Лекция 8б

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Квантовая статистика Ферми – Дирака.
2. Квантовая статистика Бозе – Эйнштейна.

ПРИНЦИП ПАУЛИ (повтор).

В определенном квантовом состоянии может находиться не более одного электрона.

Квантовое состояние частицы определяется четырьмя квантовыми числами: ***n*** (главное квантовое число), ***l*** (орбитальное квантовое число), ***m*** (магнитное квантовое число)**,** $\boldsymbol{m_s}$ (спиновое квантовое число). Следовательно,

В атоме не может быть больше одного электрона с одинаковыми четырьмя квантовыми числами.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА ФЕРМИОНОВ *(квантовая статистика Ферми – Дирака).*

Особенность фермионов: они подчиняются принципу Паули, следовательно, могут находиться в различных состояниях (ячейках фазового пространства) только поодиночке.

Вид функции (без вывода):

$$f_{\Phi}(E)=\left(e^{\frac{E-\mu}{kT}}+1\right)^{-1}$$

μ - химический потенциал вырожденного газа фермионов (*уровень Ферми*).

Химический потенциал выражает изменение энергии изолированной системы постоянного объема, вызванное изменением в ней числа частиц на единицу.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА ФЕРМИОНОВ *(квантовая статистика Ферми – Дирака)*.

$$\boxed{f_{\Phi}(E)=\left(e^{\frac{E-\mu}{kT}}+1\right)^{-1}}$$

Из формулы видно, что если $E=\mu$ функция распределения $f_{\Phi}(E)=1/2$ при любой температуре $T\neq 0$.

Следовательно, со статистической точки зрения уровень Ферми - это энергетический уровень, вероятность заполнения которого равна *1/2*.

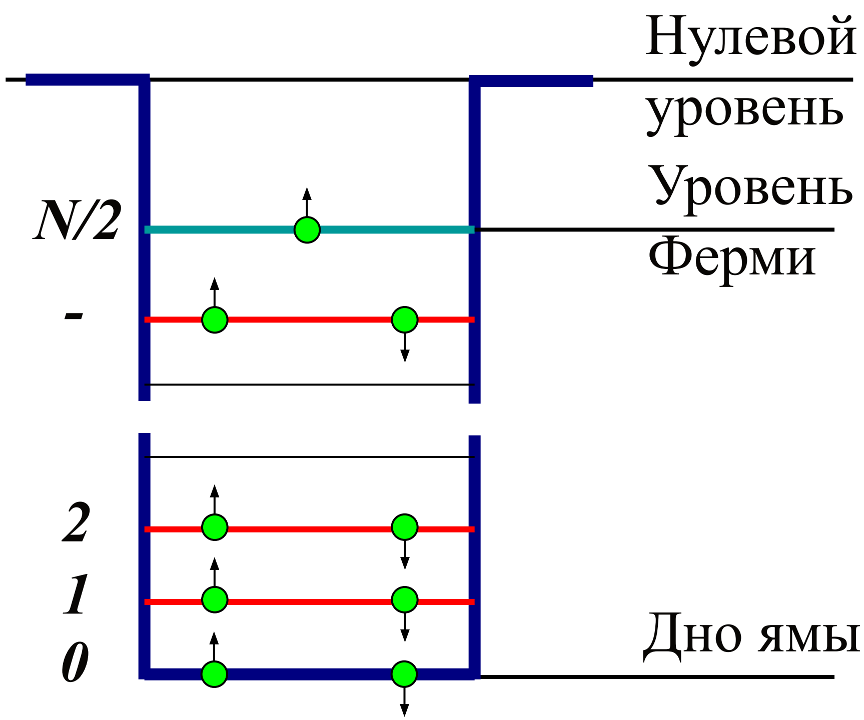
Функцию распределения называют *функцией Ферми – Дирака.*

Распределение электронов в металле при абсолютном нуле. Энергия Ферми.

Металл для свободных электронов является потенциальной ямой.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА ФЕРМИОНОВ *(квантовая статистика Ферми – Дирака).*

$$f_{\Phi}(E)=\left(e^{\frac{E-\mu}{kT}}+1\right)^{-1}$$



Горизонтальные линии - энергетические уровни, которые могут занимать электроны.

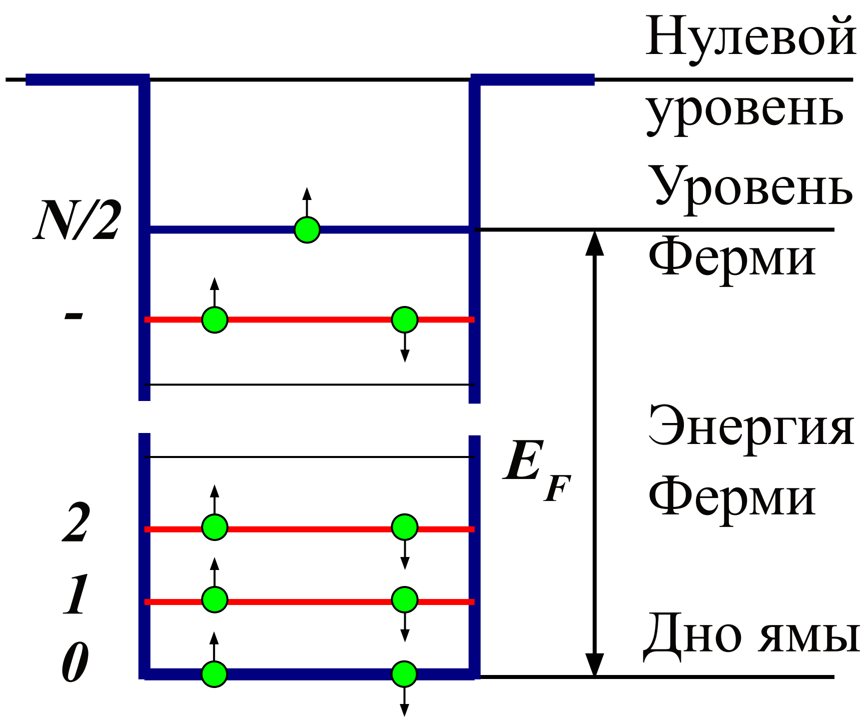
В соответствии с принципом Паули на каждом таком уровне могут разместиться по два электрона с противоположными спинами.

Если электронный газ содержит ***N*** электронов, то последним занятым окажется уровень ***N/2***.

Этот уровень Ферми для вырожденного электронного газа.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА ФЕРМИОНОВ *(квантовая статистика Ферми – Дирака).*

$$f_{\Phi}(E)=\left(e^{\frac{E-\mu}{kT}}+1\right)^{-1}$$



Он соответствует максимальной кинетической энергии E_F, которой может обладать электрон в металле при абсолютном нуле.

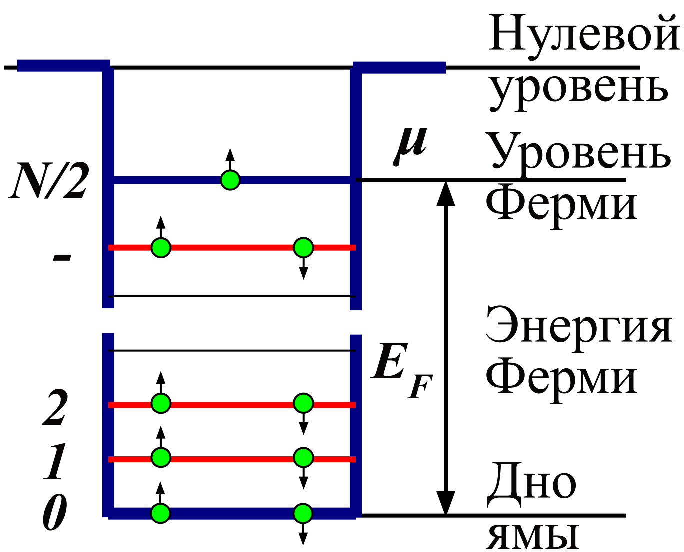
Энергию E_F называют *энергией Ферми*.

Итак, при абсолютном нуле все состояния с энергией $E < E_F$ заняты электронами, состояния с энергией $E > E_F$ свободны.

Иначе, при абсолютном нуле вероятность заполнения электронами состояний с энергией $E < E_F$ равна 1, с энергией $E > E_F$ равна нулю.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА ФЕРМИОНОВ *(квантовая статистика Ферми – Дирака).*

$$f_\Phi(E)=\left(e^{\frac{E-\mu}{kT}}+1\right)^{-1}$$



Получим этот же результат из функции распределения.

Будем считать, что при $T = 0K$ химический потенциал электронного газа, отсчитанный от дна потенциальной ямы, равен энергии Ферми E_F: $\mu = E_F$.

Тогда функция распределения будет иметь следующий вид:

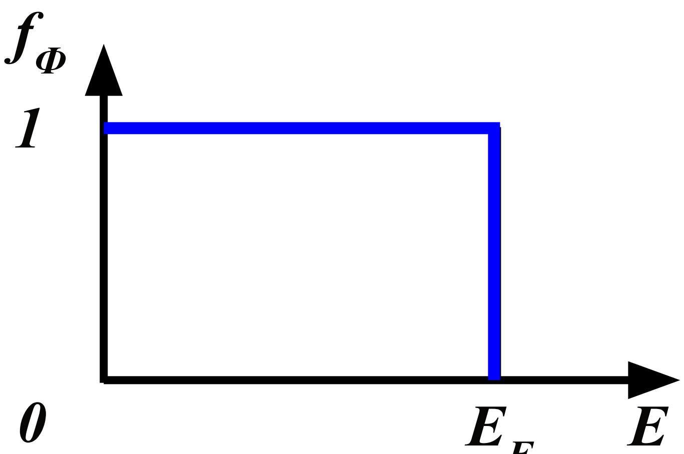
$$f_\Phi(E)=\left(e^{\frac{E-E_F}{kT}}+1\right)^{-1}$$

Если $E < E_F$, то при $T = 0К$ $\quad exp\left(\dfrac{E-E_F}{kT}\right)\rightarrow 0$ и $f_\Phi = 1.$

Если $E > E_F$, то при $T = 0К$ $\quad exp\left(\dfrac{E-E_F}{kT}\right)\rightarrow \infty$ и $f_\Phi = 0.$

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА ФЕРМИОНОВ *(квантовая статистика Ферми – Дирака).*

График функции распределения Ферми – Дирака при абсолютном нуле имеет вид ступеньки, обрывающейся при $E = E_F$.



Учитывая, что в интервале от 0 до E_F функция $f_Ф = 1$, запишем *полную функцию распределения Ферми – Дирака* при абсолютном нуле:

$$N(E)dE = f(E)q(E)dE =$$

$$= \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{E}\,dE$$

Из этого выражения после интегрирования от 0 до E_F можно определить энергию Ферми E_F :

$$E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}$$

где $n = N/V$ - концентрация электронного газа в металле.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА ФЕРМИОНОВ *(квантовая статистика Ферми – Дирака).*

Влияние температуры на распределение Ферми – Дирака.

С повышением температуры электроны подвергаются тепловому возбуждению и переходят на более высокие энергетические уровни, вследствие чего меняется характер распределения их по состояниям.

Однако в интервале температур, в котором энергия kT теплового движения остается значительно ниже энергии Ферми $E = E_F$, тепловому возбуждению могут подвергаться электроны лишь узкой полосы kT, непосредственно расположенной у уровня Ферми.

Электроны более глубоких уровней остаются практически не тронутыми, так как энергия kT теплового движения недостаточна для их возбуждения (для перевода за уровень Ферми).

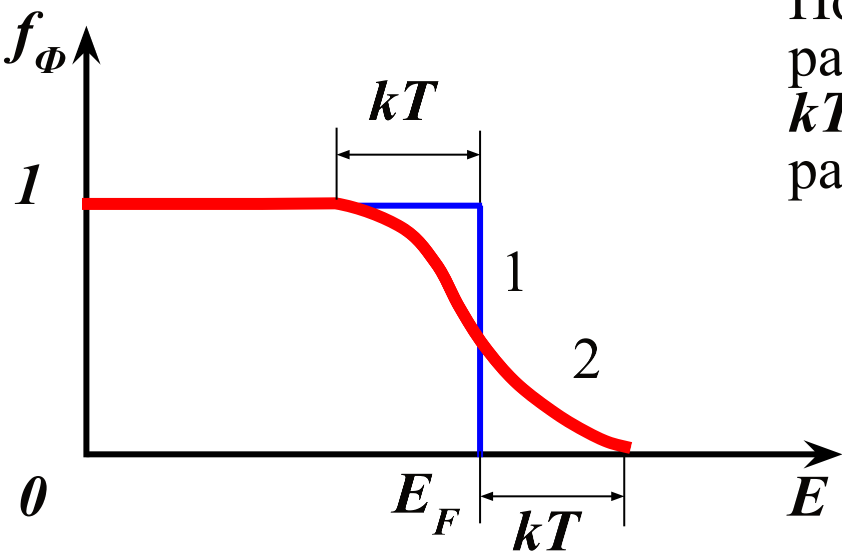
В результате теплового возбуждения часть электронов, имевших энергию, меньшую E_F, переходит на уровни с энергией, большей E_F и устанавливается новое их состояние

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА ФЕРМИОНОВ *(квантовая статистика Ферми – Дирака)*.

Влияние температуры на распределение Ферми – Дирака.

Кривая **1** - распределение электронов по состояниям при $T=0$.

Кривая **2** - распределение электронов по состояниям при $T>0$.



Повышение температуры приводит к размытию распределения на глубину kT. Правее E_F появляется «хвост» распределения.

«Хвост» распределения описывается распределением Максвелла.

Доля возбужденных электронов, даже при комнатных температурах мала (менее 1% электронов проводимости).

Следовательно, в большом диапазоне температур распределение электронов по состояниям соответствует распределению при $T=0$.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА БОЗОНОВ *(квантовая статистика Бозе – Эйнштейна)*

В отличие от фермионов, подчиняющихся принципу Паули, бозоны могут занимать как свободные состояния, так и состояния, уже занятые другими бозонами.

Вид функции распределения бозонов по состояниям (*функция распределения Бозе – Эйнштейна)*:

$$f_Б(E)=\left(e^{\frac{E-\mu}{kT}}-1\right)^{-1}$$

Сравните - $$f_Ф(E)=\left(e^{\frac{E-\mu}{kT}}+1\right)^{-1}$$

Рассмотрим некоторые свойства бозонов на примере *фотонного газа.*

Световые волны не возмущают друг друга. Фотоны не взаимодействуют между собой.

Поэтому излучение, находящееся в равновесии со стенками полости, в которой оно заключено, можно представить как *идеальный фотонный газ*.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА БОЗОНОВ *(квантовая статистика Бозе – Эйнштейна)*

Фотоны имеют спин $s=1$, и являются, таким образом, бозонами.

Особенности фотонов (по сравнению с другими бозонами, например, ядрами гелия):

1. Масса покоя фотонов равна нулю.

2. Все фотоны движутся с одной и той же скоростью, равной скорости света c, но могут обладать различной энергией E и импульсом p:

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c},$$ следовательно, $$E = pc$$

3. Фотоны не сталкиваются между собой, поэтому равновесное распределение в фотонном газе может устанавливаться только в присутствии тела, способного поглощать и излучать фотоны.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА БОЗОНОВ *(квантовая статистика Бозе – Эйнштейна)*

4. Фотоны могут создаваться (при излучении) и уничтожаться (при поглощении) в любых количествах.

Поэтому число фотонов в фотонном газе не является строго постоянным и зависит от состояния газа.

Однако при фиксированных параметрах V и T в равновесном состоянии фотонный газ содержит такое число фотонов N_0, которое обеспечивает минимум энергии газа.

Условие равновесия фотонного газа:

$$\left(\frac{dU}{dN}\right)_{V,T} = 0$$

Поскольку $\left(\frac{dU}{dN}\right)_{V,T} = \mu$, то из условия равновесия следует $\mu = 0$.

Таким образом, *химический потенциал равновесного фотонного газа равен нулю.*

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА БОЗОНОВ *(квантовая статистика Бозе – Эйнштейна)*

С учетом этого свойства можно получить функцию распределения равновесного фотонного газа:

$$f_{фот.}(E) = \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)^{-1}$$

Эта *формула Планка*.

Она выражает среднее число фотонов, обладающих энергией $\hbar\omega$.