

# ЛЕКЦИЯ №5 **Элементы механики сплошных сред**

Физическая модель: **сплошная среда** – это модель вещества, в рамках которой пренебрегают внутренним строением вещества, полагая, что вещество непрерывно распределено по всему занимаемому им объёму и целиком заполняет этот объём.

**Однородной** называется среда, имеющая в каждой точке одинаковые свойства.

**Изотропной** называется среда, свойства которой одинаковы по всем направлениям.

## **Агрегатные состояния вещества**

**Твердое тело** – состояние вещества, характеризующееся фиксированным объемом и неизменностью формы.

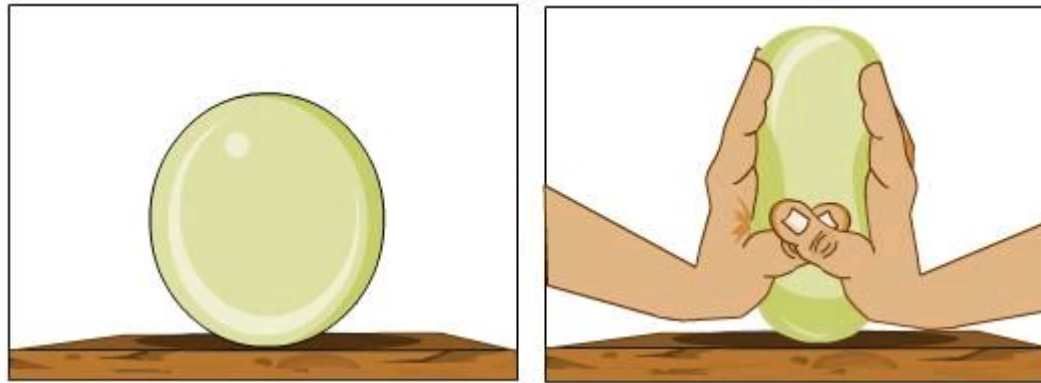
**Жидкость** – состояние вещества, характеризующееся фиксированным объемом, но не имеющее определенной формы.

**Газ** – состояние вещества, при котором вещество заполняет весь предоставленный ему объем.

# Механика деформируемого тела

**Деформация** – изменение формы и размеров тела.

**Упругость** - свойство тел сопротивляться изменению их объема и формы под воздействием нагрузок.



Деформация называется **упругой**, если она исчезает после снятия нагрузки и – **пластической**, если она после снятия нагрузки не исчезает.

В теории упругости доказывается, что все виды деформаций (**растяжение - сжатие, сдвиг, изгиб, кручение**) могут быть сведены к одновременно происходящим деформациям растяжения - сжатия и сдвига.

## Деформация растяжения – сжатия

**Растяжение - сжатие** - увеличение (или уменьшение) длины тела цилиндрической или призматической формы, вызываемое силой, направленной вдоль продольной его оси.

**Абсолютная деформация** – величина, равная изменению размеров тела, вызванному внешним воздействием:

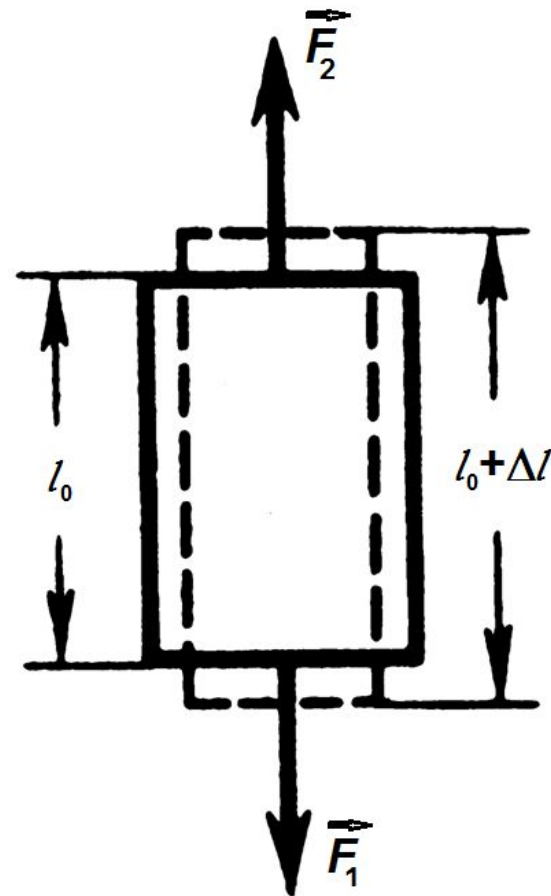
$$\Delta l = l - l_0 \quad , \quad (5.1)$$

где  $l_0$  и  $l$  - начальная и конечная длина тела.

**Закон Гука (I)** (Роберт Гук, 1660 г.): сила упругости пропорциональна величине абсолютной деформации и направлена в сторону ее уменьшения:

$$F = k\Delta l \quad , \quad (5.2)$$

где  $k$  - коэффициент упругости тела.



Относительная деформация:

$$\varepsilon = \Delta l / l_0 \quad . \quad (5.3)$$

**Механическое напряжение** – величина, характеризующая состояние деформированного тела  $[\sigma]=\text{Па}$ :

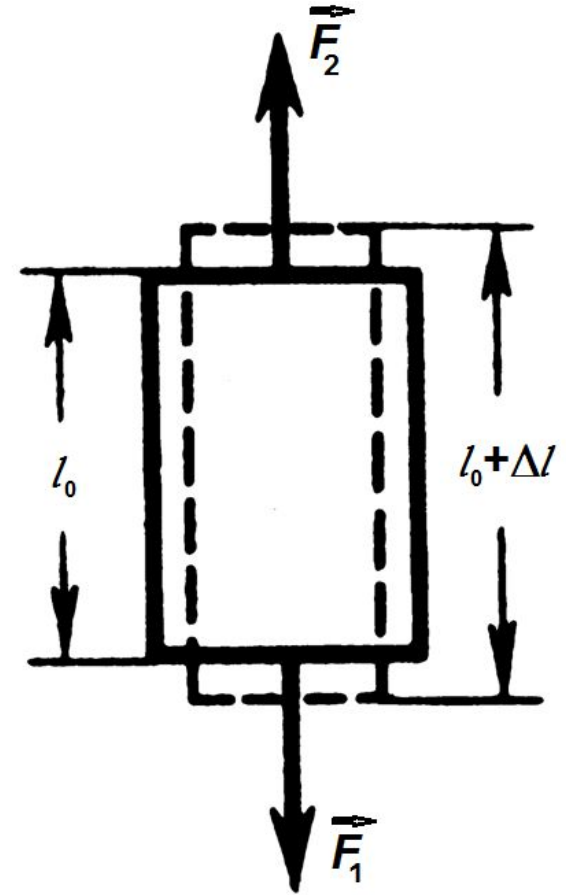
$$\sigma = F / S \quad , \quad (5.4)$$

где  $F$  - сила, вызывающая деформацию,  $S$  - площадь сечения тела.

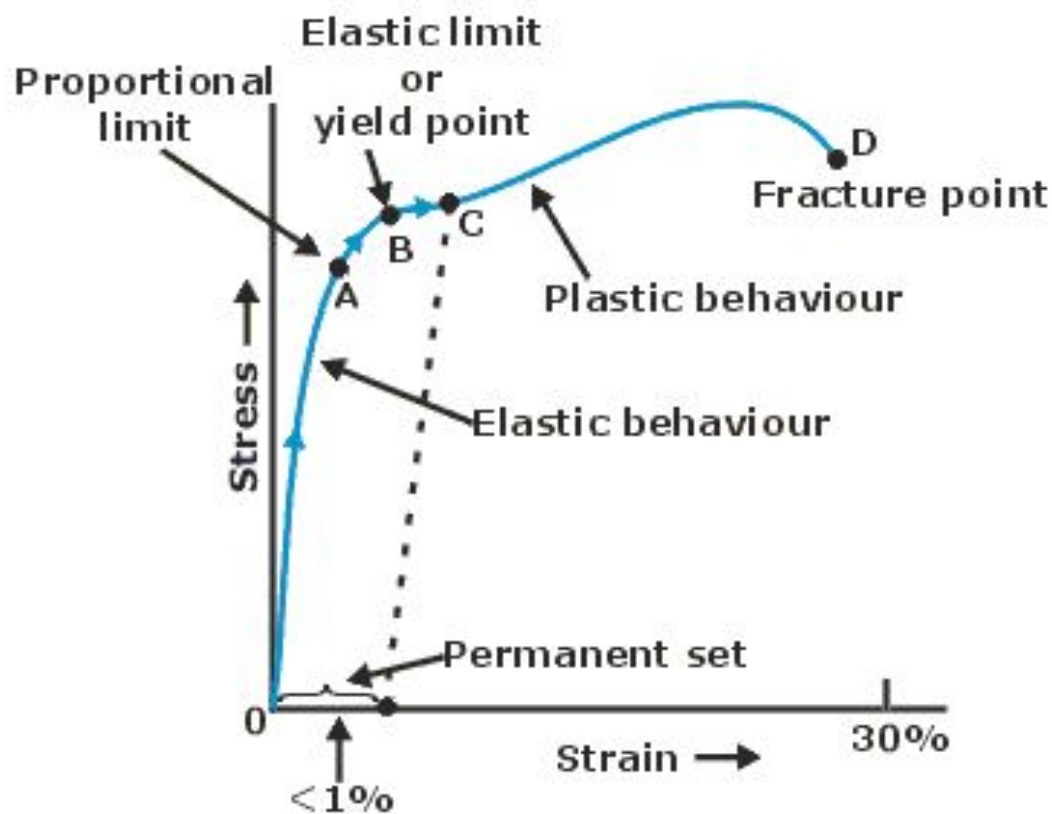
**Закон Гука (II):** Механическое напряжение, возникающее в теле, пропорционально величине его относительной деформации:

$$\sigma = E\varepsilon \quad , \quad (5.5)$$

где  $E$  - модуль Юнга – величина, характеризующая упругие свойства материала, численно равная напряжению, возникающему в теле при единичной относительной деформации ,  $[E]=\text{Па}$ .



Деформации твердых тел подчиняются закону Гука до известного предела. Связь между деформацией и напряжением представляется в виде диаграммы напряжений, качественный ход которой рассмотрен для металлического бруска.



## Деформация сдвига

**Сдвиг** - вид продольной деформации тела, возникающий в том случае, когда сила прикладывается по касательной к его поверхности (при этом нижняя часть тела закреплена неподвижно).

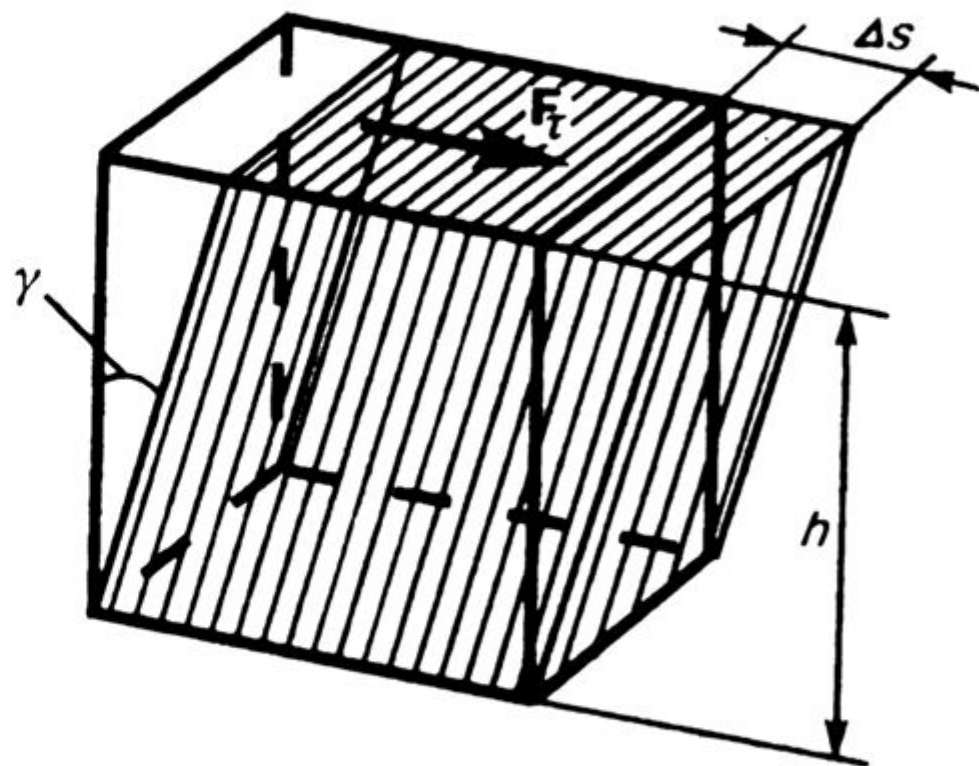
**Относительная деформация сдвига:**

$$\operatorname{tg}\gamma = \Delta s/h \quad , \quad (5.6)$$

где  $\Delta s$  - абсолютный сдвиг параллельных слоев тела относительно друг друга;  $h$  – расстояние между слоями.

При малых деформациях:

$$\operatorname{tg}\gamma = \gamma.$$



**Закон Гука для деформации сдвига:**  $\tau = G\gamma$  , (5.7)

где  $\tau = F_\tau/S$  - напряжение сдвига (тангенциальное механическое напряжение  $[\tau]=\text{Па}$ ;  $G$  – модуль сдвига,  $[G]=\text{Па}$ ).

## Энергия упругой деформации

При растяжении – сжатии энергия упругой деформации

$$\Pi = \int_0^{\Delta l} kx dx = \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 V \quad , \quad (5.8)$$

где  $V$  – объем деформируемого тела .

Объемная плотность энергии упругой деформации при растяжении – сжатии

$$w = \frac{\Pi}{V} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad . \quad (5.9)$$

Объемная плотность энергии упругой деформации при деформации сдвига

$$w = \frac{1}{2} G \gamma^2 \quad . \quad (5.10)$$



# Элементы механики жидкостей и газов (гидро- и аэромеханика)

Находясь в твердом агрегатном состоянии, тело одновременно обладает как упругостью формы, так и упругостью объема (или, что то же самое, при деформациях в твердом теле возникают как нормальные, так и тангенциальные механические напряжения).

Жидкости и газы обладают лишь упругостью объема, но не обладают упругостью формы (они принимают форму сосуда, в котором находятся). Следствием этой общей особенности жидкостей и газов является одинаковость в качественном отношении большинства механических свойств жидкостей и газов, а их отличием являются лишь количественные характеристики (например, как правило, плотность жидкости больше плотности газа). Поэтому в рамках механики сплошных сред используется единый подход к изучению жидкостей и газов.



## Исходные характеристики

**Плотность вещества** - скалярная физическая величина, характеризующая распределение массы по объему вещества и определяемая отношением массы вещества, заключённой в некотором объёме, к величине этого объёма  $[\rho]=\text{м/кг}^3$ .

В случае однородной среды плотность вещества рассчитывается по формуле

$$\rho = m/V \quad . \quad (5.11)$$

В общем случае неоднородной среды масса и плотность вещества связаны соотношением

$$m = \int_0^V \rho dV \quad . \quad (5.12)$$

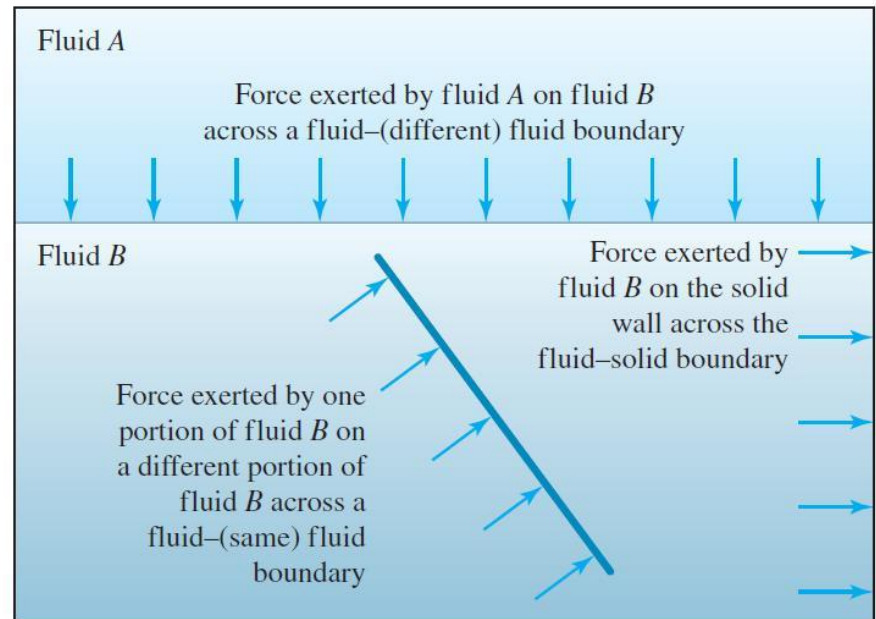
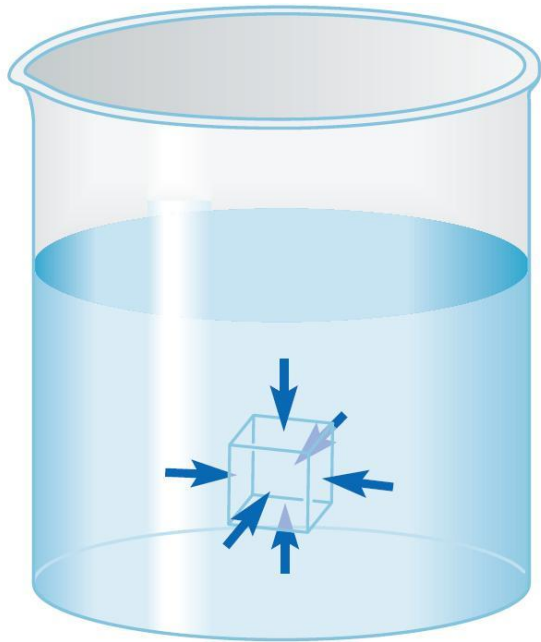
**Давление** – скалярная величина, характеризующая состояние жидкости или газа и равная силе, которая действует на единичную поверхность в направлении нормали к ней  $[p]=\text{Па}$  :

$$p = F_n/S \quad . \quad (5.13)$$

# Элементы гидростатики

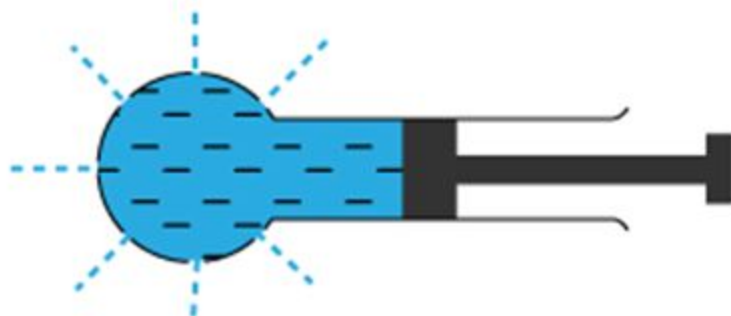
## Особенности сил, действующих внутри покоящейся жидкости (газа)

- 1) Если внутри покоящейся жидкости выделить небольшой объем, то жидкость на этот объем оказывает одинаковое давление во всех направлениях.
- 2) Покоящаяся жидкость действует на соприкасающуюся с ней поверхность твердого тела с силой, направленной по нормали к этой поверхности.



## Основные законы гидростатики

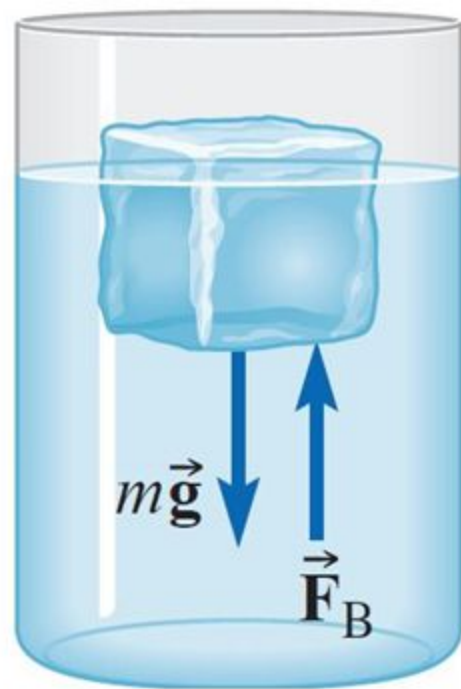
**Закон Паскаля** (Блез Паскаль, 1663 г.): давление на поверхность жидкости, произведенное внешними силами, передается жидкостью одинаково во всех направлениях.



**Выталкивающей** называется сила, действующая на тело, погруженное в жидкость или газ, и направленная по вертикали вверх.

**Закон Архимеда** (3 в. до н. э.): на тело, погруженное в жидкость, действует со стороны этой жидкости выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости, направленная по вертикали вверх и приложенная к центру тяжести вытесненного объема:

$$F_B = \rho_f g V_f . \quad (5.14)$$





## Элементы гидродинамики

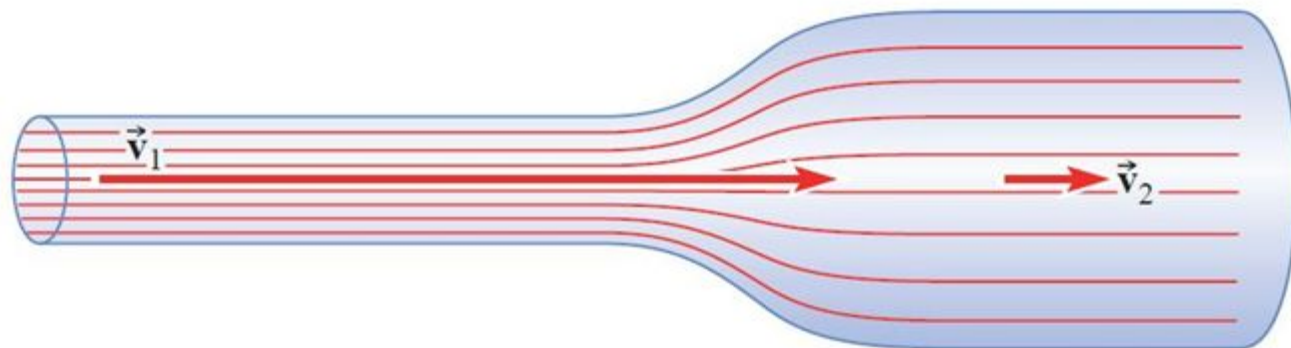
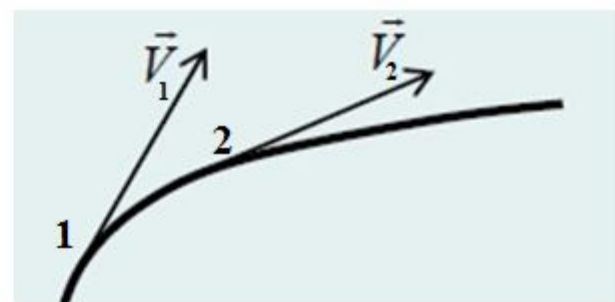
**Поток** - совокупность частиц движущейся жидкости.

**Линии тока** – воображаемые линии, характеризующие распределение скоростей в потоке движущейся жидкости.

Линии тока проводят в соответствии с двумя правилами:

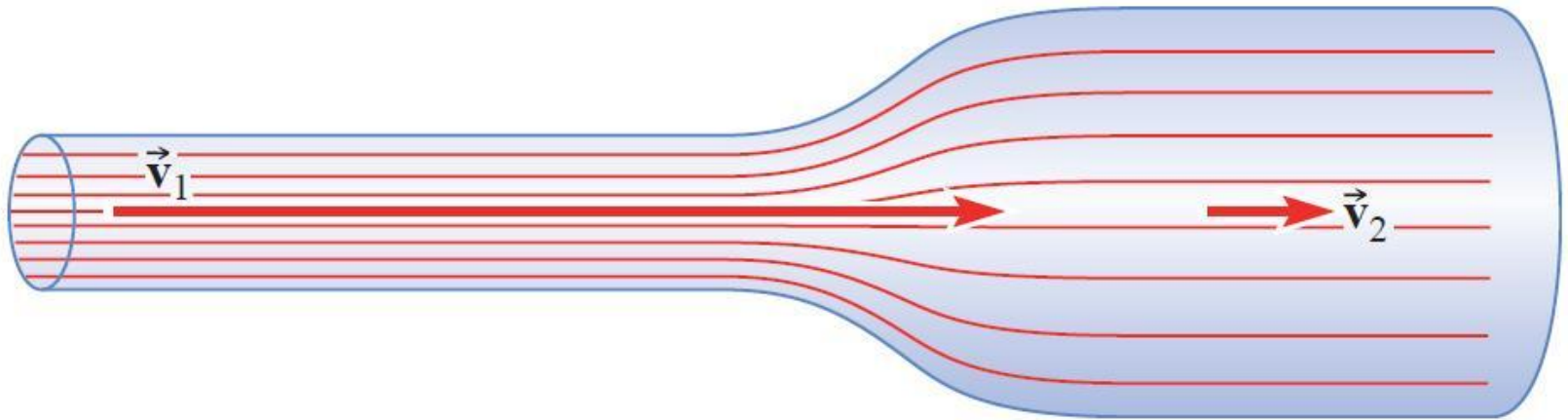
1) касательные к линиям тока совпадают по направлению с вектором скорости частицы движущейся жидкости в данной точке пространства;

2) густота линий определяет величину скорости жидкости в потоке: там, где линии расположены гуще, скорость жидкости больше, и, наоборот, там, где линии расположены реже, скорость жидкости меньше.



# Уравнение неразрывности

Трубка тока - часть жидкости, ограниченная линиями тока.



**Стационарным** (или установившимся) называется такое течение жидкости, при котором форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой точке движущейся жидкости со временем не изменяются.

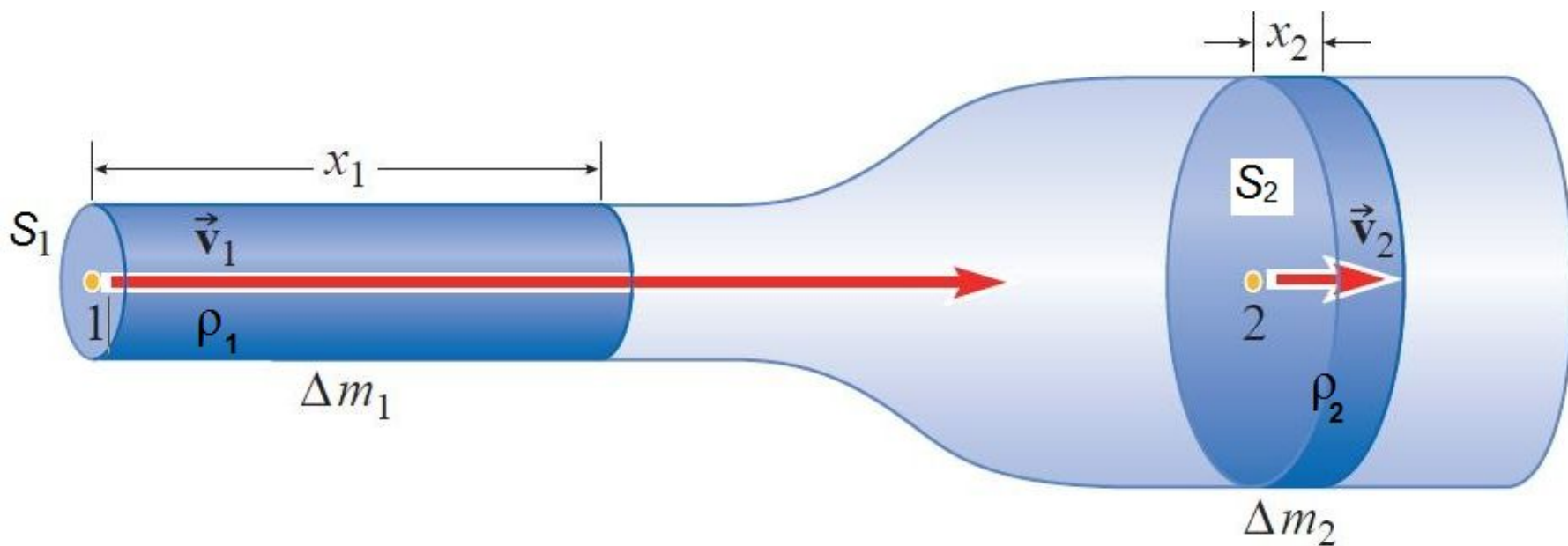
**Массовый расход жидкости** – масса жидкости, проходящая через поперечное сечение трубки тока в единицу времени  $[Q_m] = \text{кг/с}$ :

$$Q_m = m/t = \rho S v \quad , \quad (5.15)$$

где  $\rho$  и  $v$  – плотность и скорость течения жидкости в сечении  $S$ .

**Уравнение неразрывности** – математическое соотношение, в соответствии с которым при стационарном течении жидкости ее массовый расход в каждом сечении трубки тока один и тот же:

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 \quad \text{или} \quad \rho S v = \text{const} \quad , \quad (5.16)$$



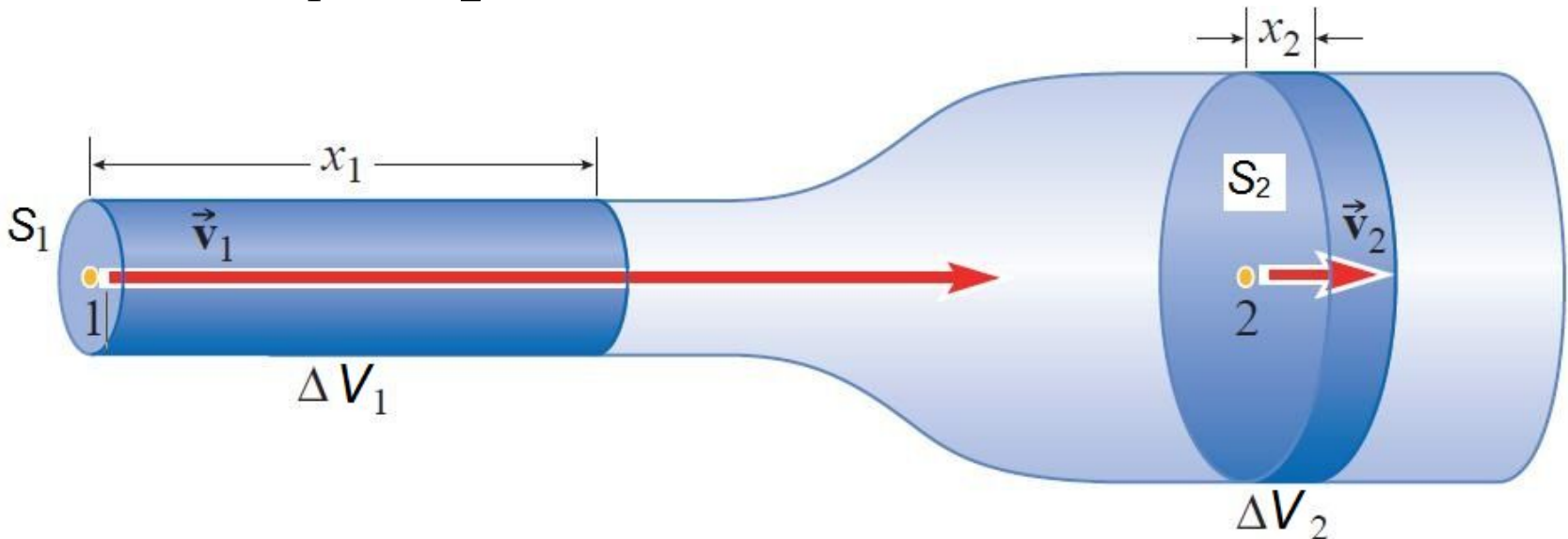
**Несжимаемой** называется жидкость, плотность которой не зависит от температуры и давления.

**Объемный расход жидкости** – объем жидкости, проходящий через поперечное сечение трубки тока в единицу времени  $[Q_V]=\text{м}^3/\text{с}$ :

$$Q_V = V/t = Sv \quad , \quad (5.17)$$

**Уравнение неразрывности несжимаемой однородной жидкости** – математическое соотношение, в соответствии с которым при стационарном течении несжимаемой однородной жидкости ее объемный расход в каждом сечении трубки тока один и тот же:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \text{или} \quad Sv = \text{const} \quad , \quad (5.18)$$



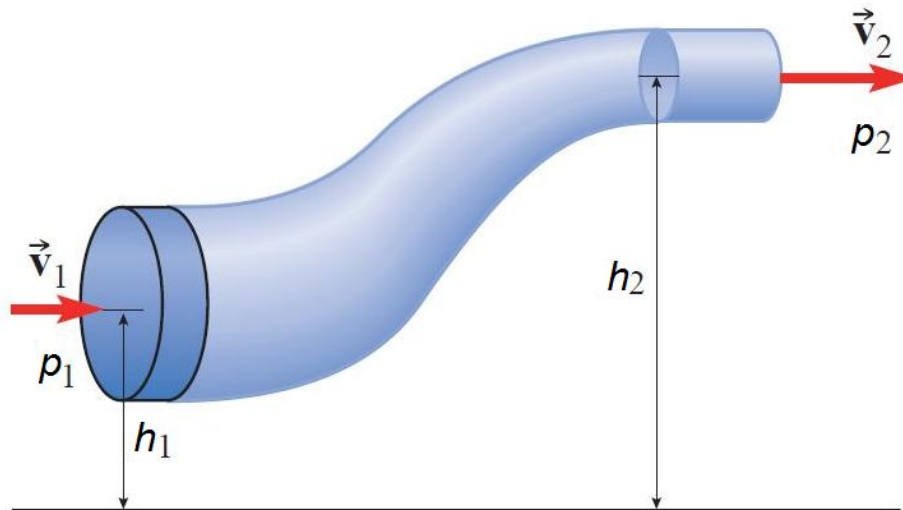


**Вязкость** – свойство газов и жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой.

Физическая модель: **идеальная жидкость** – воображаемая несжимаемая жидкость, в которой отсутствуют вязкость и теплопроводность.

**Уравнение Бернулли** (Даниил Бернулли 1738 г.) - уравнение, являющееся следствием закона сохранения механической энергии для стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости и записанное для произвольного сечения трубки тока, находящейся в поле сил тяжести:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \quad \text{или} \quad \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const} \quad . (5.19)$$

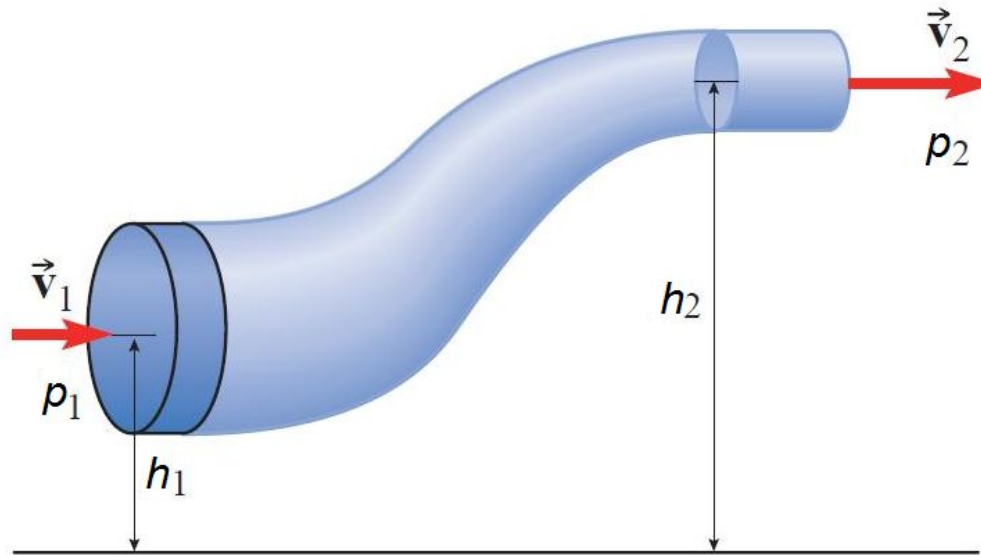


В уравнении Бернулли (5.19):

$p$  - статическое давление (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела;

$\frac{\rho v^2}{2}$  - динамическое давление;

$\rho gh$  - гидростатическое давление.

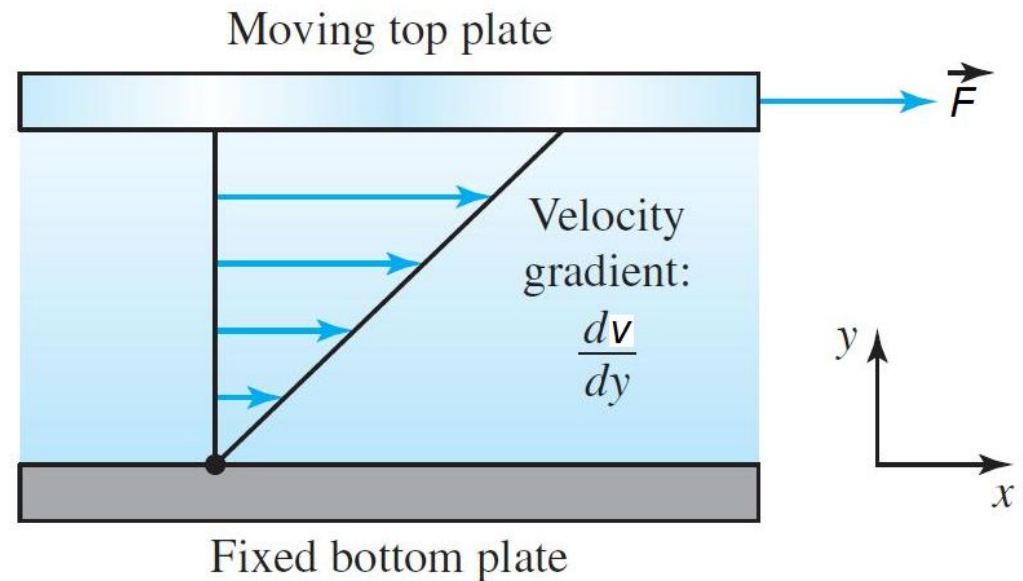
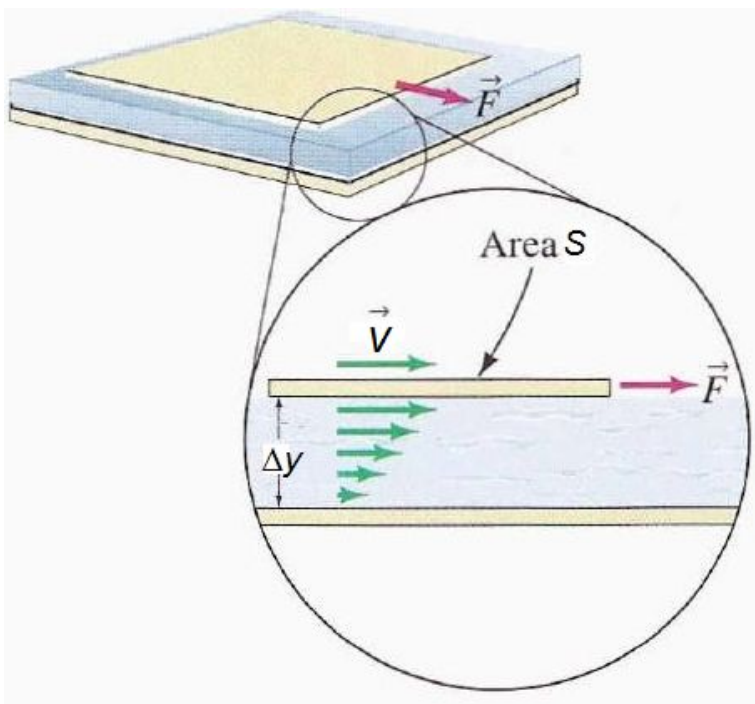


## Внутреннее трение (вязкость). Закон Ньютона

**Закон Ньютона** (Исаак Ньютон, 1686 г.): сила внутреннего трения, приходящаяся на единицу площади движущихся слоев жидкости или газа, прямо пропорциональна градиенту скорости движения слоев:

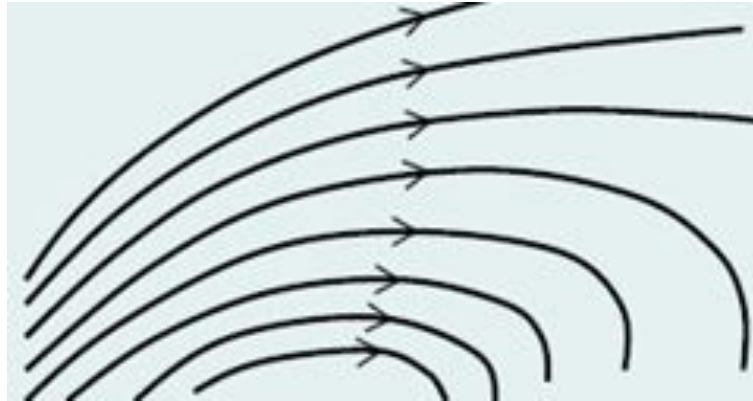
$$\frac{|\vec{F}|}{S} = \eta \frac{dv}{dy}, \quad (5.20)$$

где  $\eta$  - коэффициент внутреннего трения (динамическая вязкость),  $[\eta] = \text{м}^2/\text{с}$ .

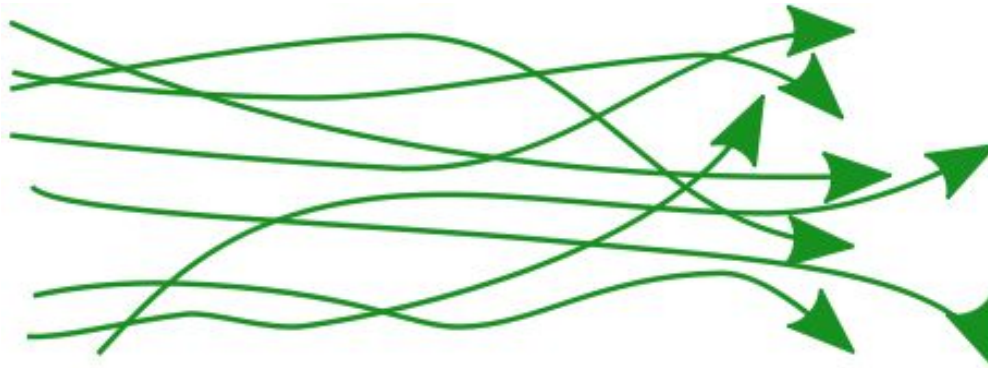


## Виды течения вязкой жидкости

**Ламинарное течение** - форма течения, при которой жидкость или газ перемещается слоями без перемешивания и пульсаций (то есть беспорядочных быстрых изменений скорости и давления).



**Турбулентное течение** - форма течения жидкости или газа, при которой их элементы совершают неупорядоченные, неустановившиеся движения по сложным траекториям, что приводит к интенсивному перемешиванию между слоями движущихся жидкости или газа.



## Число Рейнольдса

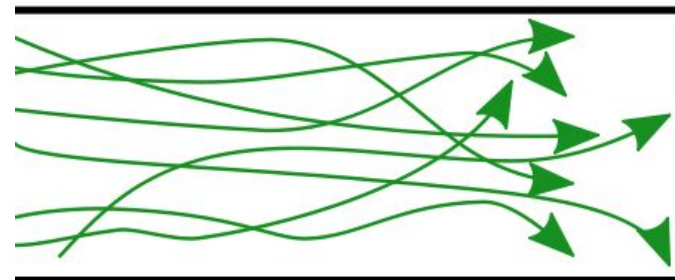
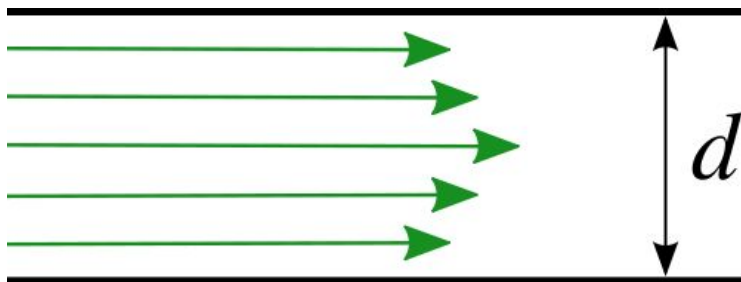
Критерий перехода ламинарного режима течения жидкости в турбулентный режим основан на использовании числа Рейнольдса (Осборн Рейнольдс, 1876-1883 гг.).

В случае движения жидкости по трубе число Рейнольдса определяется как

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}, \quad (5.21)$$

где  $v$  – средняя по сечению трубы скорость жидкости;  $d$  – диаметр трубы;  $\rho$  и  $\eta$  - плотность и коэффициент внутреннего трения жидкости.

При значениях  $Re < 2000$  реализуется ламинарный режим течения жидкости по трубе, а при  $Re > 4000$  – турбулентный режим. При значениях  $2000 < Re < 4000$  реализуется промежуточный режим (т.е. наблюдается смесь ламинарного и турбулентного потоков).



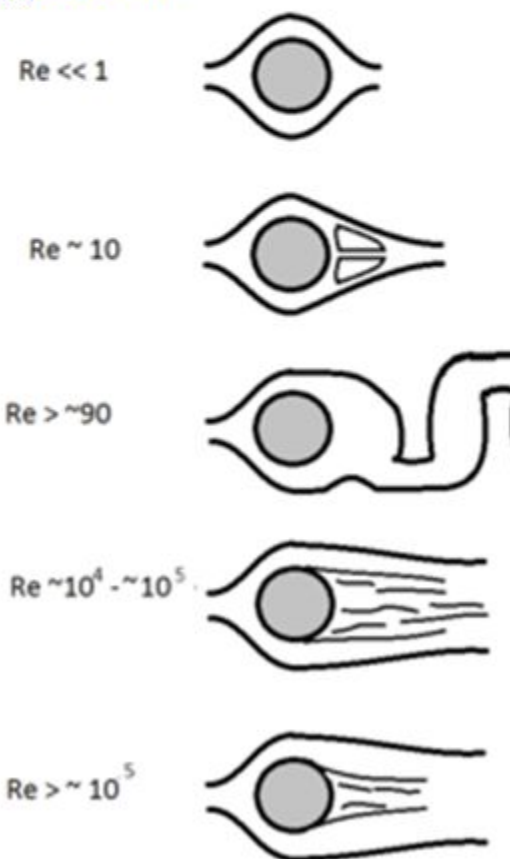
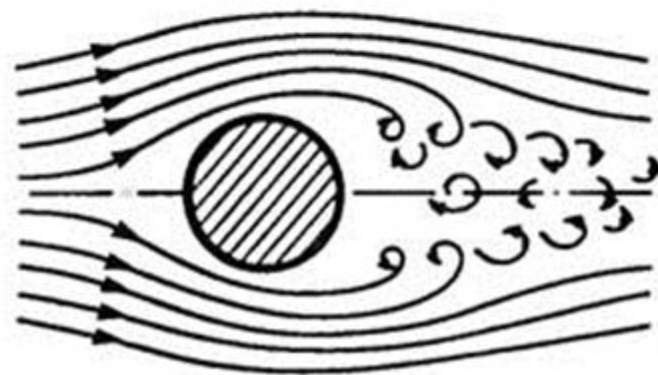
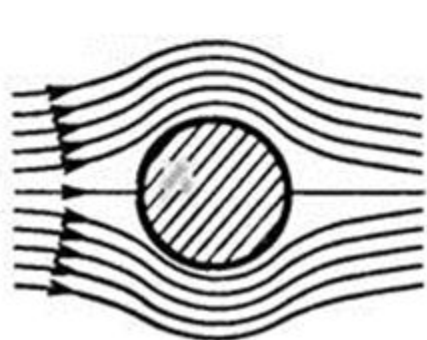


При движении тел в вязкой среде число Рейнольдса определяется аналогично

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} \quad , \quad (5.22)$$

где  $v$  и  $d$  – соответственно, скорость движения тела и его характерный размер (например, диаметр в случае движущегося шара);  $\rho$  и  $\eta$  – плотность и коэффициент внутреннего трения жидкости.

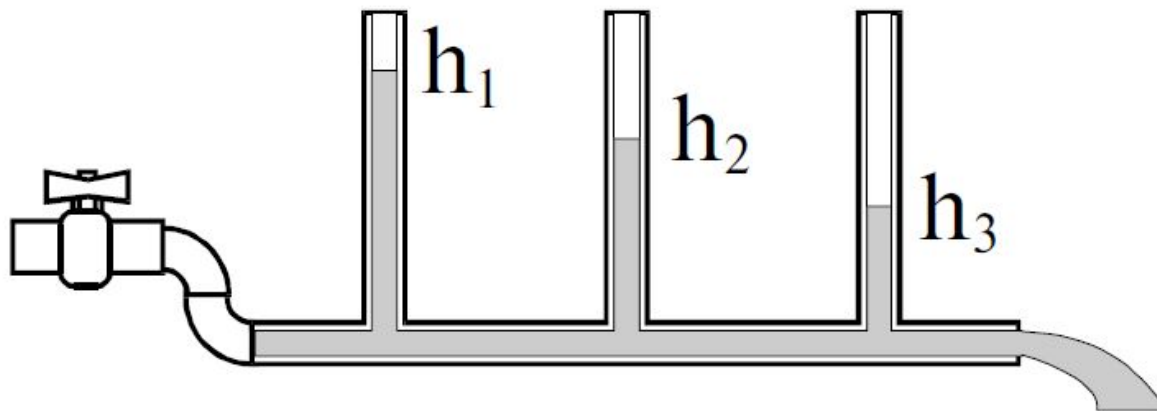
При значениях  $Re < 1$  реализуется **ламинарное обтекание жидкости**, при значениях  $1 < Re < 10$  реализуется **промежуточный режим обтекания**, а при  $Re > 10$  возникают различные **формы турбулентного обтекания**.



## Ламинарное течение вязкой жидкости в горизонтальной трубе

Рассмотрим течение вязкой жидкости, обратившись непосредственно к опыту. При помощи резинового шланга подсоединим к водопроводному крану тонкую горизонтальную стеклянную трубку с впаянными в нее вертикальными манометрическими трубками (см. рисунок).

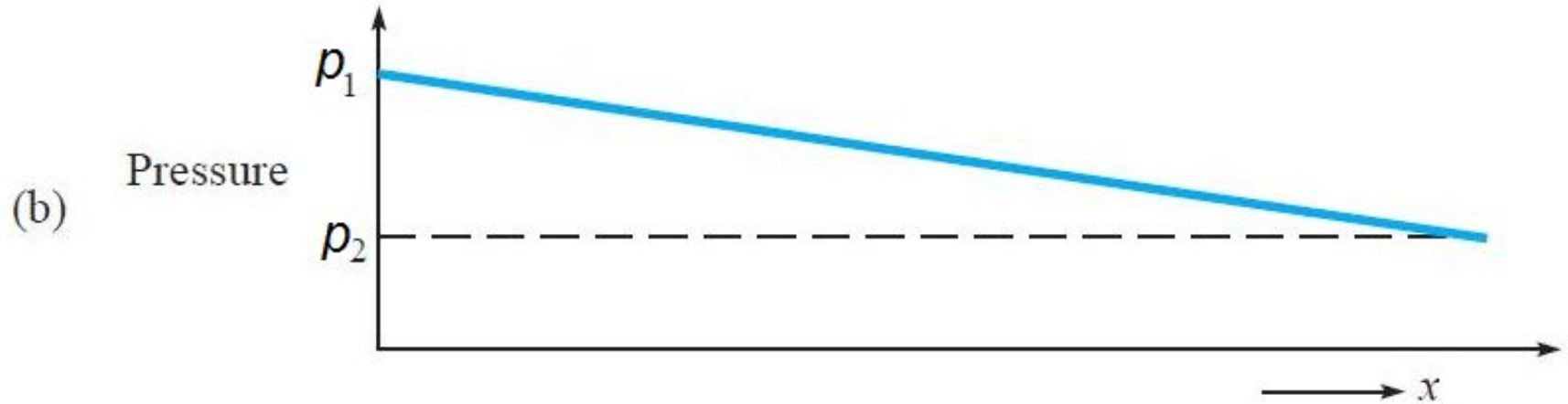
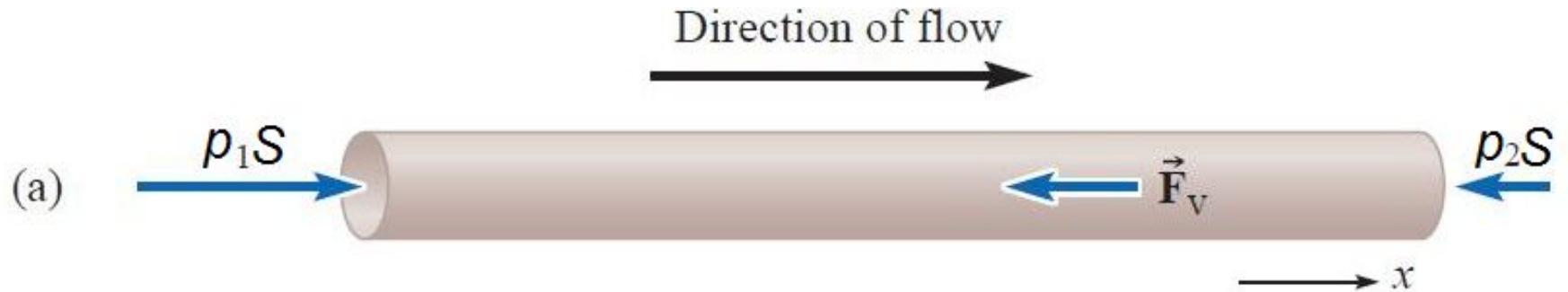
При небольшой скорости течения хорошо видно понижение уровня воды в манометрических трубках в направлении течения ( $h_1 > h_2 > h_3$ ). Это указывает на наличие градиента давления вдоль оси трубки – статическое давление в жидкости уменьшается по потоку.





# Ламинарное течение вязкой жидкости в горизонтальной трубе

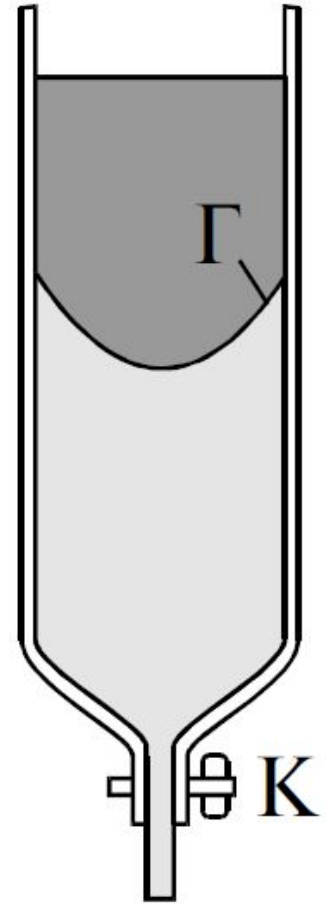
При равномерном прямолинейном течении жидкости силы давления уравниваются силами вязкости.



Распределение скоростей в поперечном сечении потока вязкой жидкости можно наблюдать при ее вытекании из вертикальной трубки через узкое отверстие (см. рисунок).

Если, например, при закрытом кране  $K$  налить вначале неподкрашенный глицерин, а затем сверху осторожно добавить подкрашенный, то в состоянии равновесия граница раздела  $\Gamma$  будет горизонтальной.

Если кран  $K$  открыть, то граница примет форму, похожую на параболоид вращения. Это указывает на существование распределения скоростей в сечении трубки при вязком течении глицерина.



## Формула Пуазейля

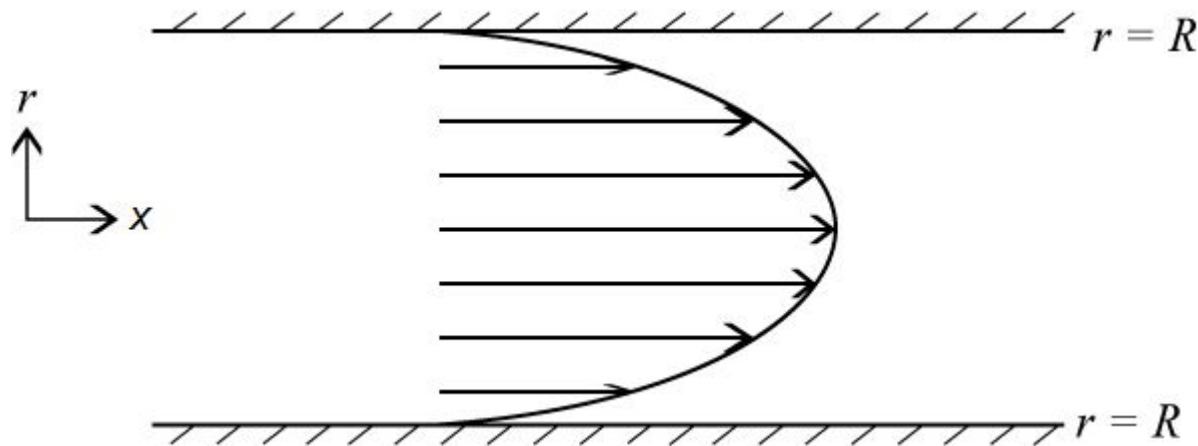
Распределение скоростей в сечении горизонтальной трубы при ламинарном течении вязкой жидкости определяется формулой

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad , \quad (5.23)$$

где  $R$  и  $l$  радиус и длина трубы, соответственно,  $\Delta p$  – разность давлений на концах трубы,  $r$  – расстояние от оси трубы.

Объемный расход жидкости определяется формулой Пуазейля (Жан Пуазейль, 1840 г.):

$$Q_v = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l} \quad . \quad (5.24)$$



## Движение тел в вязкой среде

При движении тел в жидкости или газе на тело действует сила внутреннего трения, зависящая от скорости движения тела. При малых скоростях наблюдается ламинарное обтекание тела жидкостью или газом и сила внутреннего трения оказывается пропорциональной скорости движения тела и определяется **формулой Стокса** (Джордж Стокс, 1851 г.):

$$F = b\eta lv \quad , \quad (5.25)$$

где  $b$  – постоянная, зависящая от формы тела и его ориентации относительно потока,  $l$  – характерный размер тела.

Для шара ( $b=6\pi$ ,  $l=R$ ) сила внутреннего трения:

$$F = 6\pi\eta Rv \quad , \quad (5.26)$$

где  $R$  – радиус шара.

