Лекция 5

1. Механика

1.5. Колебания

Гармонические колебания. Уравнение идеального гармонического осциллятора. Амплитуда, фаза, частота и период колебаний. Пружинный, физический и математический маятник. Импульс и энергия колебаний. Затухающие колебания. Вынужденные колебания. Резонанс. Автоколебания. Сложение колебаний. Биения. Фигуры Лиссажу.

Периодические процессы

Вибрация струны, качание маятника, раскачивание деревьев, движение поршня двигателя, морские приливы и отливы, суточные и годичные изменения температуры, биения сердца, дыхание, движение электронов в атоме, переменный электрический ток и пр.

Устойчивое положение равновесия

Устойчивым равновесием называют такое положение, в котором колеблющаяся система, будучи предоставленной самой себе, могла бы находиться сколь угодно долго.

Механические колебания

Колебательным называется процесс, многократно повторяющийся через определенные промежутки времени, при котором какая-либо из его характеристик последовательно отклоняется то в одну, то в другую строну от равновесного положения.

Смещение

Отклонение системы от положения равновесия называется смещением (в механических колебаниях это координата).

Периодические колебания

Колебания называются периодическими, если повторяются через равные промежутки времени, называемые периодом колебаний.

Частота колебаний

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}$$

Число полных колебаний в единицу времени называется частотой колебаний. Размерность: [1/сек]=[1 Гц]

Виды колебаий

1. Собственными (или свободными) называются колебания, происходящие в системе под действием внутренних сил после выведения ее из состояния устойчивого равновесия.
2. Вынужденными называются колебания, обусловленные внешним периодическим воздействием.

Гармонические колебаний

Гармоническим называются колебания, при которых физические величины изменяются с течением времени по закону синуса или косинуса.

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0') \qquad \varphi_0' = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$$

Амплитуда колебаний

Амплитуда колебаний — наибольшее смещение от положения равновесия.

$$-1 < \sin\varphi < +1 \quad \Rightarrow \quad -A < x < +A$$

Фаза колебаний

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$$

Циклическая (круговая) частота колебаний

Циклическая частота определяет быстроту изменения фазы с течением времени. $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ $\qquad \omega_0 = \dfrac{\varphi - \varphi_0}{t}$

Поскольку фаза повторяется с периодом 2π:

$$\omega_0 t + \varphi_0 + 2\pi = \omega_0 (t + T) + \varphi_0 \longrightarrow 2\omega_0 t = \omega_0 T = 2\pi \longrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}$$

Единица циклической частоты — 1 радиан в секунду.

1 [рад/сек] — циклическая частота таких колебаний, чтобы фаза в 1 сек возрастала на 2π.

Возвращающая сила

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\mathrm{v} = \dot{x} = -A \cdot \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

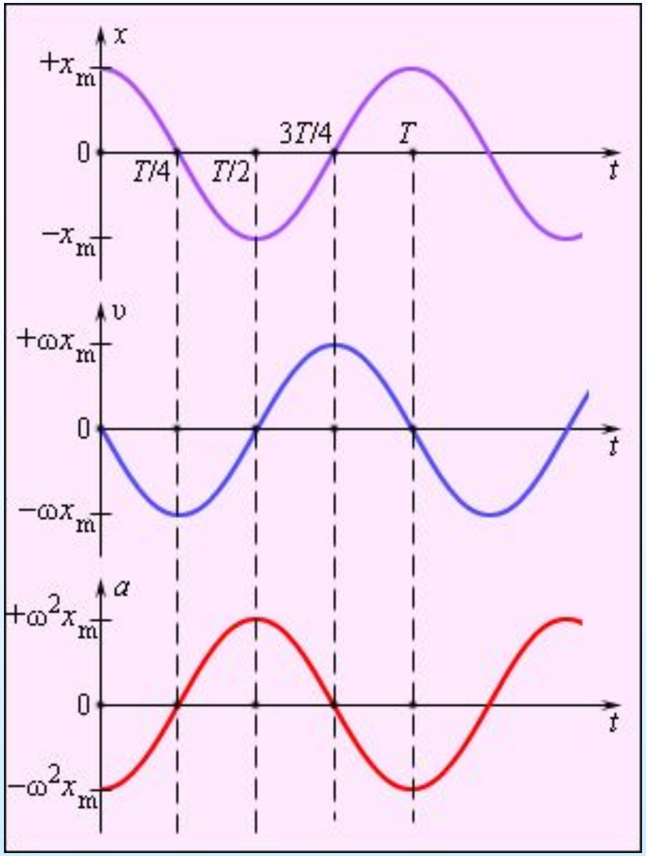
$$a = \dot{\mathrm{v}} = \ddot{x} = -A \cdot \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

k

$$F = ma = -A \cdot m\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -m\omega_0^2 \cdot x$$

$\boxed{F = -k \cdot x}$ где $\boxed{k = m\omega_0^2}$

Знак (–) указывает на то, что сила всегда стремится возвратить систему в положение устойчивого равновесия (обратно).



Квазиупругие силы

Для того, чтобы свободные колебания совершались по гармоническому закону, необходимо, чтобы сила, стремящаяся возвратить тело в положение равновесия, была пропорциональна смещению тела из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению (например, сила упругости).

Силы любой другой физической природы, удовлетворяющие этому условию, называются квазиупругими.

Условия существования свободных колебаний в системе

1. Существует возвращающая квазиупругая сила.
2. Существуют инертные свойства системы – инерционность системы.

Гармонический осциллятор

Гармоническим осциллятором называется любая система, совершающая гармонические колебания.

Собственные незатухающие колебания

Колебания называются незатухающими, если их амплитуда сохраняется постоянной с течением времени.

Уравнение собственных гармонических колебаний

$$\begin{cases} x = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ \mathrm{v} = \dot{x} = -A\cdot\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ a = \dot{\mathrm{v}} = \ddot{x} = -A\cdot\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2\cdot x \end{cases}$$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2\cdot x \quad \rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2\cdot x = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

Решение уравнения: $x = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

Импульс и энергия колебаний

Импульс: $P = m\mathrm{v} = m\dot{x} = -Am\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

Кинетическая энергия: $E_\kappa = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{\overset{k}{m\omega_0^2}}{2} A^2\cdot\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{k}{2} A^2\cdot\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

Потенциальная энергия: $E_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2\cdot\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

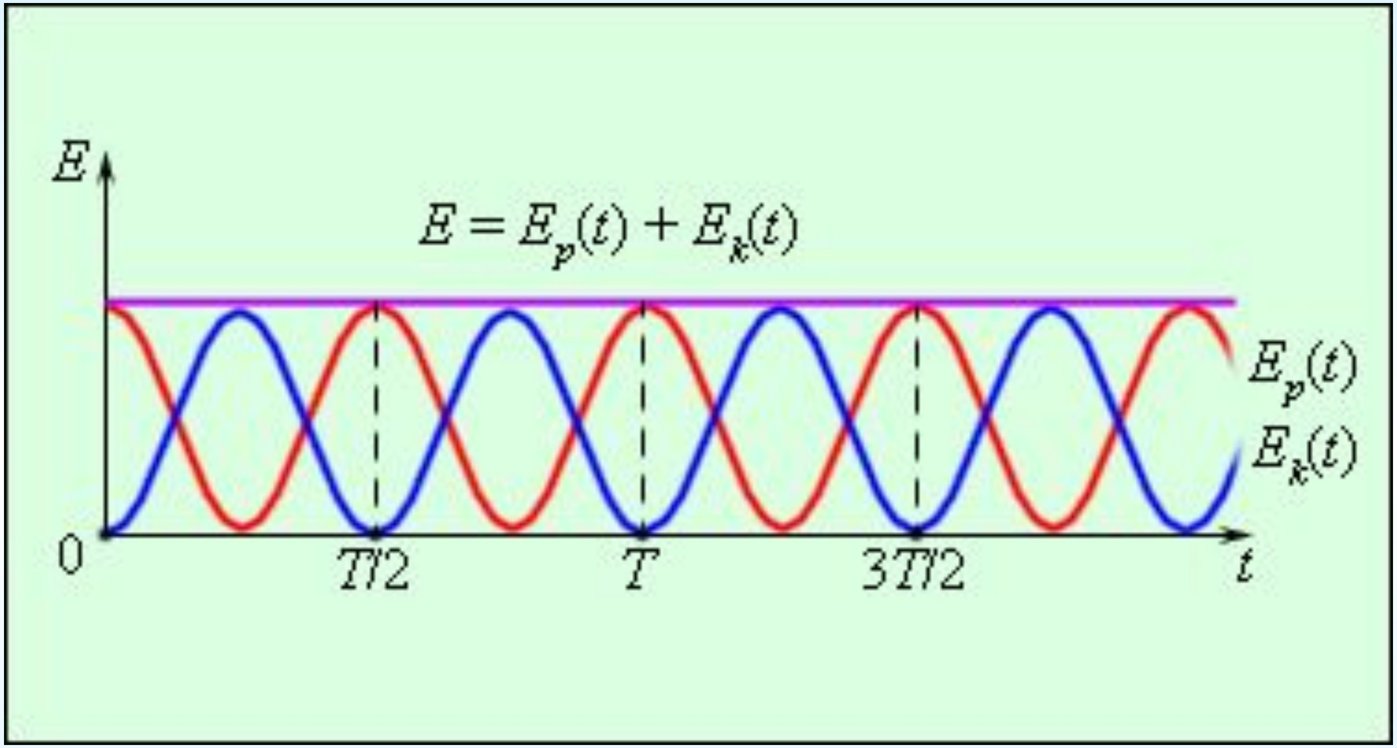
Полная энергия: $E = E_\kappa + E_n = \frac{kA^2}{2}\left(\underbrace{\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}_{=1}\right)$

$$\boxed{E = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = const}$$

Полная энергия системы сохраняется!

Максимальная кинетическая и потенциальная энергия

$$E_{кин\ max} = \frac{k\,A^2}{2} = E_{полная} \qquad E_{пот\ max} = \frac{k\,A^2}{2} = E_{полная}$$



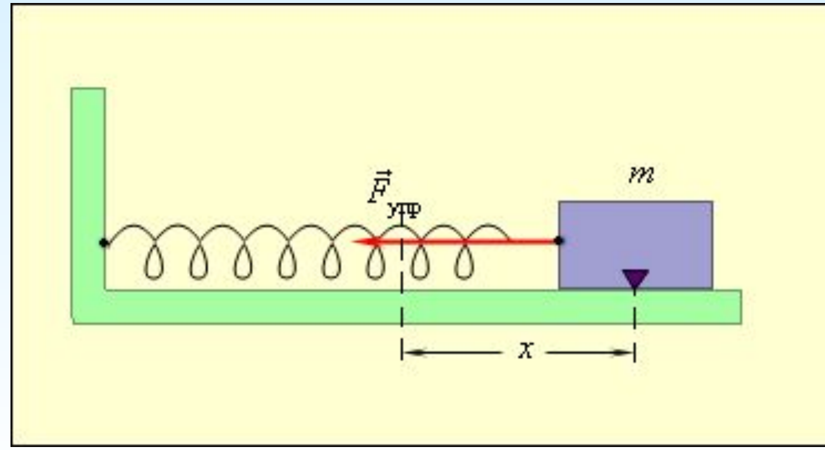
При гармонических колебаниях (в отсутствии трения) происходит непрерывное превращение потенциальной энергии в кинетическую и наоборот. В момент max отклонения вся энергия потенциальная, в момент прохождения положения равновесия — кинетическая.

Частота превращения энергии в 2 раза превышает ω_0.

Пружинный маятник

Пружинным маятником называется тело, прикрепленное к пружине и способное совершать колебания вдоль некоторой оси.

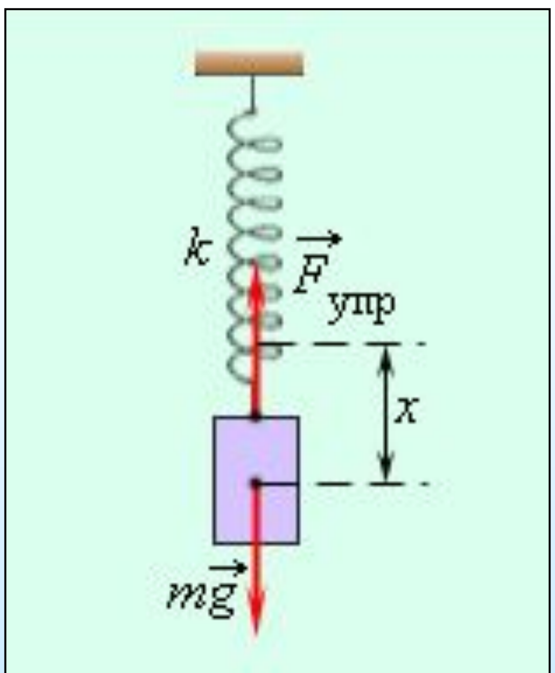
Горизонтальное расположение



$$F_x = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$$

$$-kx = m\ddot{x} \longrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \longrightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$



$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \longrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Период собственных гармонических колебаний не зависит от амплитуды!

Вертикальное расположение

В поле силы тяжести положение равновесия отличается от нуля: $\Delta x = \delta \longrightarrow mg = k\delta$

$$ma = mg + F_{упр} = mg - k(x+\delta) = -kx$$

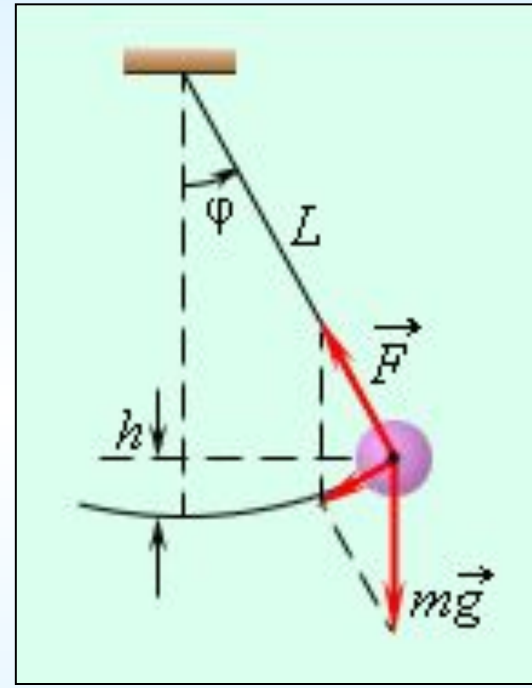
Математический маятник

Математическим маятником называется материальная точка, которая подвешена на невесомой и нерастяжимой нити и может совершать колебания под действием силы тяжести.

$$F = -mg\sin\varphi \qquad M = -mgl\sin\varphi$$

$$\boxed{M = J\varepsilon = J\ddot{\varphi}} \qquad \boxed{J = ml^2}$$

$$-mgl\sin\varphi = ml^2\ddot{\varphi} \longrightarrow -g\sin\varphi = l\ddot{\varphi}$$



Для малых углов ($< 5^\circ$) $\qquad \sin\varphi \approx \varphi$

$$-g\varphi = l\ddot{\varphi} \qquad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0} \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

1) Период колебаний не зависит от массы.
2) Период колебаний не зависит от амплитуды колебаний.
3) Период колебаний математического маятника определяется только длиной нити. Например: настенные маятниковые часы.
4) Период колебаний обратно пропорционален корню квадратному из ускорения свободного падения (способ его определения).

Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной оси, не совпадающей с его центром масс (центром инерции, тяжести).

$$F = -mg\sin\varphi \qquad M = -mgb\sin\varphi \approx -mgb\varphi$$

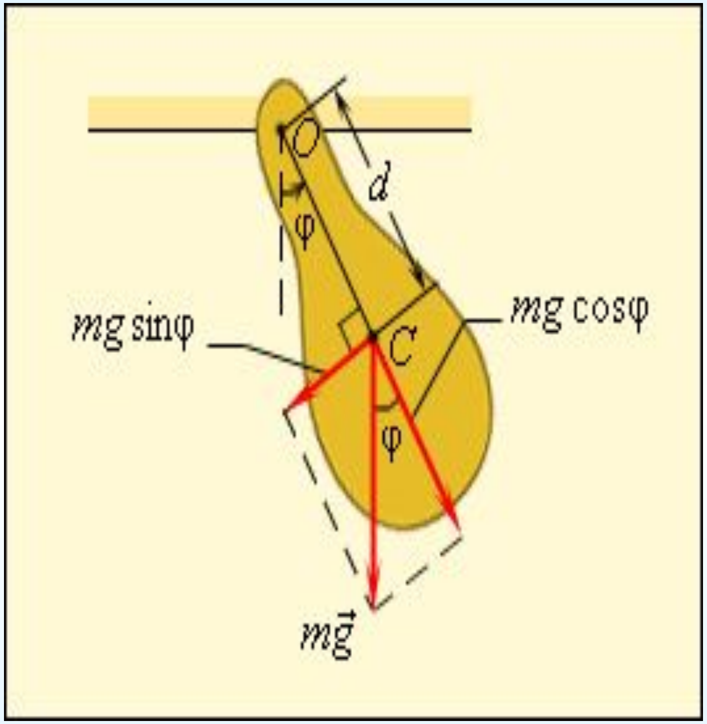
$$\boxed{M = J\varepsilon = J\ddot{\varphi}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{mgb}{J}\varphi = 0}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0}$$

где

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{mgb}{J}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} \qquad \boxed{L = \frac{J}{mb}}$$



Приведенная длина физического маятника

Приведенная длина физического маятника — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Затухающие колебания

<u>Затухающими</u> называются колебания, происходящие в диссипативной колебательной системе.

$$F_{сопр} = -r\text{v} = -r\dot{x} = -r\frac{dx}{dt}$$

Уравнение затухающих колебаний

$$ma = F_{упр} + F_{сопр}$$

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \quad \longrightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ и $2\beta = \dfrac{r}{m}$

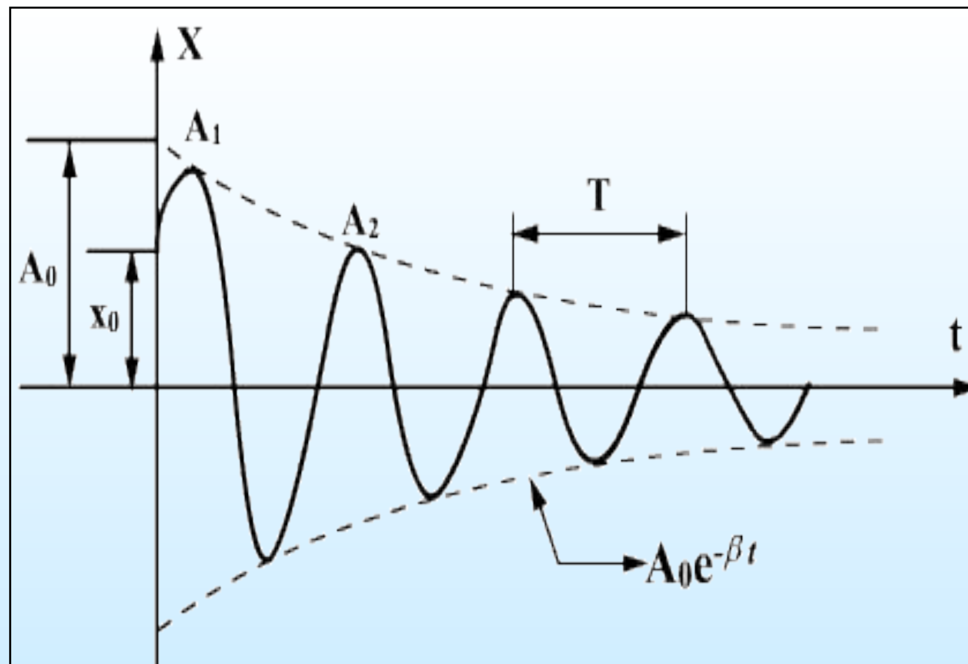
β — коэффициент затухания

Решение уравнения:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$$



Логарифмический декремент затухания

Это натуральный логарифм отношения амплитуд двух смещений, соответствующий моментам времени, отличающимся на период.

$$\boxed{\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = \ln(e^{\beta T}) = \beta T}$$

Время релаксации затуханий

Промежуток времени *τ*, за который амплитуда затухающих колебаний уменьшается в $e \approx 2.7$ раз, называется <u>временем релаксации</u>.

Тогда $\frac{A_0}{A_\tau} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta\tau}} = e^{\beta\tau} = e \;\rightarrow\; \beta\tau = 1 \;\rightarrow\; \boxed{\beta = \frac{1}{\tau}}$

Коэффициент затухания β есть физическая величина, обратная промежутку времени, за которое колебания затухают в *e* раз.

За время *τ* система успеет совершить $N_\tau = \tau / T$ колебаний. Тогда

$$\boxed{\lambda = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{T}{N_\tau T} = \frac{1}{N_\tau}}$$

Логарифмический декремент затухания есть физическая величина, обратная числу колебаний, по истечению которых амплитуда убывает в *e* раз.

Добротность колебательной системы

Этот параметр характеризует степень затухания колебаний в системе и определяется как как число N_τ полных колебаний, совершаемых системой за время релаксации затуханий τ, умноженное на число π.

$$\boxed{Q = \pi N_\tau = \frac{\pi}{\lambda}}$$

Добротность характеризует относительную убыль энергии колебательной системы из-за наличия сопротивления на интервале времени, равном одному периоду колебаний.

Добротность — характеристика колебательной системы, показывающая, во сколько раз запасы энергии в системе больше, чем потери энергии за один период колебаний.
Добротность обратно пропорциональна скорости затухания собственных колебаний в системе. То есть, <u>чем выше добротность</u> колебательной системы, тем <u>меньше потери энергии</u> за каждый период и тем медленнее затухают колебания.

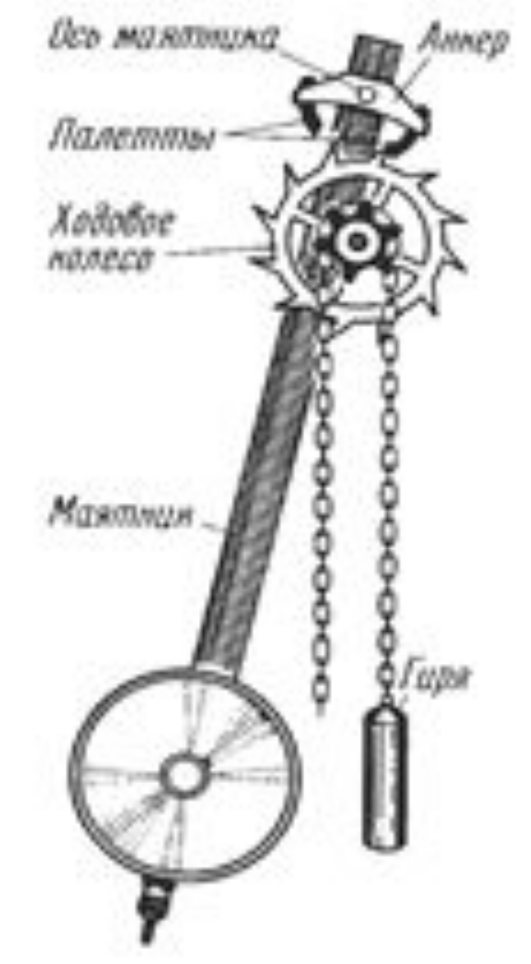
Автоколебания

Колебательная система, совершающая незатухающие колебания за счет действия источника энергии, периодически подключаемого самой системой, называется <u>автоколебательной</u>.

Примеры: часы, орган, духовые инструменты, сердечно-сосудистая система, паровые машины и двигатели внутреннего сгорания и т.д.

Любая автоколебательная система состоит из 4 частей:

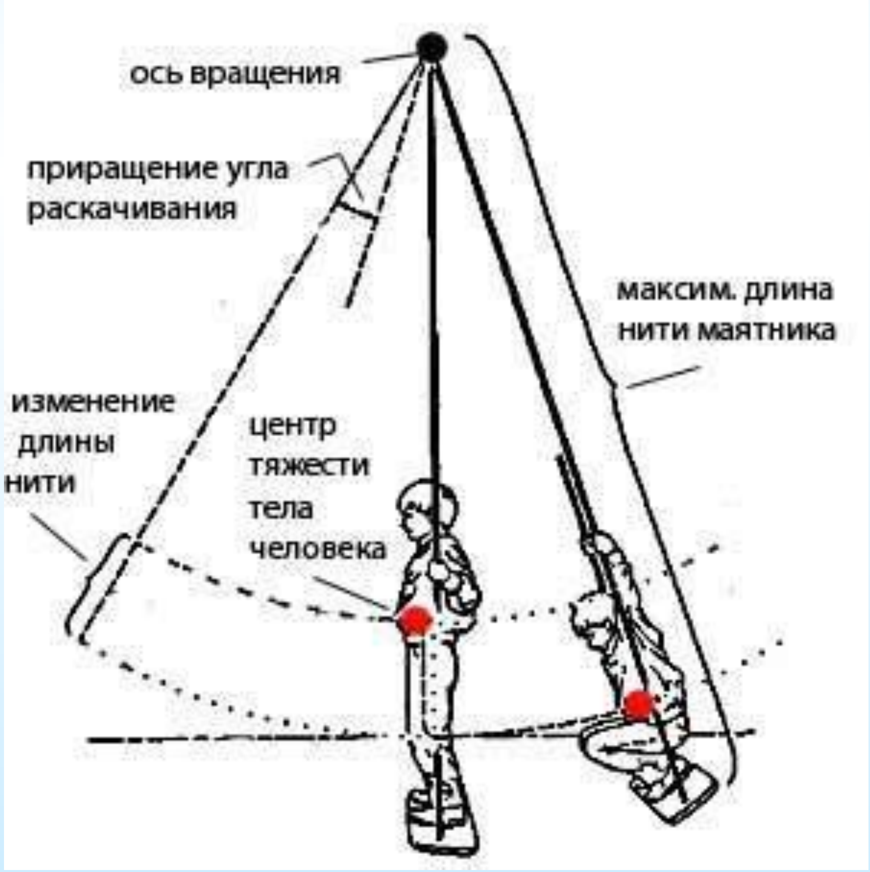
1. колебательная система;
2. источник энергии, компенсирующий потери энергии на преодоление сопротивления;
3. клапан – устройство, регулирующее поступление энергии в колебательную систему определенными порциями и в определенный промежуток времени;
4. обратная связь – устройство для обратного воздействия автоколебательной системы на клапан, управляющее работой клапана за счет процессов в самой колебательной системе.



Параметрические колебания

Параметрическими называются колебания, при которых меняются периодически какие-либо параметры колебательной системы, от которых зависят частота и амплитуда ее колебаний.

Например: длина нити маятника, масса груза, жесткость пружины, положение центра тяжести, момент инерции тела,



Здесь энергия колебательного движения маятника будет поддерживаться за счет работы, совершаемой человеком по изменению параметров системы.

Вынужденные колебания

Вынужденными называются незатухающие колебания системы, которые вызываются действием внешней периодической силы.

Уравнение вынужденных колебаний

$$F = F_0 \cos \Omega t$$

$$ma = F_{упр} + F_{сопр} + F \quad \longrightarrow \quad m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t$$

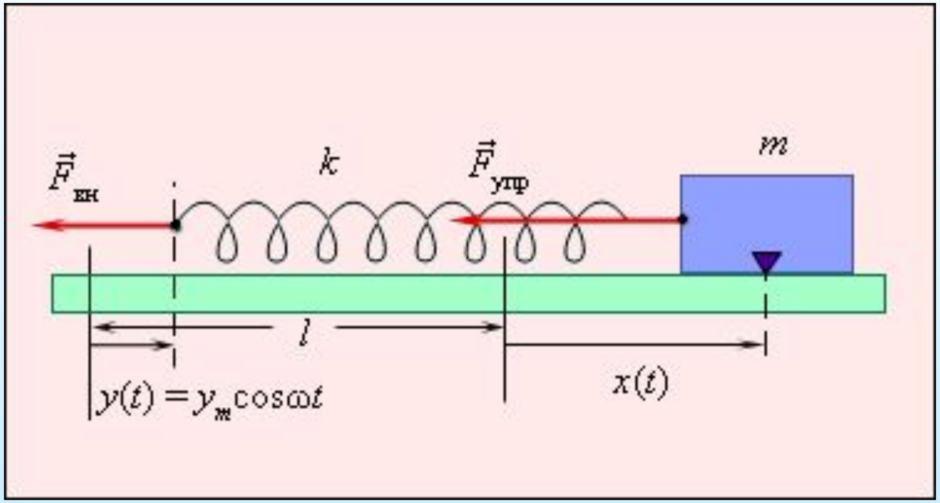
$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos \Omega t}$$ где $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, $2\beta = \dfrac{r}{m}$ и $\boxed{f = \dfrac{F_0}{m}}$

Решение уравнения: $\boxed{x = A_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + B \cos(\Omega t - \phi)}$

φ – отставание по фазе между приложенной силой и смещением

Установившиеся колебания

$$\boxed{x = B \cdot \cos(\Omega t - \phi)}$$



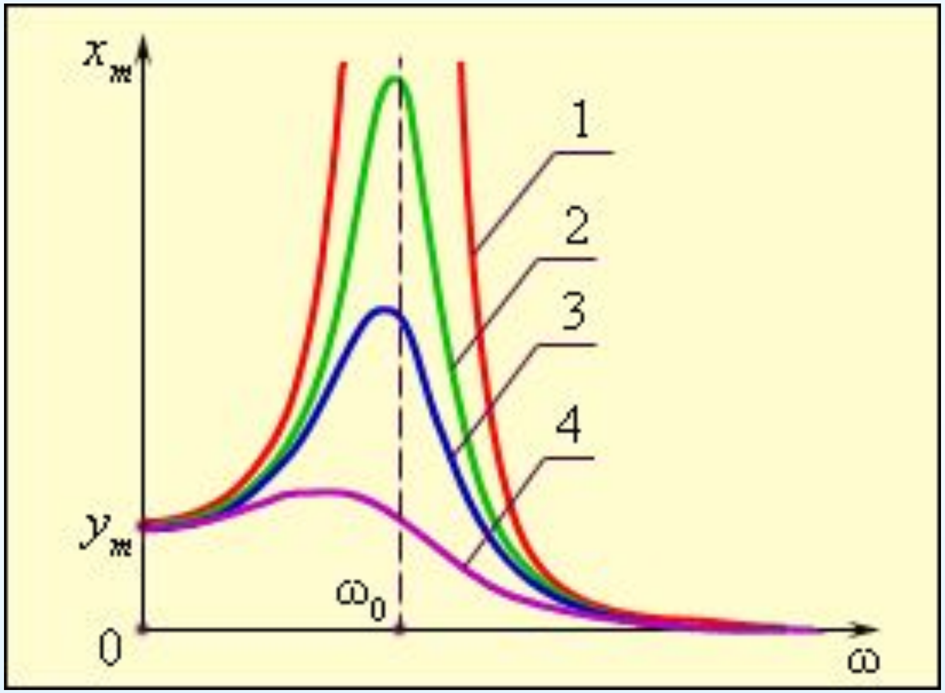
$$B = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$$tg\phi = \frac{2B\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Резонанс

Резонансом называется резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебательной системы.

Резонансная частота



$$\frac{d}{d\Omega}\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2\right]=0$$

$$\boxed{\Omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$$

$$\boxed{B_{рез}=B_{\max}=\frac{f}{2\beta\sqrt{\left(\omega_0^2-\beta^2\right)}}}$$

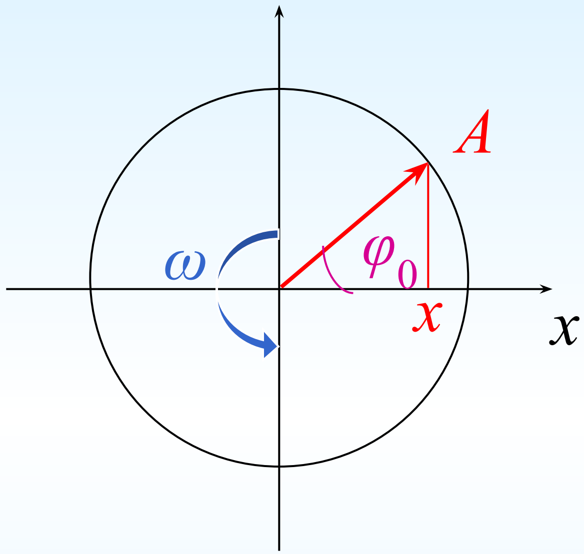
При наличии трения резонансная частота несколько меньше собственной частоты колебательной системы.

Виды колебаний

Графическое представление колебаний

Векторная диаграмма — представление гармонических колебаний с помощью вектора амплитуды, вращающегося по окружности с постоянной угловой скоростью ω_0.

$$x = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$



Сложение гармонических колебаний

Если колебательная система одновременно участвует в двух (или более) независимых колебательных движениях, возникает задача найти результирующее колебание — его уравнение (для однонаправленных) или траекторию (для перпендикулярных).

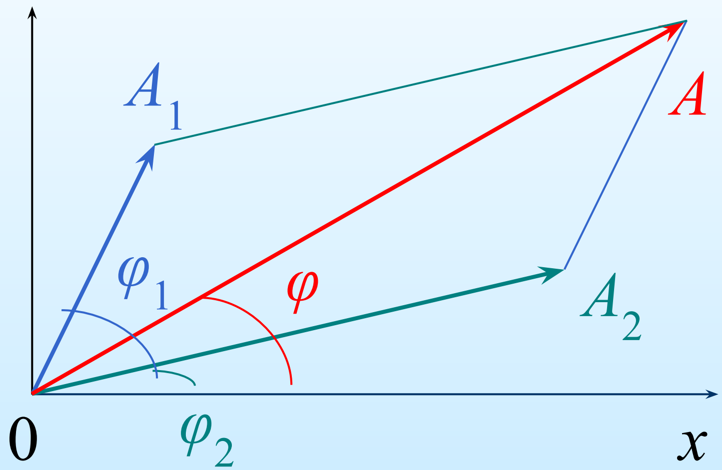
Сложение однонаправленных колебаний одной частоты

$$x_1 = A_1\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_1),\ \ x_2 = A_2\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

По теореме косинусов:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

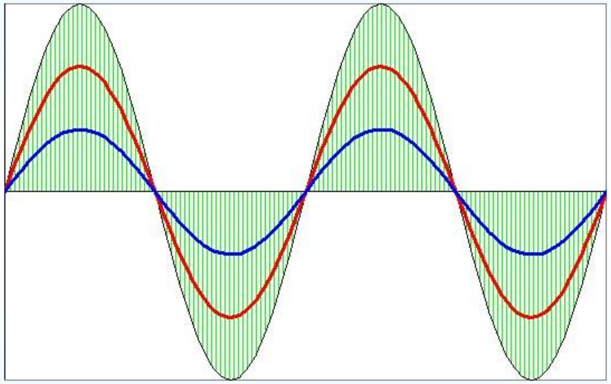
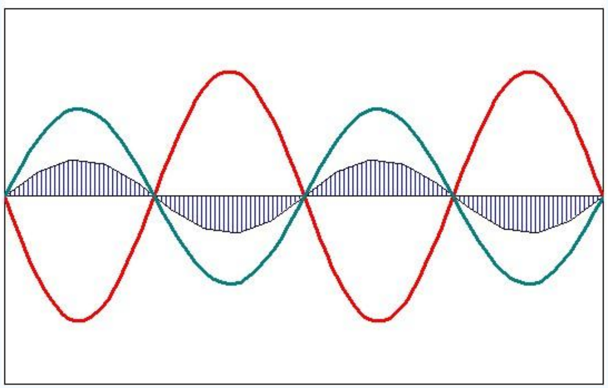
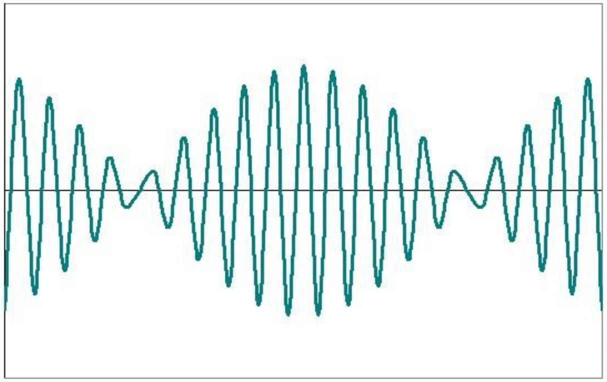


1) Если разность фаз колебаний $(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \pm 2\pi n$ $\Rightarrow$ $A = A_1 + A_2$

2) Если разность фаз колебаний $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi \pm 2\pi n$ $\Rightarrow$ $A = A_1 - A_2$

Биения

<u>Биениями</u> называются гармонические колебания с периодически пульсирующей амплитудой, получающиеся при сложении двух однонаправленных колебаний с близкими частотами.

Частоты двух колебаний слегка различаются на величину $\delta = \omega_1 - \omega_2$

$$x_1 = A \cdot \cos\left(\omega_0 - \frac{\delta}{2}\right)t \qquad x_2 = A \cdot \cos\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2}\right)t \qquad \delta << \omega_0$$

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A\cos\frac{\delta}{2}t\right)\cos(\omega_0 t) \qquad A_б = \left|2A \cdot \cos\frac{\delta}{2}t\right| \qquad T_б = \frac{2\pi}{\delta}$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Два колебания одной частоты, происходящих вдоль осей *x* и *y*:

$$x = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_1) \qquad y = B\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Уравнение эллипса в общем виде

1) Если разность фаз колебаний $(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \pm 2\pi n$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

→ Уравнение прямой $y = \frac{B}{A}x$

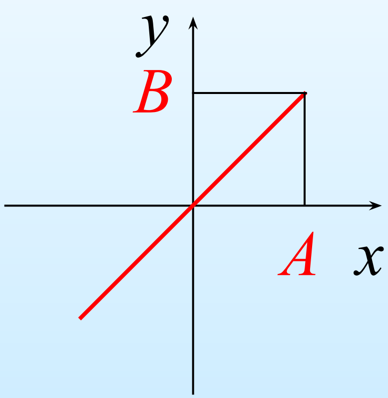
2) Если разность фаз колебаний $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi \pm 2\pi n$

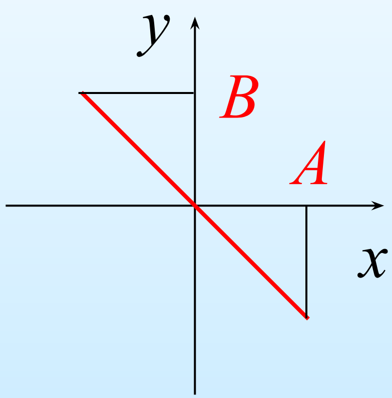
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2xy}{AB} = \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

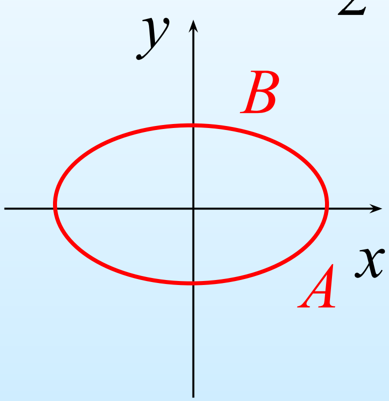
→ Уравнение прямой $y = -\frac{B}{A}x$

3) Если разность фаз колебаний $(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$

→ Уравнение эллипса



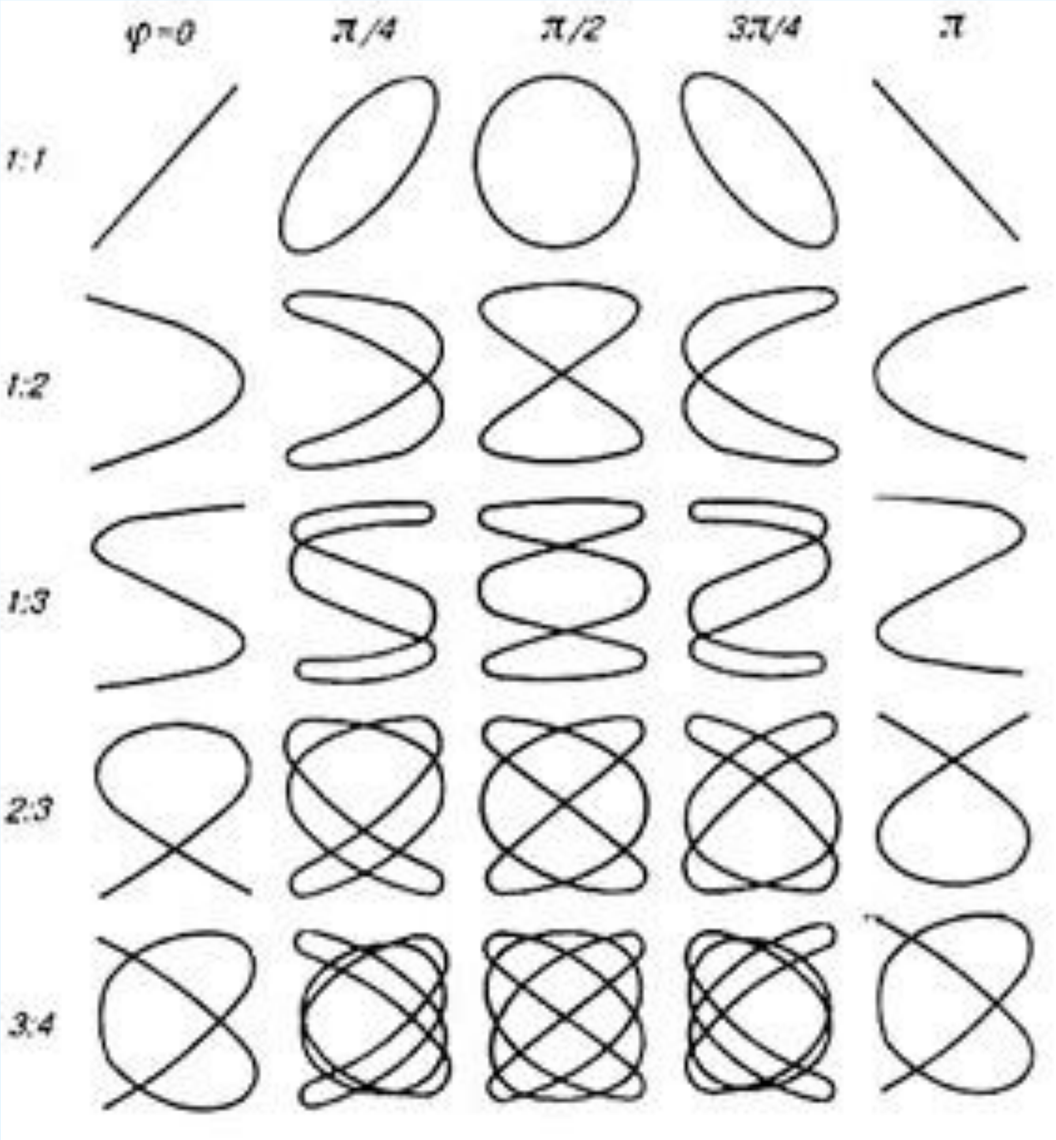




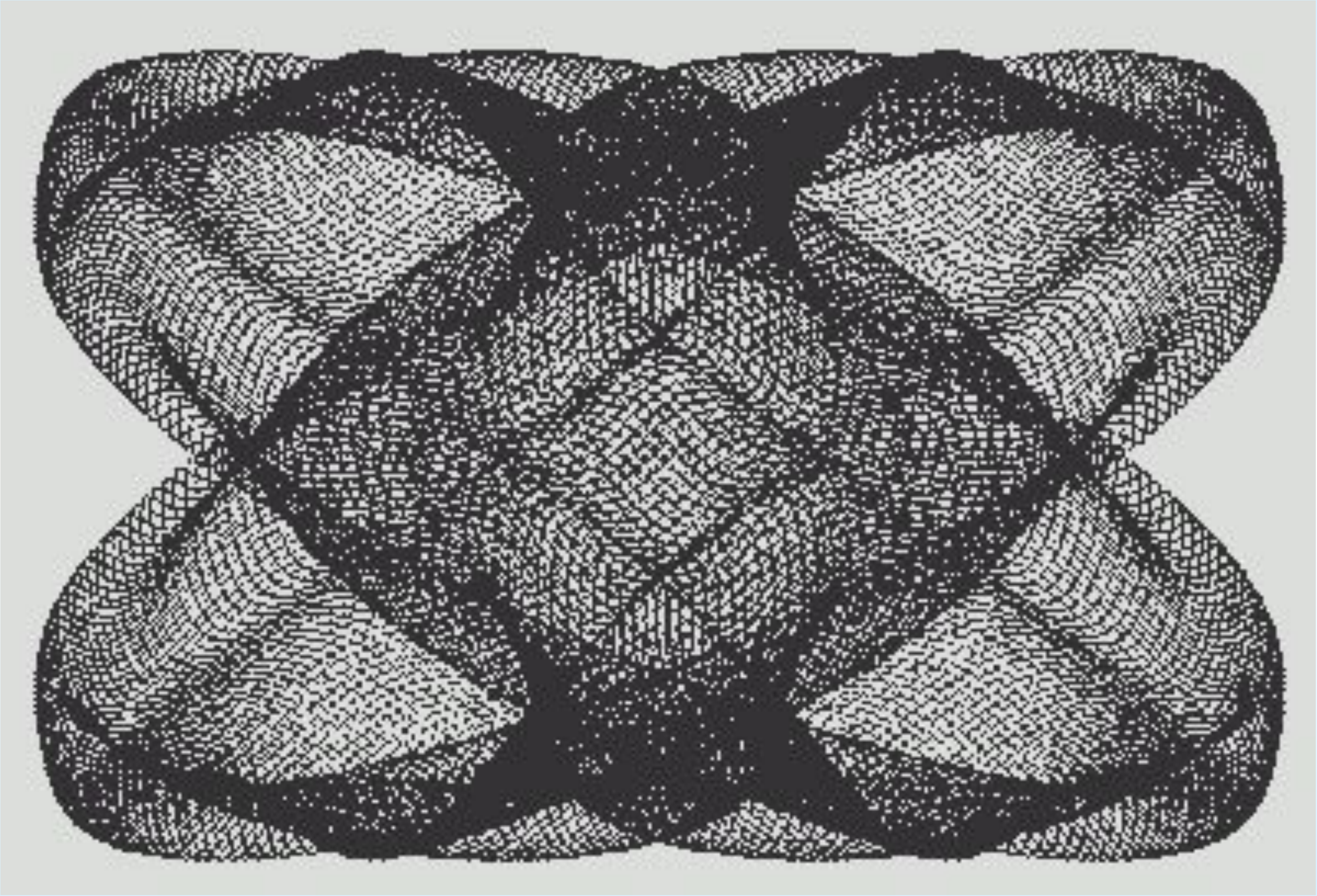
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Фигуры Лиссажу

Фигуры Лиссажу́ — замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей два взаимно перпендикулярных гармонических колебания, периоды которых соотносятся как целые числа.

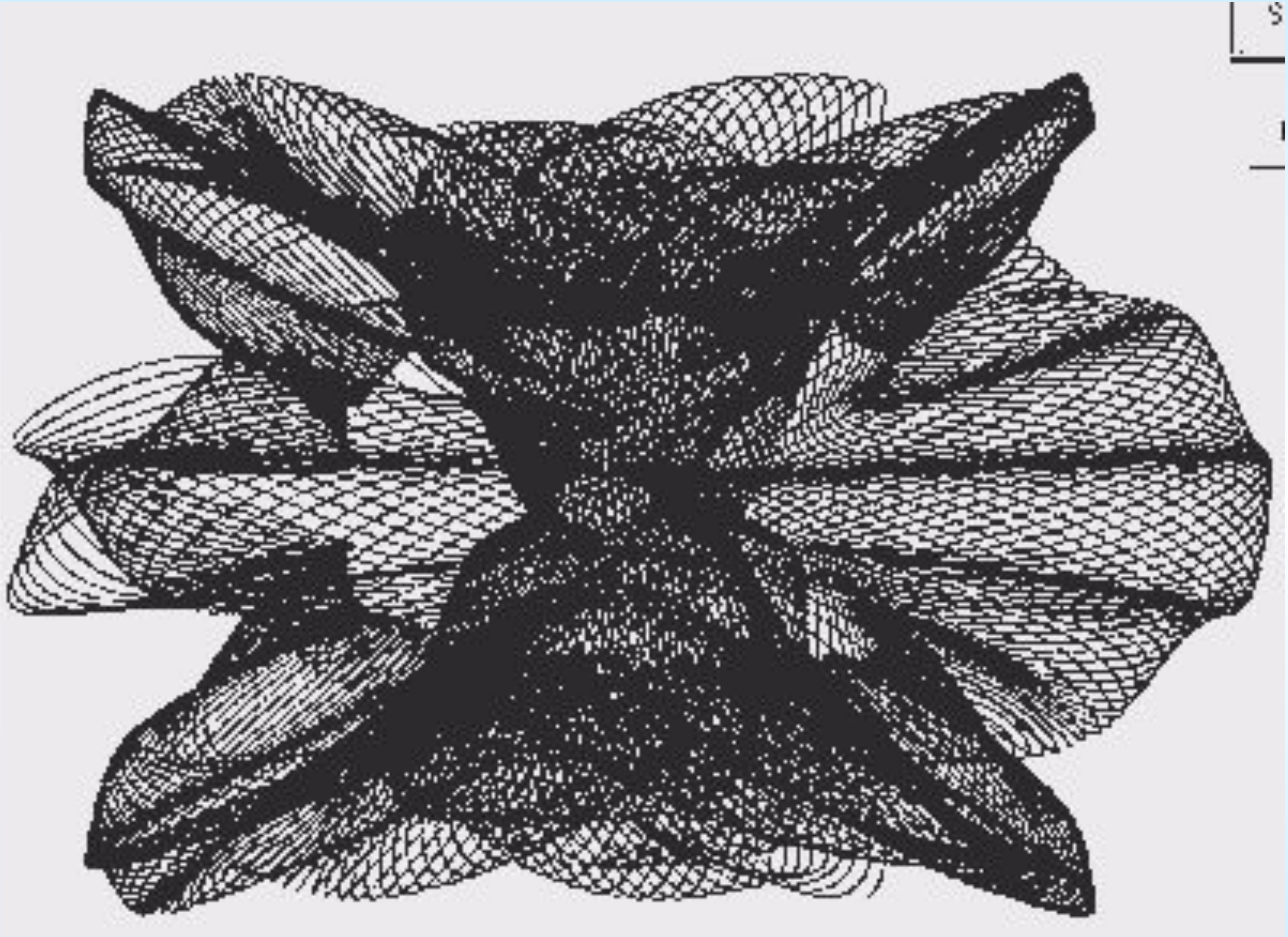


Фигуры Лиссажу



"Безумие"

Фигуры Лиссажу



"Помешательство"