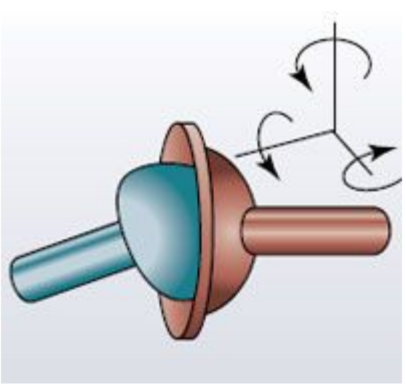
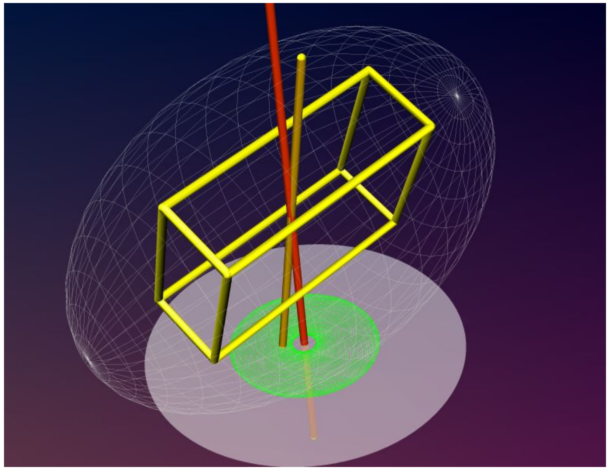
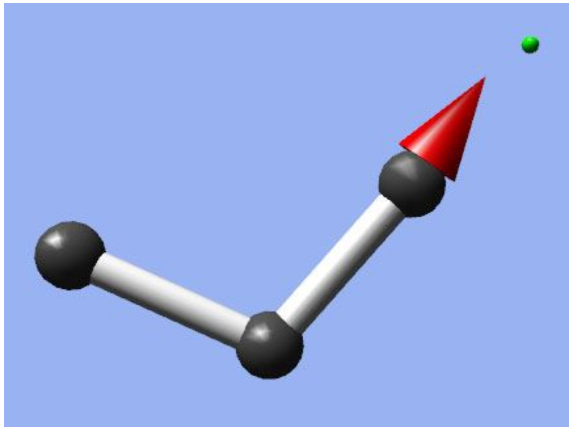
ЛЕКЦИЯ № 4 Твердое тело в механике

Элементы содержания: Абсолютно твердое тело. Число степеней свободы. Виды движения твердого тела. Поступательное и вращательное движения. Угловые динамические характеристики: момент силы, момент инерции, момент импульса. Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Закон сохранения момента импульса. Энергетические соотношения при вращательном движении.

Литература: Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2000. **С. 3-18; 31-34**.





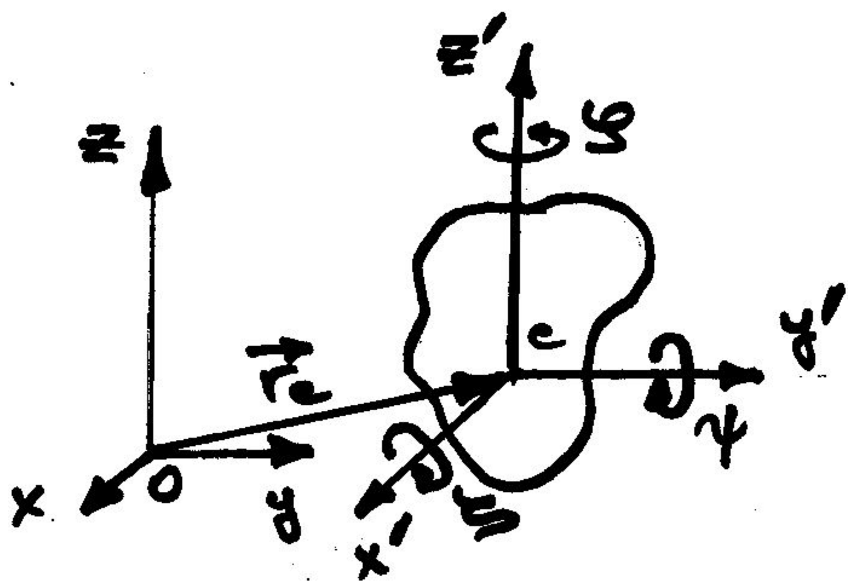


Физическая модель №2: абсолютно твердое тело – тело, которое при движении не изменяет своей формы и размеров.

Степени свободы - независимые возможные изменения состояния или положения системы, обусловленные изменениями её параметров.

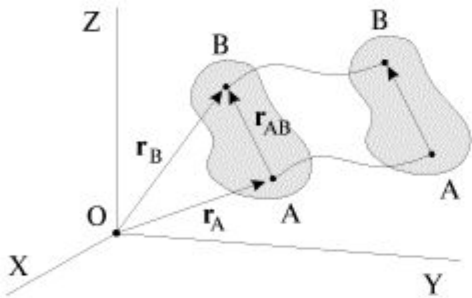
Число степеней свободы – минимальное число независимых координат, определяющих положение тела в пространстве.

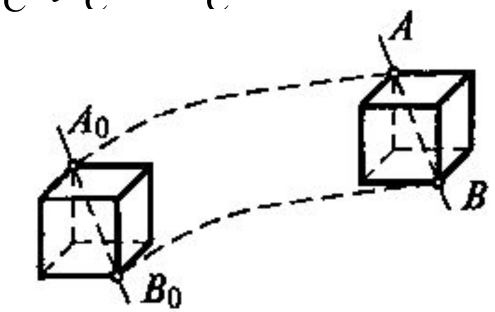
Абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы. Три линейные степени свободы (x_C, y_C, z_C) определяют положение центра инерции тела. Три угловые степени свободы (ζ, ψ, ϕ) определяют пространственную ориентацию твердого тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей.

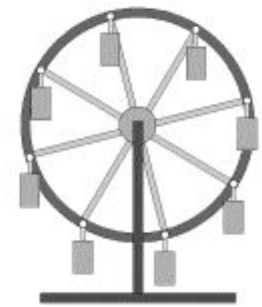


Классификация видов движения твердого тела

1. Поступательное движение – это движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, перемещается параллельно самой себе. Три степени свободы: x_C, y_C, и z_C .

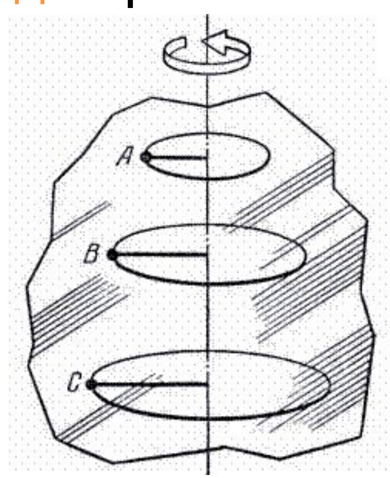


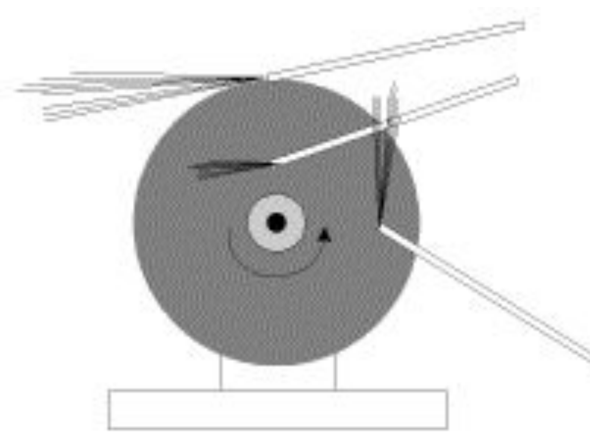




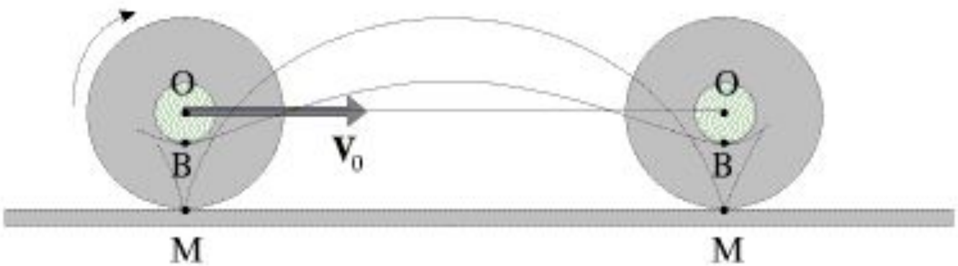
2. Вращательное движение – это движение твердого тела, при котором траектории всех точек тела являются окружностями с центрами на одной прямой и все плоскости окружностей перпендикулярны этой прямой.

Одна степень свободы: ϕ.

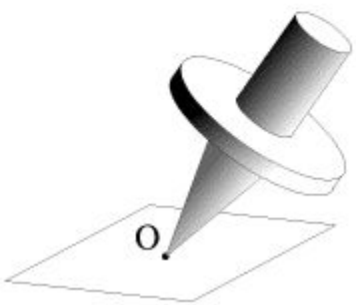




3. Плоское движение – это движение твердого тела, при котором все точки тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости. Четыре степени свободы: x_C, y_C, z_C и ϕ. Классический пример: качение цилиндра по плоскости без проскальзывания.

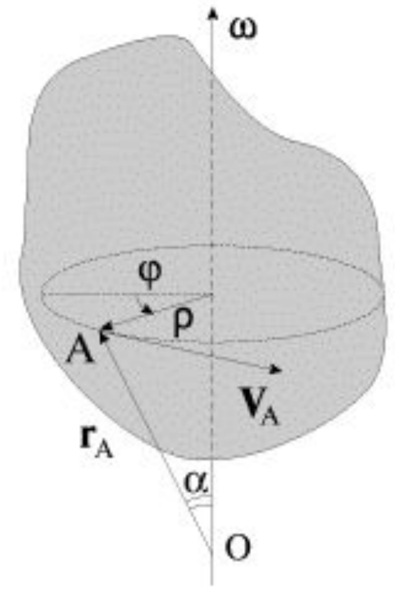


4. Вращение вокруг неподвижной точки - это движение твердого тела, при котором остается неподвижной одна точка, жестко связанная с телом Три степени свободы: ζ, ψ и ϕ .



5. Свободное движение – наиболее общий вид движения твердого тела с шестью степенями свободы: x_C, y_C, z_C и ζ, ψ, ϕ.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

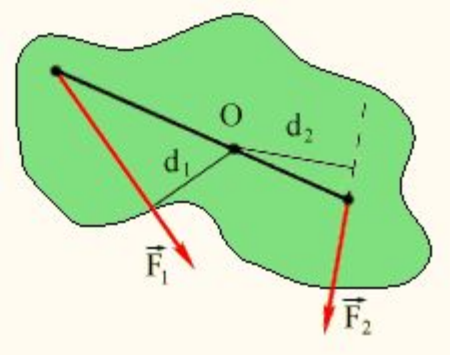


Угловая координата ϕ – угол поворота тела из некоторого определенного (начального) положения.
Угловая скорость - быстрота вращения тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad . \qquad (4.1)$$

Для того, чтобы изменить угловую скорость тела к нему необходимо приложить вращающий момент.

Вращающий момент (или момент силы относительно оси) – величина, характеризующая вращательный эффект силы при ее действии на твердое тело: $M = Fd$, (4.2)



где d – плечо силы – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы.

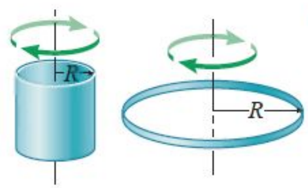
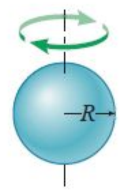
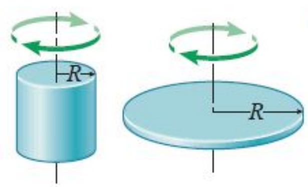
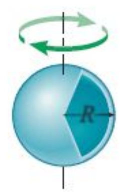
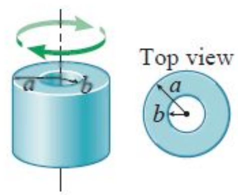
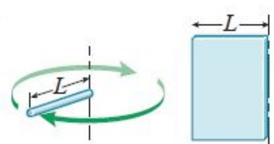
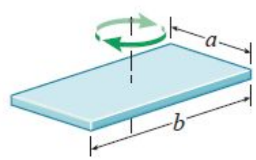
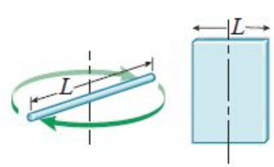
Вращающий момент – скалярная алгебраическая величина; она положительна, если под действием момента тело вращается против часовой стрелки, и отрицательна, если под действием момента тело вращается по часовой стрелке. На рисунке момент силы $\vec{F}_1$ положителен ($M_1 > 0$); момент силы $\vec{F}_2$ отрицателен ($M_2 < 0$).

Момент инерции

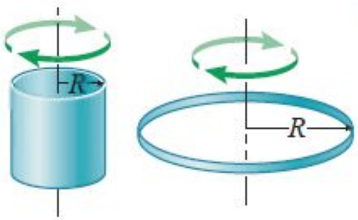
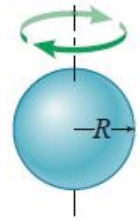
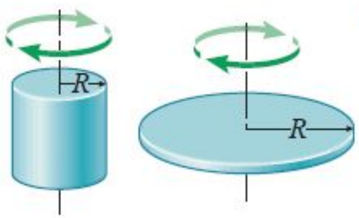
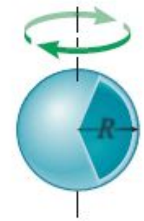
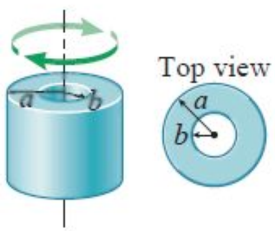
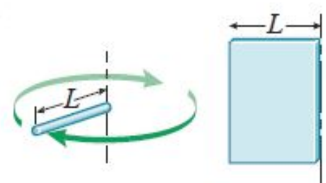
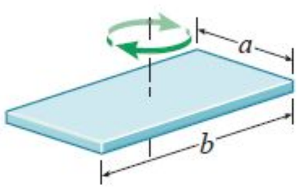
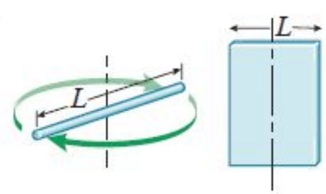
Момент инерции – величина характеризующая инертность тела при его вращательном движении и зависящая от массы, формы и размеров тела, а также от положения оси вращения; $[\,I\,] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Собственный момент инерции, I_C - момент инерции, относительно оси, проходящей через его центр инерции.

Примеры собственных моментов инерции тел различной формы

Shape		Axis of Rotation	Rotational Inertia	Shape		Axis of Rotation	Rotational Inertia
Thin hollow cylindrical shell (or hoop)		Central axis of cylinder	mR^2	Solid sphere		Through center	$\frac{2}{5}mR^2$
Solid cylinder (or disk)		Central axis of cylinder	$\frac{1}{2}mR^2$	Thin hollow spherical shell		Through center	$\frac{2}{3}mR^2$
Hollow cylindrical shell or disk		Central axis of cylinder	$\frac{1}{2}m(a^2 + b^2)$	Thin rod (or rectangular plate)		Perpendicular to rod through end (or along edge of plate)	$\frac{1}{3}mL^2$
Rectangular plate		Perpendicular to plate through center	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	Thin rod (or rectangular plate)		Perpendicular to rod through center (or parallel to edge of plate through center)	$\frac{1}{12}mL^2$

Примеры собственных моментов инерции тел различной формы

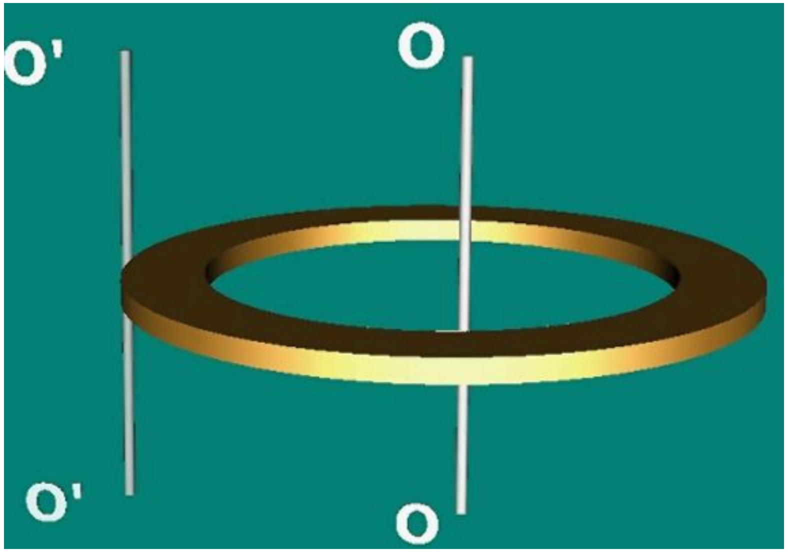
Shape	Axis of Rotation	Rotational Inertia	Shape	Axis of Rotation	Rotational Inertia
Thin hollow cylindrical shell (or hoop) 	Central axis of cylinder	mR^2	Solid sphere 	Through center	$\frac{2}{5}mR^2$
Solid cylinder (or disk) 	Central axis of cylinder	$\frac{1}{2}mR^2$	Thin hollow spherical shell 	Through center	$\frac{2}{3}mR^2$
Hollow cylindrical shell or disk 	Central axis of cylinder	$\frac{1}{2}m(a^2 + b^2)$	Thin rod (or rectangular plate) 	Perpendicular to rod through end (or along edge of plate)	$\frac{1}{3}mL^2$
Rectangular plate 	Perpendicular to plate through center	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	Thin rod (or rectangular plate) 	Perpendicular to rod through center (or parallel to edge of plate through center)	$\frac{1}{12}mL^2$

Теорема Штейнера

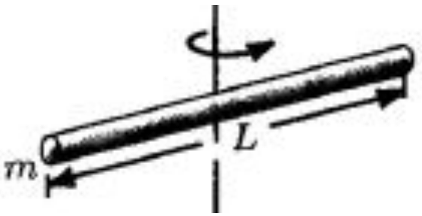
Теорема Штейнера: моменты инерции тела относительно параллельных осей связаны соотношением:

$$I = I_C + mx^2, \qquad (4.3)$$

где m и I_C – масса и собственный момент инерции тела, x - расстояние между осями.



Пример использования теоремы Штейнера

Стержень относительно оси проходящей через его центр инерции перпендикулярно оси стержня		$I_C = \frac{1}{12} mL^2$
Стержень относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно оси стержня		$I = \frac{1}{3} mL^2$

Динамика твердого тела

Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси:

$$L = I\omega \quad , \qquad (4.4)$$

где I и ω – момент инерции и угловая скорость тела.

Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Общая формулировка: Скорость изменения момента импульса твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси равна результирующему вращающему моменту внешних сил, приложенных к телу:

$$dL/dt = M_{\Sigma} \quad . \qquad (4.5)$$

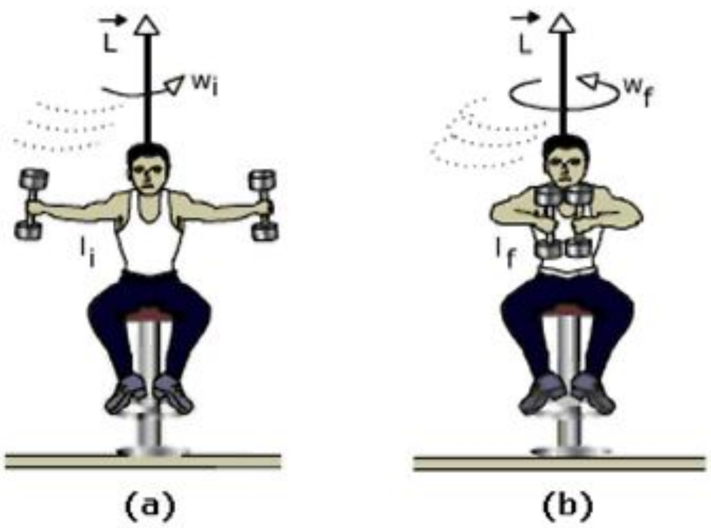
Частная формулировка: Если при вращении тела вокруг неподвижной оси его момент инерции не изменяется, то угловое ускорение тела прямо пропорционально результирующему вращающему моменту внешних сил, приложенных к телу, и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно этой же оси:

$$\alpha = M_{\Sigma}/I \quad . \qquad (4.6)$$

Следствие из уравнения (4.5):

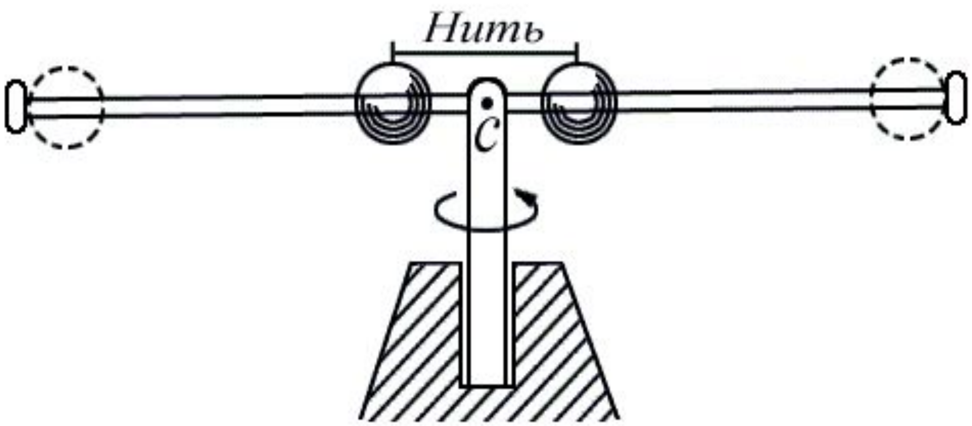
если $$M_\Sigma = 0 \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = 0 \Rightarrow L = I\omega = \text{const} \quad , \qquad (4.7)$$

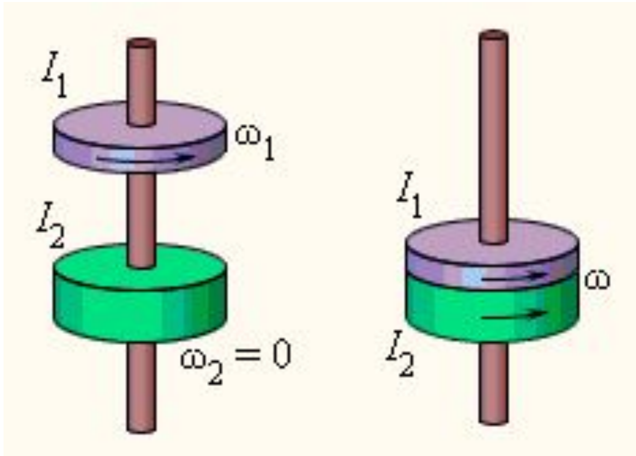
т. е. если на тело не действуют внешние силы, то произведение момента инерции тела на его угловую скорость не изменяется с течением времени.

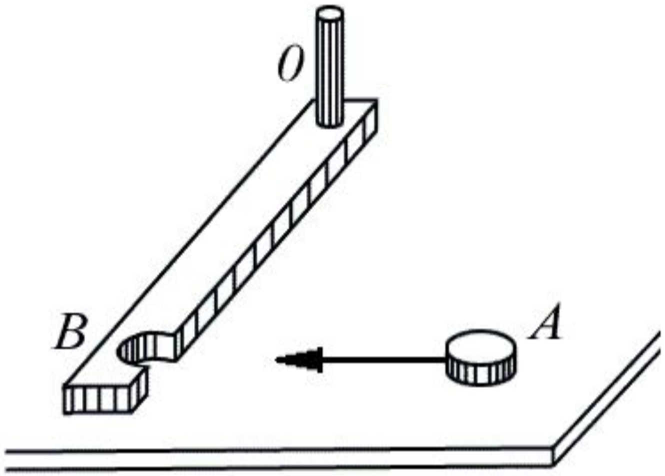


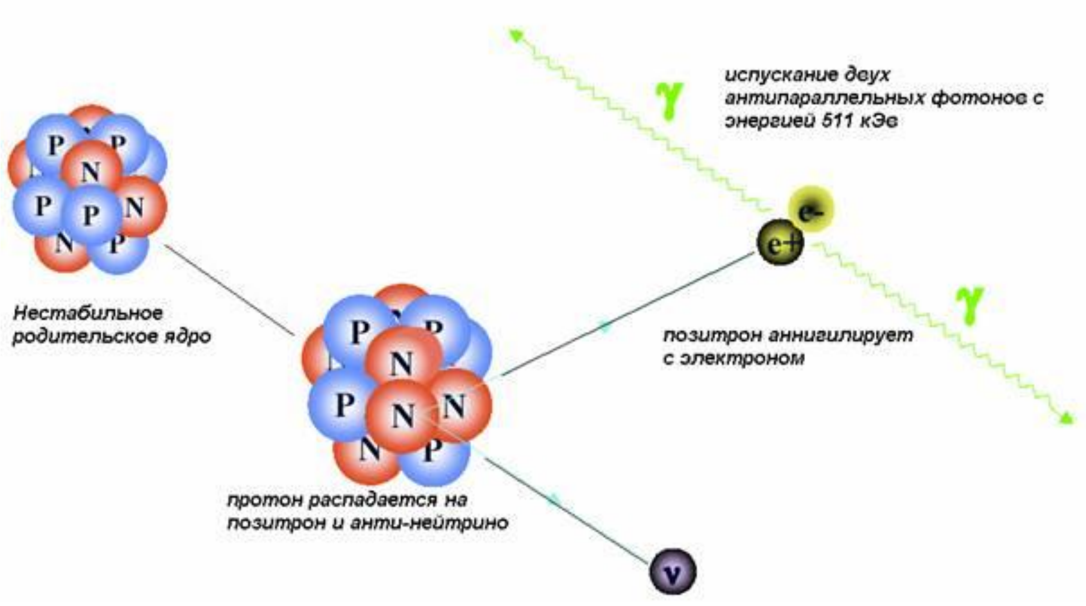
Уравнение (4.7) - частный случай закона сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой (изолированной) системы не изменяется при любых процессах происходящих внутри этой системы.

Сохранение момента импульса









Энергетические соотношения

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$K_{rot} = \frac{I\omega^2}{2} \quad . \qquad (4.8)$$

Кинетическая энергия катящегося тела

$$K_{roll} = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2} \quad . \qquad (4.9)$$

Работа внешней силы при повороте тела

$$A_{rot} = M\Delta\varphi \quad . \qquad (4.10)$$

Мощность внешней силы при повороте тела

$$P_{rot} = M\omega \qquad (4.11)$$

Общее правило: Формулы для поступательного движения переходят в соответствующие формулы для вращательного движения при замене линейных величин их угловыми аналогами.