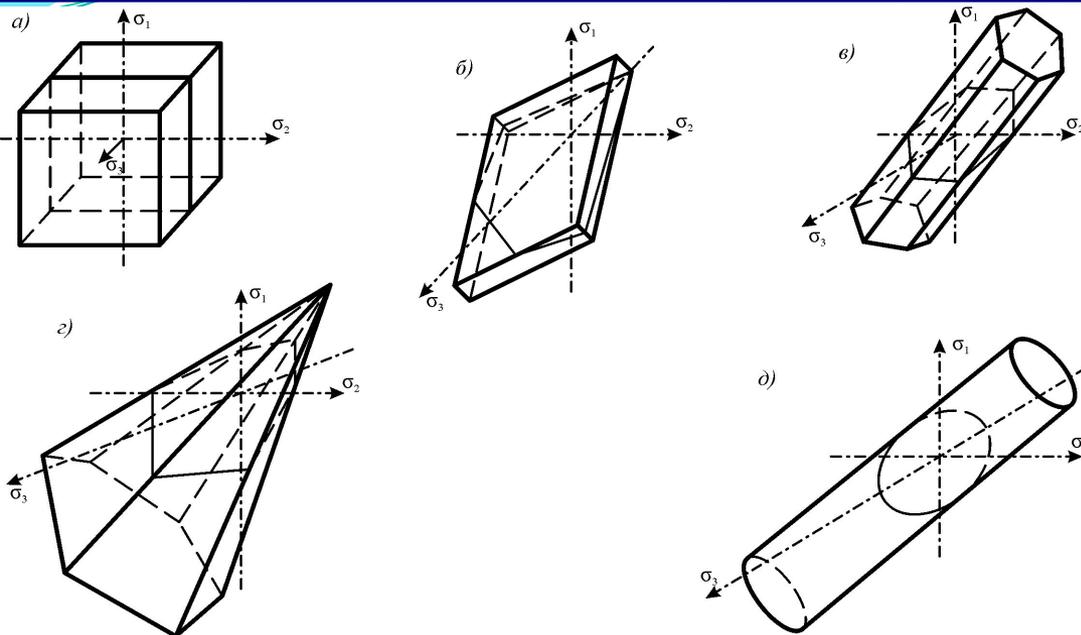
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III} = ?$$

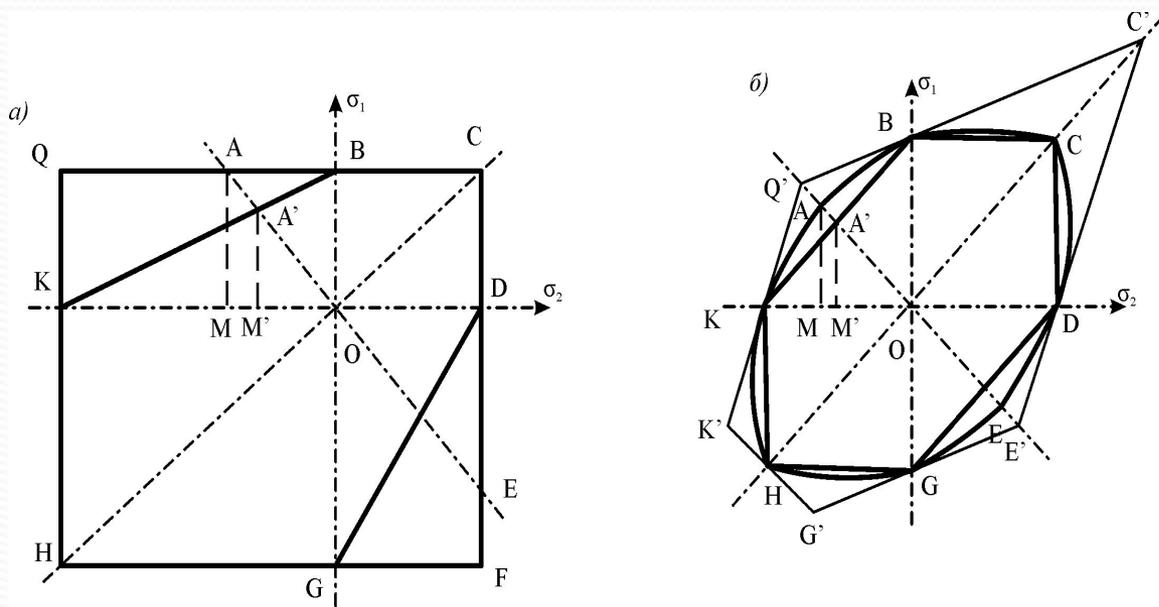
$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = ?$$



# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ



Геометрическая интерпретация теорий ПС в пространстве главных напряжений:  
а - теория максимальных нормальных напряжений;  
б - теория максимальных линейных деформаций;  
в - теория максимальных касательных напряжений;  
г - теория Мора;  
д - энергетическая теория



Диаграммы предельных состояний для ДНС



# ОБЗОР НЕКОТОРЫХ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ



Критерии предельного состояния материалов при статическом нагружении (изотропный матери

Расчетные отношения	Номер формулы	Авторы критерия
$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_p \\  \sigma_3  = \sigma_c \end{aligned} \right\}$	(1)	Г. Галилей Г.В. Лейбниц
$ \sigma_1 - \sigma_3  = \sigma_p$	(2)	Ш.О. Кулон
$\sigma_{\text{инт}} = \sigma_p$	(3)	Р. Мизес
$\sigma_1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_c} \sigma_3 = \sigma_p$	(4)	Ш.О. Кулон О. Мор
$\chi \sigma_{\text{инт}} + (1 - \chi) \sigma_1 = \sigma_p$	(5)	Г.С. Писаренко А.А. Лебедев
$\chi \sigma_{\text{инт}} + (1 - \chi) \sigma_1 A^{i-1} = \sigma_p$	(5a)	
$\eta \sigma_{\text{инт}} + (1 - \eta)(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_p \text{ где } \eta = \left(1 - \frac{\sigma_p}{\tau_k}\right)(2 - \sqrt{3})$	(5б)	Б.И. Ковальчук
$\begin{aligned} (\sigma_c + \sigma_p)^2 \sigma_{\text{инт}} &= \left[ (\sigma_p \sqrt{\sigma_c} + \sigma_c \sqrt{\sigma_p}) - 3(\sqrt{\sigma_c} - \sqrt{\sigma_p}) \sigma_c \right]^2 \\ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + m(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + n(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) &= l \end{aligned}$	(6)	Д. Друккер В. Прагер
$\text{где } m = \frac{\sigma(\tau_k)^2 - 2\sigma_p \sigma_c}{\sigma_p \sigma_c} \quad n = \frac{6\tau_k(\sigma_c - \sigma_p)}{\sigma_p \sigma_c} \quad l = 6(\tau_k)^2$	(7)	Ю.И. Янг
$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2\sqrt{2}\sigma_c \sigma_p}{\sigma_c + \sigma_p} - \frac{\sqrt{2}(\sigma_c - \sigma_p)}{\sigma_c - \sigma_p} (\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_3)$	(8)	И.Н. Миролубов
$\begin{aligned} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} &= \frac{2\sqrt{2}\sigma_c \sigma_p}{\sigma_c + \sigma_p}; \quad c_2 = \frac{\sqrt{2}(\sigma_p - \sigma_c)}{\sigma_c + \sigma_p} \\ = c_1 + c_2(\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_3) &\text{ где } c_1 = \frac{2\sqrt{2}\sigma_c \sigma_p}{\sigma_c + \sigma_p}; \end{aligned}$	(9)	А.И. Боткин
$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв}} = \frac{\sigma_p}{2} \left[ a(\sigma_1 + \sigma_2) + c \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{\left[ a(\sigma_1 + \sigma_2) + c \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right]^2 + 4b(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \right] \end{aligned}$	(10)	К.Н. Кан Ю.С. Первушин



# ОБЗОР НЕКОТОРЫХ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ

## Критерии предельного состояния материалов при статическом нагружении (анизотропный

$N \left. \begin{aligned}  \sigma_1 - \sigma_3  &= \sigma_{1p} \\  \sigma_2 - \sigma_3  &= \sigma_{2p} \\  \sigma_1 - \sigma_2  &= \sigma_{1c} \end{aligned} \right\}$	(11)	Ш.О. Кулон
$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{\sigma_{1p}}{\sigma_{2p}}\right)^2 \sigma_2^2 = \sigma_{1p}^2$	(12)	Р. Миндес Р. Хилл
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1p}^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2p}^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_{1p}\sigma_{2p}} = 1$	(13)	Л.В. Ху Дж. Марин
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1p}^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2p}^2} + \frac{\sigma_3^2}{\sigma_{3p}^2} + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{12c}^2} + \frac{\tau_{23}^2}{\tau_{23c}^2} + \frac{\tau_{31}^2}{\tau_{31c}^2} = 1$	(14)	Ф. Веррен
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1p}^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2p}^2} - \left(\frac{1}{\sigma_{1p}^2} + \frac{1}{\sigma_{2p}^2} - \frac{1}{\sigma_{1p}\sigma_{2p}}\right) \sigma_1\sigma_2 = 1$	(15)	Э.С. Уманский С.С. Веремчук
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1p}^2} \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2 = A_0 \sigma_{1p}^2 \text{ где } A_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_{1p}}{\sigma_{2p}}}}$	(16)	В.Н. Бастун Н.И. Черняк
$\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_{0^\circ p}^2} + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_{90^\circ p}^2} + \frac{\tau_{z\theta}^2}{\tau_k^2} + \frac{\gamma \sigma_z \sigma_\theta}{\sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z \sigma_\theta + \tau_{z\theta}^2}} = 1 \text{ где } \gamma = \frac{4}{\sigma_{45^\circ p}} - \frac{1}{\sigma_{0^\circ p}} - \frac{1}{\sigma_{90^\circ p}} - \frac{1}{\tau_k}$	(17)	Е.К. Ашкенази Ф.П. Пеккер
$\sigma_1^2 + \frac{\sigma_{1c}\sigma_{1c}}{\sigma_{2c}\sigma_{2c}} \sigma_2^2 + \left[1 + \frac{\sigma_{1c}\sigma_{1c}}{\sigma_{2c}\sigma_{2c}} + \frac{\sigma_{1c} - \sigma_{1c}}{\tau_{45^\circ c}} - \frac{\sigma_{1c}\sigma_{1c}}{\sigma_{2c}\sigma_{2c}} - \frac{\sigma_{2c} - \sigma_{2c}}{\tau_{45^\circ c}} - \frac{\sigma_{1c}\sigma_{1c}}{\tau_{45^\circ c}^2}\right] \sigma_1\sigma_2 +$ $+ \frac{\sigma_{1c} - \sigma_{1c}}{\sigma_{1c}} + \frac{\sigma_{1c}\sigma_{1c}}{\sigma_{2c}\sigma_{2c}} (\sigma_{2c} - \sigma_{2c}) \sigma_2 - \sigma_{1c}\sigma_{1c} = 0$ <p>сопротивление сдвигу для элемента, грани которого составляют с направлениями 1 и 2 угол 45°</p>	(18)	К.В. Захаров
$\left[\left(\frac{1}{\sigma_{1c}} - \frac{1}{\sigma_{1c}}\right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{\sigma_{2c}} - \frac{1}{\sigma_{2c}}\right) \sigma_2 + \left(\frac{1}{\sigma_{1c}} - \frac{1}{\sigma_{1c}}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{1}{\sigma_{2c}} - \frac{1}{\sigma_{2c}}\right)^2 \sigma_2^2 + \right.$ $\left. + \left[\left(\frac{1}{\sigma_{1c}} - \frac{1}{\sigma_{1c}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_{2c}} - \frac{1}{\sigma_{2c}}\right)^2 - \left[\left(\frac{1}{\tau_{45^\circ c}} + \frac{1}{\tau_{45^\circ c}}\right)\right] \sigma_1\sigma_2 + \frac{4\tau^2}{\tau_{45^\circ c}^2}\right] \right] = 2$	(19)	И.И. Гольденблат В.А. Копнов
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1c}\sigma_{1c}} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2c}\sigma_{2c}} + \sigma_1\sigma_2 \left(\frac{1}{\sigma_{1c}\sigma_{1c}} + \frac{1}{\sigma_{2c}\sigma_{2c}} - \frac{1}{\tau_{45^\circ c}^2}\right) + \left(\frac{1}{\sigma_{1c}} - \frac{1}{\sigma_{1c}}\right) (\sigma_1 + \sigma_2) = 1$	(19a)	И.И. Гольденблат В.А. Копнов



# ПРИМЕР РАСЧЕТА ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

**Пример I.** Определить запас прочности барабана мостового крана, в котором под действием огибающего его каната возникают тангенциальные напряжения сжатия  $\sigma_{\theta} = -16 \text{ кг/мм}^2$  (-160 МПа), максимальные напряжения изгиба  $\sigma_z = \pm 4 \text{ кг/мм}^2$  ( $\pm 40 \text{ МПа}$ ), напряжения кручения  $\tau_k = 2 \text{ кг/мм}^2$  (20 МПа). Материал барабана - серый чугун СЧ 21-40.

Определим главные напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z + \sigma_{\theta}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_{\theta})^2 + 4\tau_k^2} = \frac{4 - 16}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(4 + 16)^2 + 4 \cdot 2^2} = 4,2 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} = 42 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z + \sigma_{\theta}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_{\theta})^2 + 4\tau_k^2} = \frac{4 - 16}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(4 + 16)^2 + 4 \cdot 2^2} = -16,2 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} = -162 \text{ МПа};$$

Интенсивность напряжений

$$\sigma_{\text{инт}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} = \sqrt{4,2^2 + 16,2^2 - 4,2 \cdot 16,2} = 18,7 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} = 187 \text{ МПа}.$$

Характеристики материала: предела прочности чугуна СЧ21-40 при растяжении –  $\sigma_B^+ = 21 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$

(210 Па), при сжатии –  $\sigma_B^- = 95 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$  (950 МПа);  $\chi = \frac{\sigma_B^+}{\sigma_B^-} = 0,22$

Эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \chi \sigma_1 + (1 - \chi) \sigma_1 A = 0,22 \cdot 18,7 + (1 - 0,22) \times 4,2 \cdot 0,75 = 6,15 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} = 61,5 \text{ МПа},$$

Так как предел прочности чугуна при сдвиге, полученный в условиях однородного напряженного состояния, неизвестен, величину  $A$  не представляется возможным определить расчетным путем и, следовательно, принято его среднестатистическое значение  $A = 0,75$ .

**Коэффициент запаса прочности**  $n = \frac{\sigma_B^+}{\sigma_{\text{ЭКВ}}} = \frac{21}{6,15} = 3,4$

**По теории максимальных нормальных деформаций**

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \mu \sigma_3 = 4,2 - 0,25(-16,2) = 8,3 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} = 83 \text{ МПа}$$

$$n = \frac{\sigma_B^+}{\sigma_{\text{ЭКВ}}} = \frac{21}{8,3} = 2,5$$

**по теории максимальных нормальных напряжений**

$$n = \frac{\sigma_B^+}{\sigma_1} = \frac{21}{4,2} = 5$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \chi \sigma_3 = 4,2 - 0,22(-16,2) = 7,8 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} = 78 \text{ МПа}$$

$$n = \frac{\sigma_B^+}{\sigma_{\text{ЭКВ}}} = \frac{21}{7,8} = 2,7$$

**Согласно теории**



# К РАСЧЕТУ ДОПУСКАЕМОГО НАПРЯЖЕНИЯ

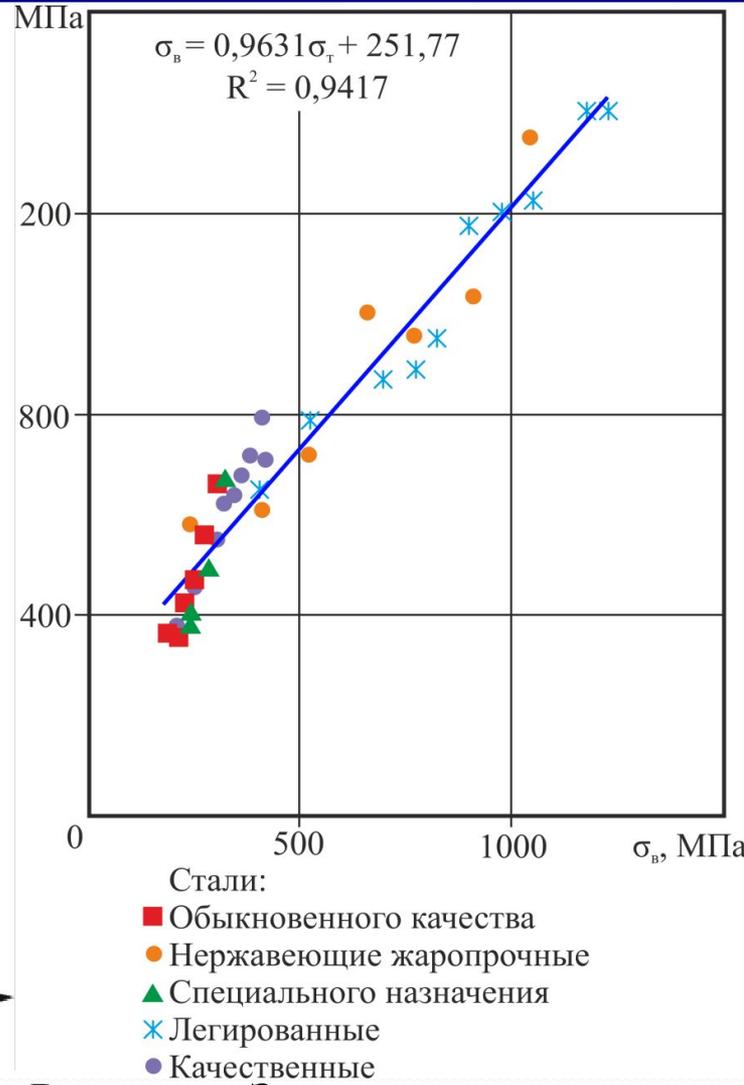
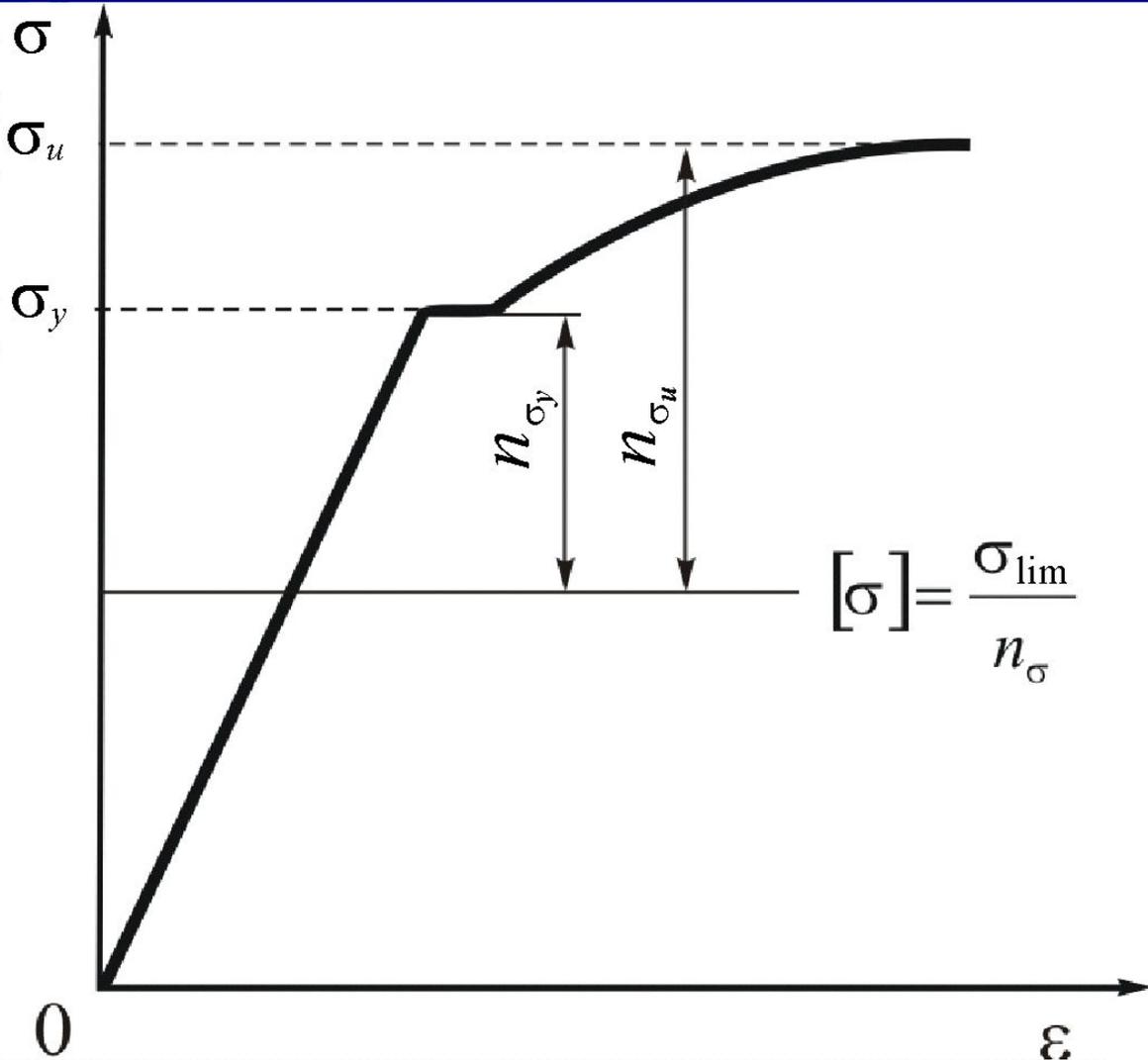


Рисунок – К определению предельных напряжений

Рисунок – Зависимость предела прочности от предела текучести для различных материалов



# ХАРАКТЕР НАГРУЖЕНИЯ

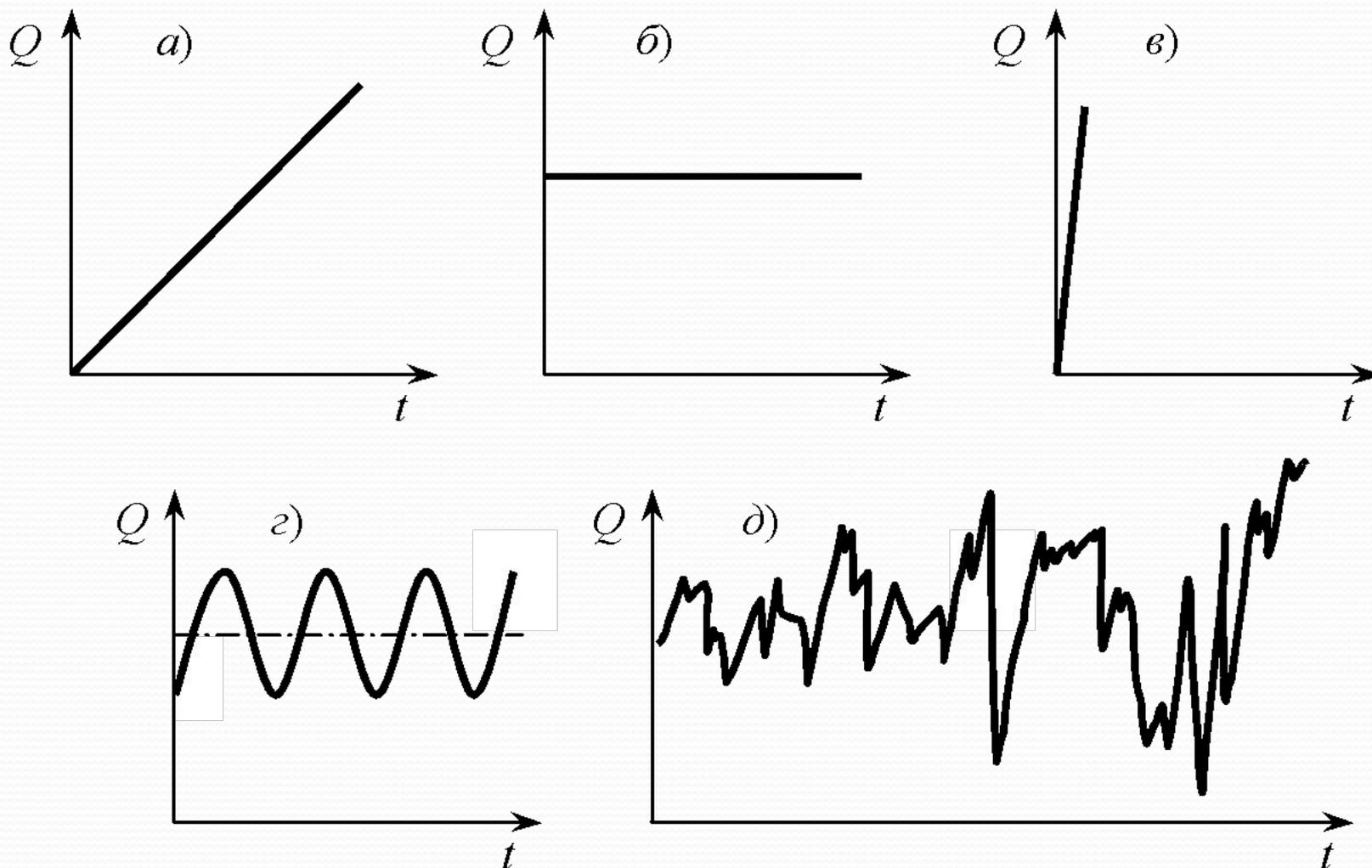


Рисунок – Основные законы нагружения твердого тела