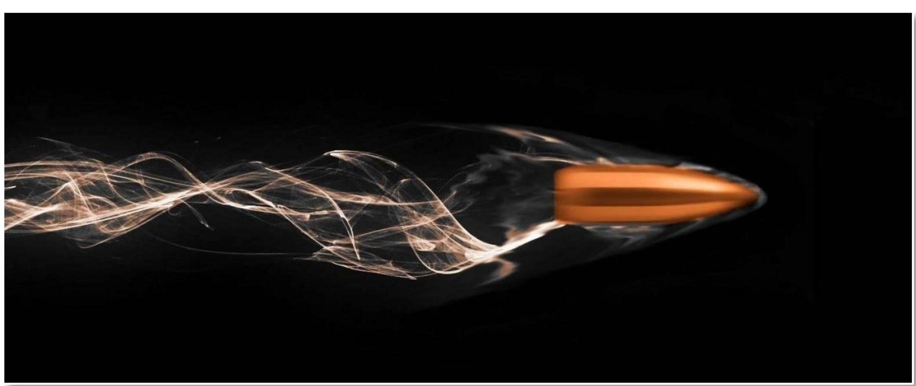
ENERGIA, PRACA, MOC, PĘD

Energia kinetyczna

Energia kinetyczna (E_k) – związana ze stanem ruchu ciała. Im szybciej ciało się porusza tym większą ma energię kinetyczną. Gdy jest nieruchome, energia kinetyczna jest równa zero.

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} \qquad J = kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$$

Jednostką energii kinetycznej (i każdego innego rodzaju energii) jest dżul.



Praca

Gdy działamy na ciało siłą, zwiększamy (zmniejszamy) jego prędkość, a co za tym idzie energię kinetyczną. Tak więc, przekazujemy ciału energię, lub odbieramy od niego energię

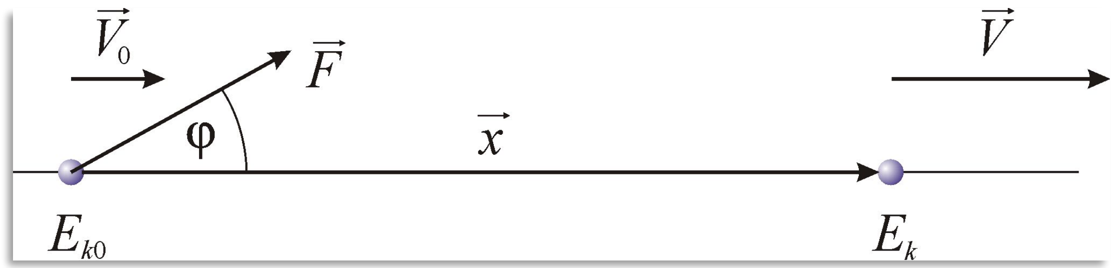
Praca (*W*) – jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana na drodze działania na ciało siłą. Gdy energia jest przekazana ciału – praca jest dodatnia, natomiast kiedy energia jest ciału odebrana – praca jest ujemna.
Gdy przekazanie energii odbywa się poprzez przyłożenie do ciała siły, mówimy że siła wykonuje nad ciałem pracę.

Praca jest wielkością skalarną, a jej jednostką jest dżul (tak samo jak dla energii).

W określeniu „przekazanie” energii nie chodzi o przepływ materii.
A termin „praca” nie ma odzwierciedlenia w języku potocznym!

Praca – wyprowadzenie wzoru

Po płaskiej powierzchni porusza się ciało (bez tarcia) z prędkością V_0. W pewnym momencie zaczyna działać na nie stała siła F, skierowana pod kątem ϕ do poziomu. Siła ta działa na ciało na odcinku o długości drogi x.



Korzystając ze wzorów:

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$V = V_0 + at$$

otrzymamy, że:

$$ax = \frac{V^2 - V_0^2}{2}$$

i z II zasady dynamiki Newtona:

$$F = ma$$

W położeniu początkowym i końcowym ciało posiada pewną energię kinetyczną więc praca:

$$W = \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = m\frac{V^2 - V_0^2}{2}$$

$$W = max$$

$$\boxed{W = F_x x}$$

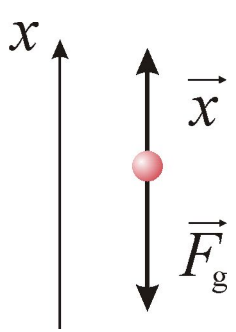
lub korzystając ze znajomości kąta nachylenia wektora siły:

$$\boxed{W = Fx\cos\varphi}$$

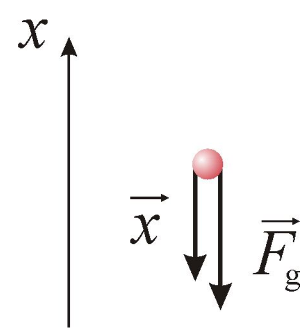
Praca – jest czy nie???

Praca wykonana przez siłę ciężkości

Ciało rzucone
pionowo w górę



Ciało spada
pionowo w dół



[illegible] = [illegible] cos [illegible]

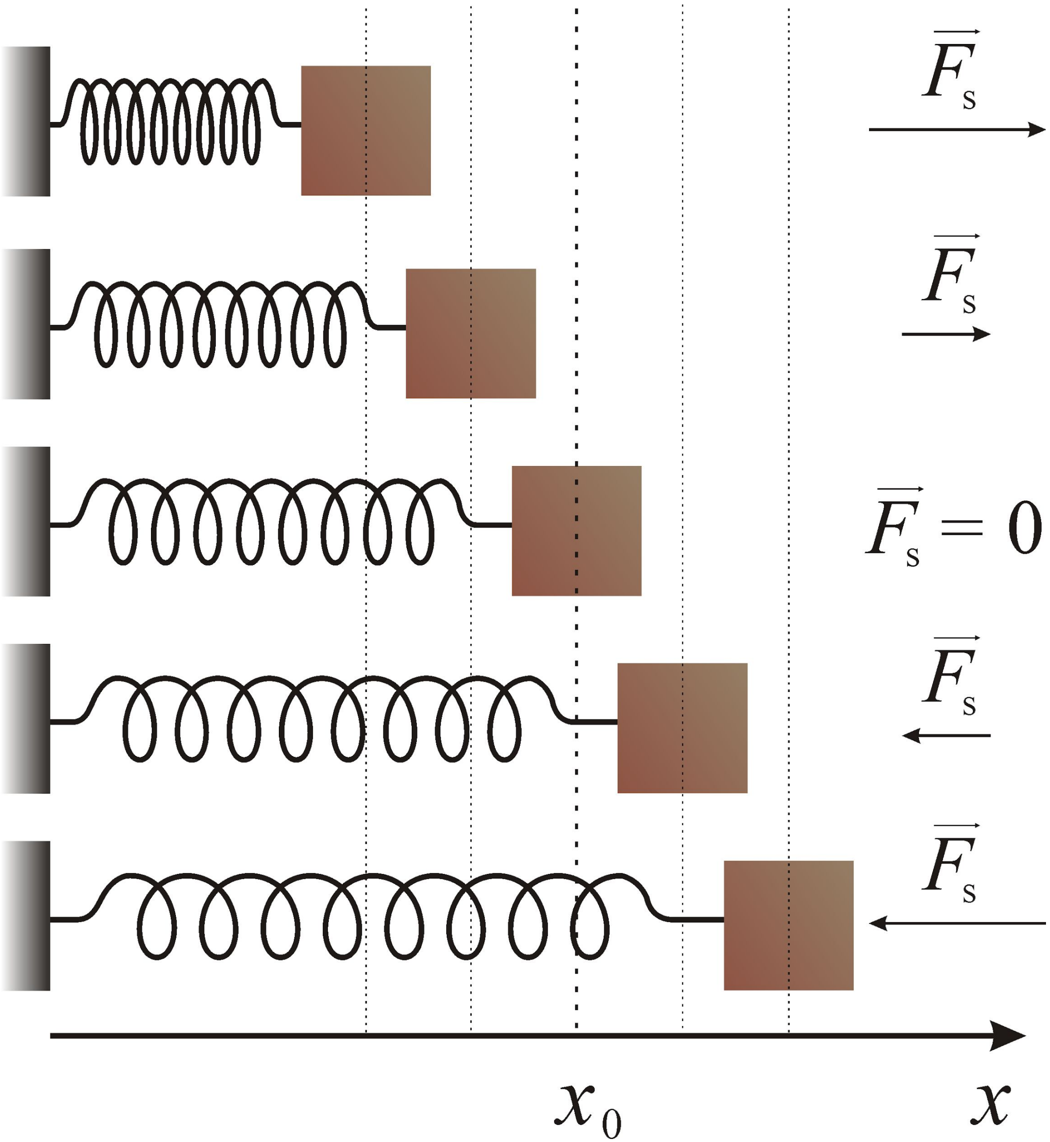
[illegible] = [illegible] cos180°

[illegible] = − [illegible]

[illegible] = [illegible] cos0°

[illegible] = [illegible]

Praca wykonana przez zmienną siłę

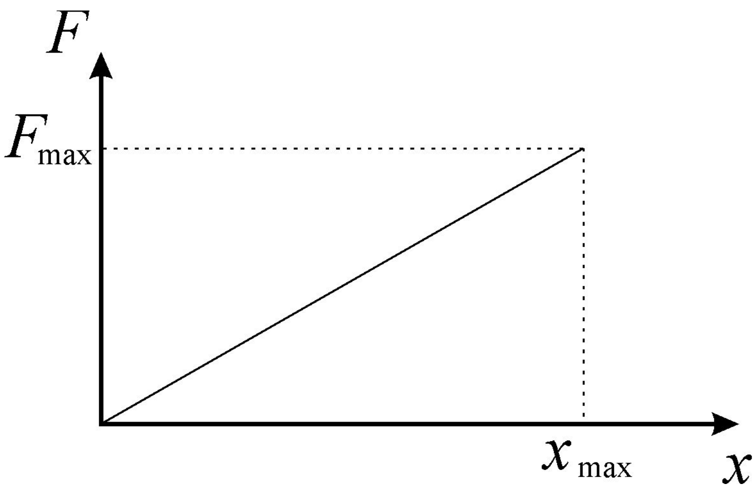


- Ciało jest pchane (ciągnięte) przez sprężynę.
- Masę sprężyny i tarcie ciała o powierzchnię pomijamy.
- Z dobrym przybliżeniem można przyjąć, że siła F_s (sprężystości) jest proporcjonalna do wychylenia (prawo Hooke'a).

$$F_s = -kx$$

Do wyznaczenia pracy wykonanej przez zmienną siłę należy użyć rachunku całkowego.

Praca wykonana przez zmienną siłę



Praca obliczona z wykorzystaniem właściwości funkcji liniowej:

$$W = F_{śr}\,x = \frac{0 + F_{max}}{2}\,x_{max}$$

$$W = F_{śr}\,x = \frac{-kx_{max}}{2}\,x_{max} = \frac{-kx_{max}^2}{2}$$

Praca obliczona z wykorzystaniem rachunku całkowego:

$$W = \int_0^{x_{max}} F\,\mathrm{d}x = \int_0^{x_{max}} -kx\,\mathrm{d}x = -k\int_0^{x_{max}} x\,\mathrm{d}x$$

$$W = -\frac{k}{2}\left[x^2\right]_0^{x_{max}} = -\frac{k}{2}x_{max}^2 - \left(-\frac{k}{2}0^2\right)$$

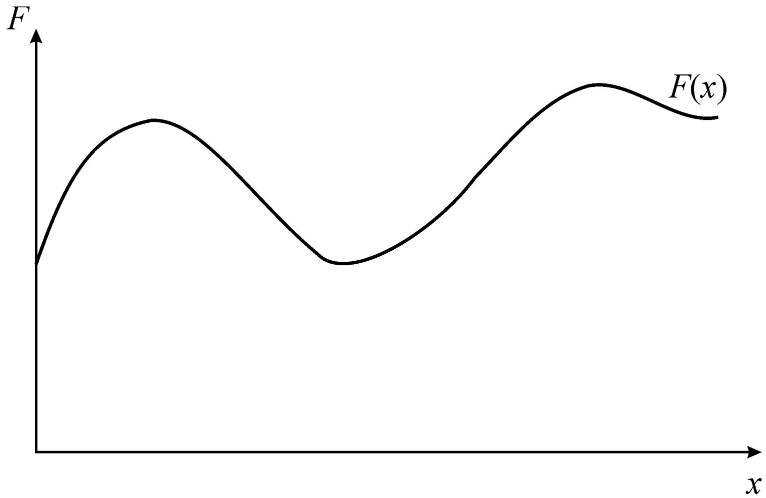
$$W = -\frac{k}{2}x_{max}^2$$

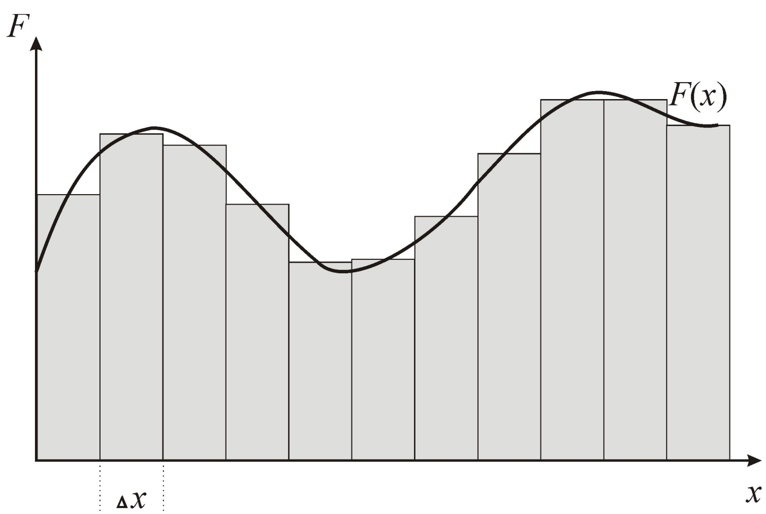
$$\boxed{W = -\frac{k}{2}x^2}$$

Praca wykonana przez zmienną siłę, która liniowo zależy od położenia jest równa:

- całce z funkcji $F(x)$
- iloczynowi średniej wartości siły i całkowitego przesunięcia
- polu powierzchni między wykresem funkcji a osią x układu współrzędnych

Praca wykonana przez zmienną siłę



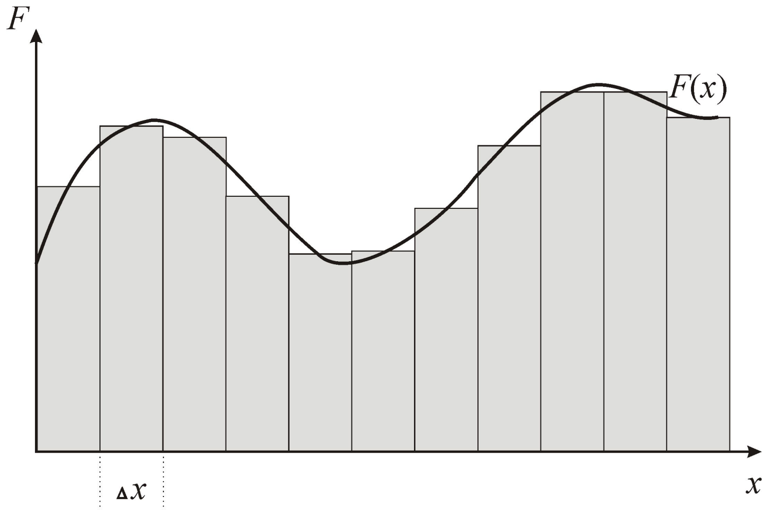


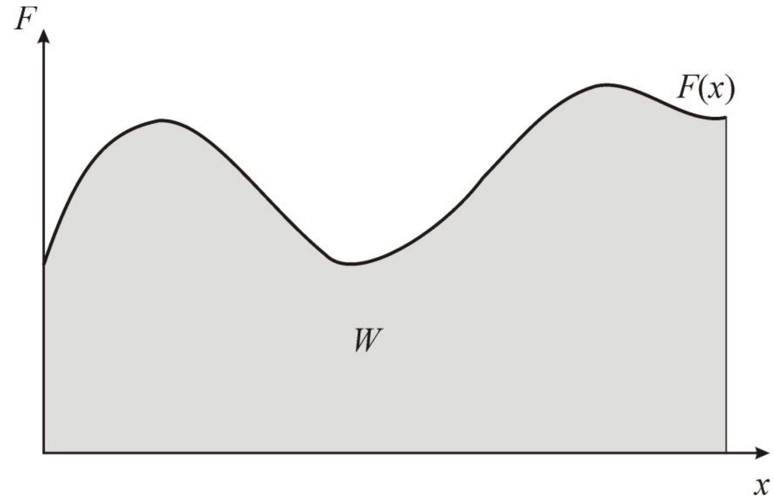
Dzieląc przesunięcie na bardzo wiele bardzo krótkich odcinków Δx można przyjąć, że działająca na tych małych odległościach siła F_i jest stała. Praca elementarna w przedziale Δx to $W_i = F_i \Delta x$ Całkowita praca natomiast jest sumą wszystkich prac W_i.

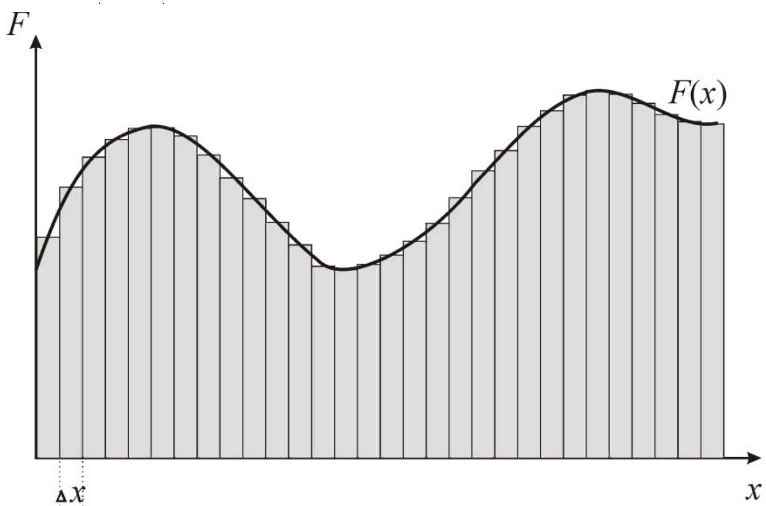
$$W = F_1 \Delta x + F_2 \Delta x + \ldots + F_n \Delta x$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta x$$

Praca wykonana przez zmienną siłę







Zmniejszając odcinek Δx uzyskujemy coraz dokładniejszy wynik. Ostatecznie w granicy, kiedy:

$$\Delta x \to dx$$

sumowanie przechodzi w całkę:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$

Moc

Moc – jest to prędkość z jaką siła wykonuje pracę.

Moc średnia:

$$P_{śr} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Moc chwilowa:

$$P_{śr} = \frac{dW}{dt}$$

Jednostką mocy jest Wat: $W = \frac{J}{s}$

inne powszechnie stosowane jednostki mocy to:

koń mechaniczny: $1KM = 746W$ $\quad 1kW = 1{,}34KM$

kilowatogodzina: $1kWh = (10^3 W) \cdot 3600s = 3{,}6 \cdot 10^6 J = 3{,}6\ MJ$

Energia potencjalna

Energia potencjalna – jest związana z konfiguracją (ustawieniem) układu ciał, które oddziaływują na siebie siłami.

Gdy zmienia się konfiguracja ciał odziaływujących na siebie siłami grawitacji (ich względna odległość), zmienia się również energia potencjalna układu – **grawitacyjna energia potencjalna**.
Praca związana ze ściskaniem (lub rozciąganiem) ciała sprężystego zwiększa jego **energię potencjalną sprężystości**.

Energia kinetyczna i potencjalna

W rzucie pionowym ciała do góry.

- podczas wznoszenia praca jest ujemna ($-W_1$), energia kinetyczna maleje, a energia potencjalna rośnie
- podczas opadania praca jest dodatnia (W_2), energia kinetyczna rośnie, a energia potencjalna maleje.

W tej sytuacji spełniony jest warunek, że: $W_2 = -W_1$, pracę wykonuje ta sama **siła grawitacyjna**, która nazywa się **siłą zachowawczą**.

Przykładem **siły niezachowawczej** jest np. **siła tarcia**.

Ciało przesuwa się po stole:

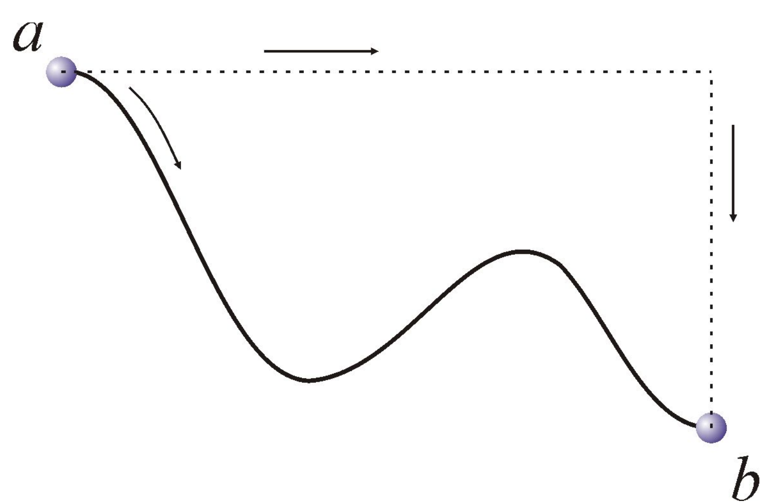
- siła tarcia wykonuje pracę ujemną (działa przeciwnie do przesunięcia).
- energia kinetyczna zostaje zamieniona na **energię termiczną (cieplną)** w wyniku tarcia
- energia cieplna nie może być spowrotem przekształcona na energię kinetyczną

Niezależność pracy od drogi

Całkowita praca wykonana przez siłę zachowawczą nad cząstką poruszającą się po dowolnej drodze zamkniętej jest równa zeru.

Praca wykonana przez siłę zachowawczą nad cząstką, przemieszczającą się między dwoma punktami nie zależy od drogi, po jakiej porusza się cząstka.

Ciało ześlizguje się po narysowanej drodze (2 m). Różnica poziomów między punktami *a* oraz *b* wynosi 0,8 m. Jaką pracę wykonuje nad ciałem siła ciężkości?



Praca na odcinku poziomym wynosi:

$$W_1 = mgs\cos 90^\circ = 0$$

natomiast praca na odcinku pionowym:

$$W_2 = mgh\cos 0^\circ = mgh$$

$$W_2 = 2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}8 \approx 15{,}7\ \mathrm{J}$$

Wyznaczanie energii potencjalnej

Gdy siła zachowawcza wykonuje nad ciałem pracę to związana z tym zmiana energii potencjalnej układu jest przeciwna do wykonanej pracy. (np. spadek swobodny)

$$\Delta E_p = -W$$

W przypadku ogólnym mamy:

$$W = \int_{x_{pocz}}^{x_{konc}} F(x)\,dx$$

zatem zmiana energii potencjalnej:

$$\Delta E_p = -\int_{x_{pocz}}^{x_{konc}} F(x)\,dx$$

Grawitacyjna energia potencjalna:

$$\Delta E_p = -\int_{y_{pocz}}^{y_{konc}} (-mg)\,dy$$

$$\Delta E_p = mg\Delta y \qquad E_p = mgy$$

Energia potencjalna sprężystości:

$$\Delta E_p = -\int_{x_{pocz}}^{x_{konc}} (-kx)\,dx$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Zasada zachowania energii

Energia mechaniczna jest sumą energii potencjalnej E_p i kinetycznej E_k.

Wiemy, że: $\Delta E_k = W$ oraz $\Delta E_p = -W$ więc $\Delta E_p = -\Delta E_k$

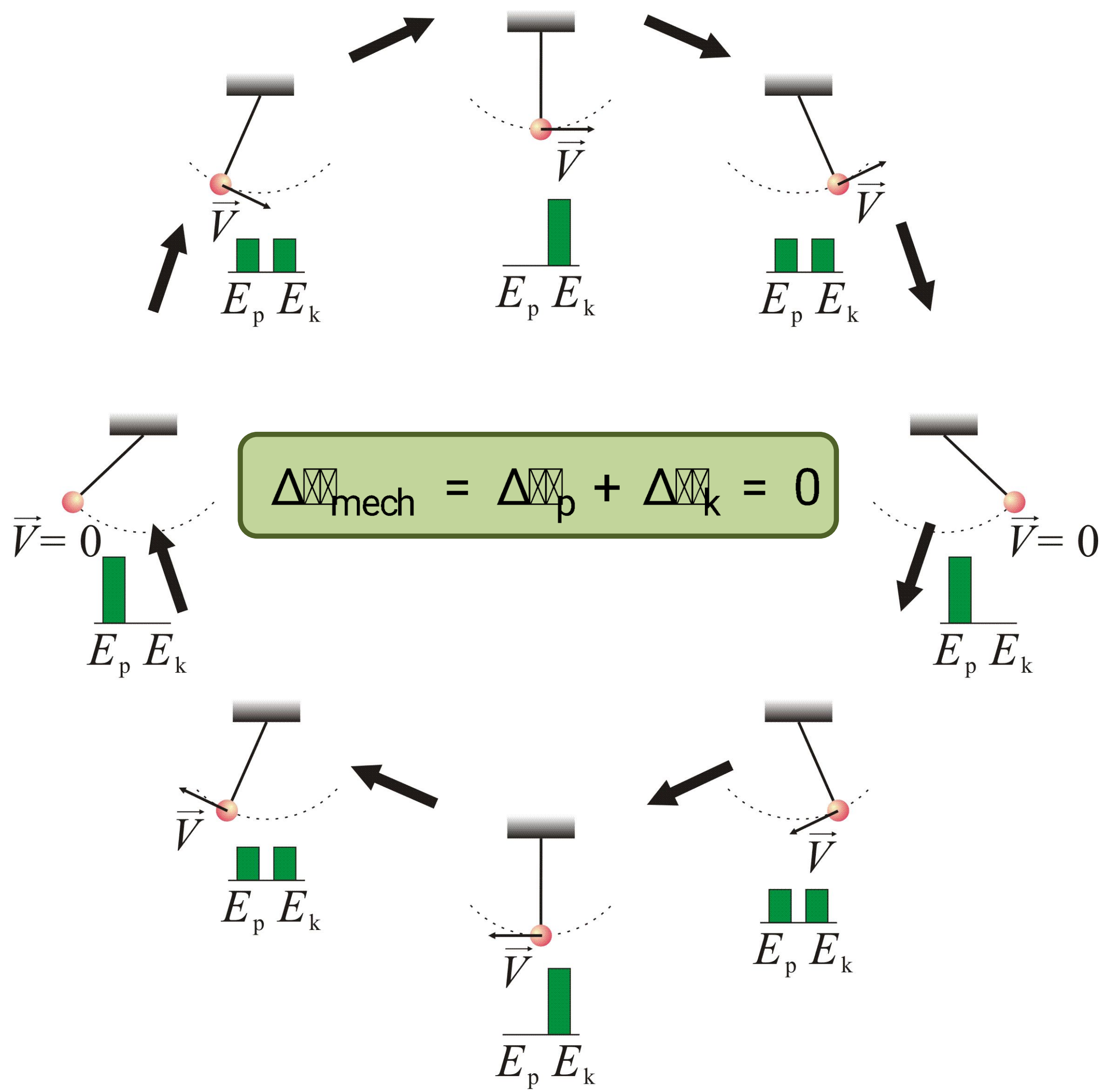
Równanie to możemy zapisać w postaci:

$$E_{p2} - E_{p1} = -(E_{k2} - E_{k1})$$

Co po przekształceniu daje zapis zasady zachowania energii mechanicznej:

$$E_{p2} + E_{k2} = E_{p1} + E_{k1}$$

Zasada zachowania energii



Pęd, zasada zachowania pędu

Pędem cząstki jest wektor zdefiniowany jako: $\vec{p} = m\vec{v}$

Szybkość zmian pędu cząstki jest równa wypadkowej sił działających na cząstkę i ma kierunek tej siły.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Pęd układu cząstek jest sumą pędów poszczególnych cząstek:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n$$

Zasada zachowania pędu
Jeżeli na układ cząstek nie działają żadne siły zewnętrzne lub wypadkowa działających sił jest równa zeru, to całkowity pęd układu nie ulega zmianie.

$$\vec{F} = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \text{więc} \quad \vec{P} = \text{const.}$$

Zasada zachowania pędu

Zasada zachowania pędu – silnik odrzutowy

w chwili t: $$\vec{p}(t) = m_r \vec{v}_r$$

po upływie czasu dt: $$\vec{p}(t + \mathrm{d}t) = (m_r - \mathrm{d}m_g)(\vec{v}_r + \mathrm{d}\vec{v}_r) + \mathrm{d}m_g(\vec{v}_r - \vec{v}_{wzg})$$

zmiana pędu: $$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}(t)$$
$$= m_r \vec{v}_r - \mathrm{d}m_g \vec{v}_r + m_r \mathrm{d}\vec{v}_r - \mathrm{d}m_g \mathrm{d}\vec{v}_r + \mathrm{d}m_g \vec{v}_r - \mathrm{d}m_g \vec{v}_{wzg}$$
$$- m_r \vec{v}_r$$

$$\mathrm{d}\vec{p} = m_r \mathrm{d}\vec{v}_r - \mathrm{d}m_g \mathrm{d}\vec{v}_r - \mathrm{d}m_g \vec{v}_{wzg}$$

$$\mathrm{d}\vec{p} = (m_r - \mathrm{d}m_g)\mathrm{d}\vec{v}_r - \mathrm{d}m_g \vec{v}_{wzg}$$

$$m_r \gg \mathrm{d}m_g \Rightarrow m_r - \mathrm{d}m_g \approx m_r$$

$$\mathrm{d}\vec{p} = m_r \mathrm{d}\vec{v}_r - \mathrm{d}m_g \vec{v}_{wzg}$$

Zasada zachowania pędu – silnik odrzutowy

Dzielimy obie strony równania przez d*t*:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = m_r \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m_r}{\mathrm{d}t} v_{wzg}$$

Siła to pochodna pędu po czasie: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma = F$

Postać ogólna równania ruchu rakiety:

$$m_r \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} = \underbrace{F}_{\text{suma sił zewnętrznych działających na rakietę}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}m_r}{\mathrm{d}t} v_{wzg}}_{\text{siła ciągu silnika}}$$

Zasada zachowania pędu – silnik odrzutowy
(przypadek szczególny)

zaniedbując siły zewnętrzne działające na rakietę $F = 0$, równanie przyjmie postać:

$$m_r \frac{dv_r}{dt} = \frac{dm_g}{dt} v_{wzg}$$

zauważmy, że: $dm_g = -dm_r$

$$m_r \frac{dv_r}{dt} = -\frac{dm_r}{dt} v_{wzg} \quad \Big| \cdot dt$$

$$dv_r = -v_{wzg} \frac{dm_r}{m_r}$$

$$\int_0^{v_r} dv_r = -\int_{m_0}^{m_r} v_{wzg} \frac{dm_r}{m_r}$$

$$v_r \Big|_0^{v_r} = -v_{wzg} \ln m_r \Big|_{m_0}^{m_r}$$

$$v_r(t) = v_{wzg} \ln \frac{m_0}{m_r}$$

rakieta spala stałą ilość gazu w jednostce czasu: $\frac{dm_r}{dt} = \mu$

więc: $m_r(t) = m_0 - \mu t$

zależność prędkości rakiety od czasu

Wzór Ciołkowskiego

$$v_r(t) = v_{wzg} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$$

Zasada zachowania pędu – silnik odrzutowy
(przypadek szczególny)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = v_{wyl}\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right)$$

$$a_x = v_{wyl}\frac{1}{\frac{m_0}{m_0 - \mu t}}\cdot\frac{m_0'\,(m_0 - \mu t) - m_0\,(m_0 - \mu t)'}{(m_0 - \mu t)^2}$$

$$a_x = v_{wyl}\frac{m_0 - \mu t}{m_0}\cdot\frac{0\,(m_0 - \mu t) - m_0\,(m_0 - \mu t)'}{(m_0 - \mu t)^2}$$

$$a_x = v_{wyl}\frac{m_0 - \mu t}{m_0}\cdot\frac{-m_0\,(m_0 - \mu t)'}{(m_0 - \mu t)^2}$$

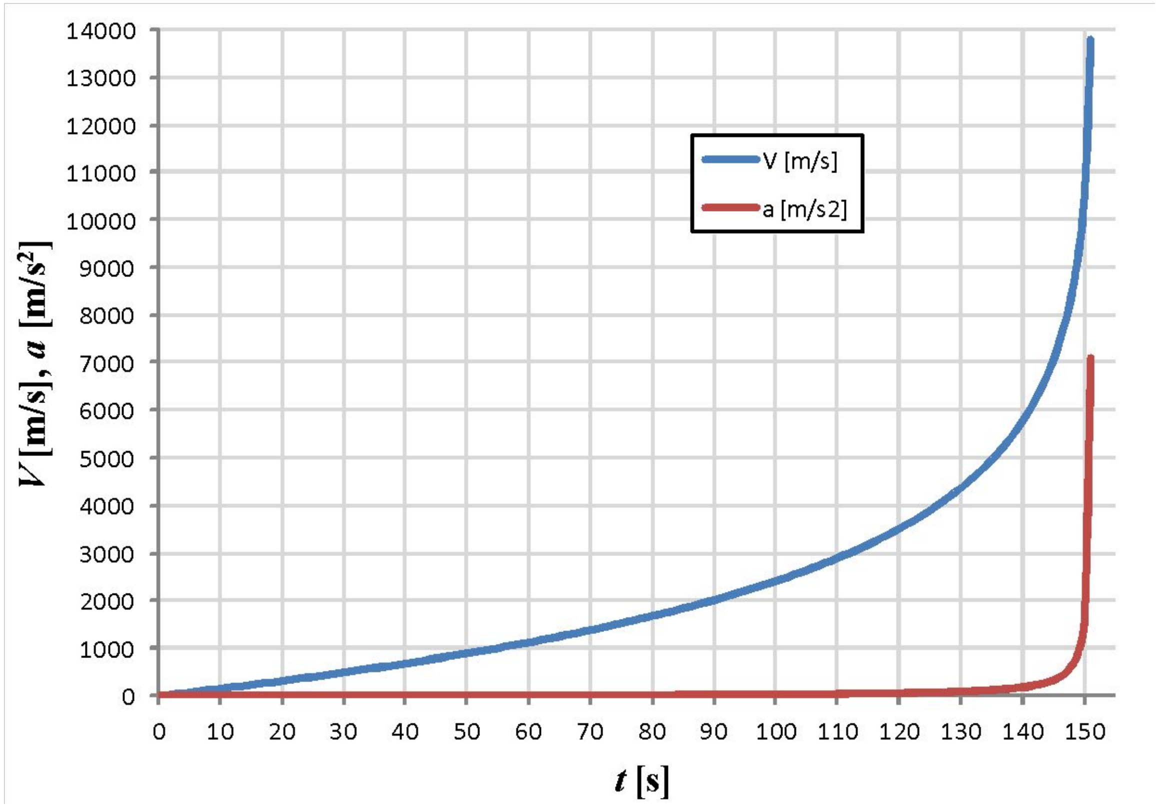
$$a_x = v_{wyl}\cdot\frac{-(m_0 - \mu t)'}{m_0 - \mu t}$$

$$a_x = v_{wyl}\cdot\frac{-(-\mu)}{m_0 - \mu t}$$

zależność przyspieszenia rakiety od czasu

$$a_x(t) = \frac{v_{wyl}\,\mu}{m_0 - \mu t}$$

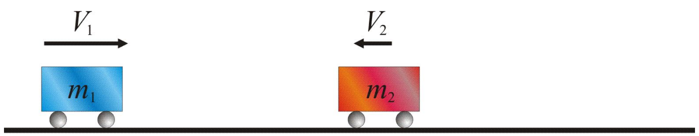
Zasada zachowania pędu – silnik odrzutowy
(przypadek szczególny)



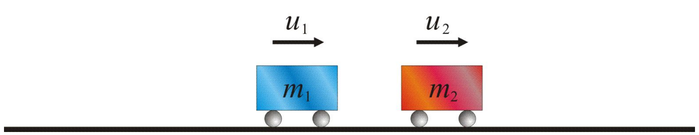
Zależność prędkości i przyspieszenia rakiety od czasu.

Zasady zachowania pędu i energii (zderzenia sprężyste)

przed



po



$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 V_1^2}{2} + \dfrac{m_2 V_2^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 V_1 - m_1 u_1 = -m_2 V_2 + m_2 u_2 \\ m_1 V_1^2 - m_1 u_1^2 = -m_2 V_2^2 + m_2 u_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (V_1 - u_1) = -m_2 (V_2 - u_2) \\ m_1 (V_1^2 - u_1^2) = -m_2 (V_2^2 - u_2^2) \end{cases}$$

$$\frac{V_1 - u_1}{(V_1 - u_1)(V_1 + u_1)} = \frac{V_2 - u_2}{(V_2 - u_2)(V_2 + u_2)}$$

$$V_1 + u_1 = V_2 + u_2$$

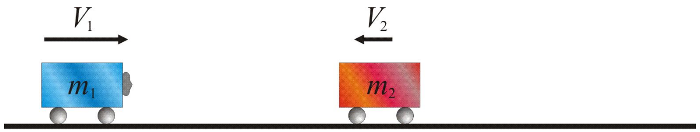
... ...

$$u_1 = \frac{2 m_2 V_2 + V_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

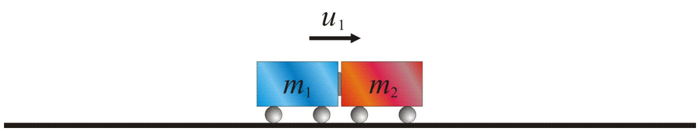
$$u_2 = \frac{2 m_1 V_1 + V_2 (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

Zasady zachowania pędu i energii (zderzenia niesprężyste)

przed



po



$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) u_1$$

$$u_1 = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$$

Popęd siły

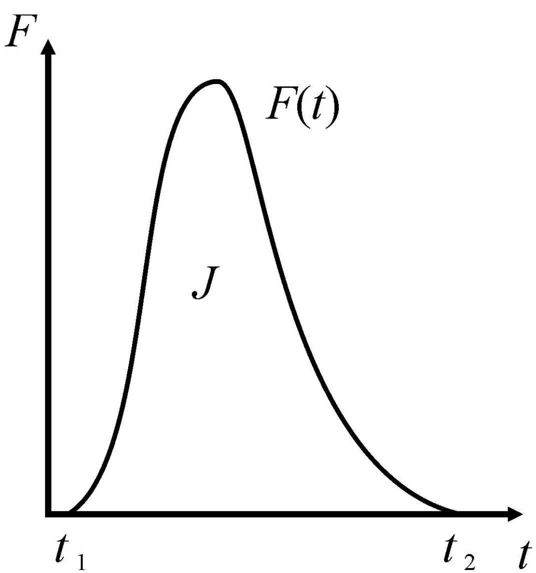
Popędem siły nazywamy zmianę pędu cząstki w czasie (np. zderzenia).

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)\,dt$$

$$\int d\vec{p} = \int \vec{F}(t)\,dt$$

$$\vec{J} = \int \vec{F}(t)\,dt$$



Środek masy

Środek masy ciała lub układu ciał to punkt, który porusza się tak, jakby była w nim skupiona cała masa układu, a wszystkie siły zewnętrzne były przyłożone w tym właśnie punkcie.

Środek masy

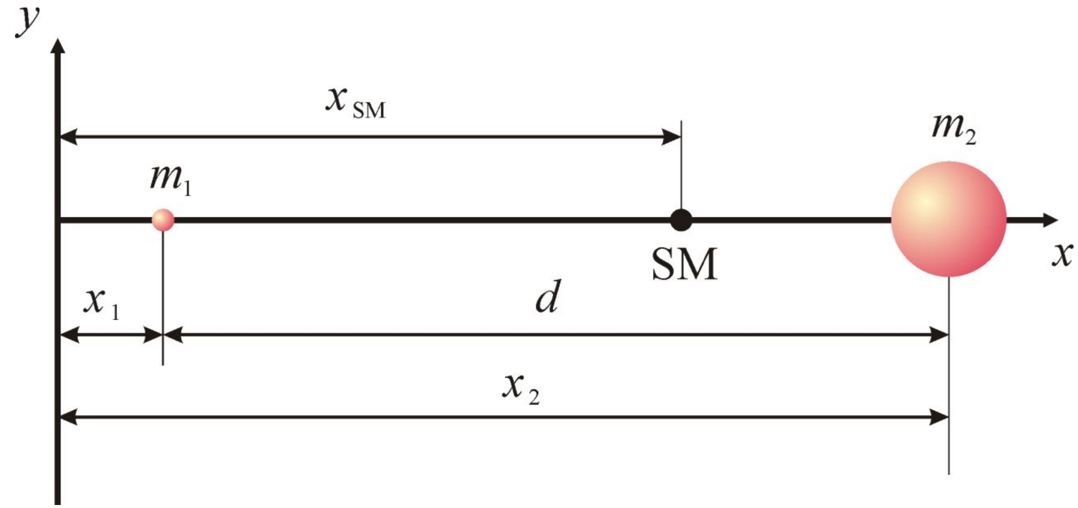
$$(x_{SM} - x_1)\,m_1 = (x_2 - x_{SM})\,m_2$$

$$x_{SM}\,m_1 - x_1\,m_1 = x_2\,m_2 - x_{SM}\,m_2$$

$$x_{SM}\,m_1 + x_{SM}\,m_2 = x_2\,m_2 + x_1\,m_1$$

$$x_{SM}\,(m_1 + m_2) = x_2\,m_2 + x_1\,m_1$$

$$x_{SM} = \frac{x_2\,m_2 + x_1\,m_1}{m_1 + m_2}$$



$$x_{SM} = \frac{x_1\,m_1 + x_2\,m_2 + x_3\,m_3 + \ldots + x_n\,m_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} = \frac{1}{M_C}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

Współrzędne punktu środka masy dla zbioru punktów dyskretnych:

$$x_{SM} = \frac{1}{M_C}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad y_{SM} = \frac{1}{M_C}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad z_{SM} = \frac{1}{M_C}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

i dla ciągłego rozkładu materii:

$$x_{SM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{SM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{SM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

dlatego, że:

$$x_{SM} = \frac{1}{M_C}\int x\rho\,dV$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M_C}{V}$$

$$\frac{1}{M_C} = \frac{1}{\rho V}$$

$$dm = \rho\,dV$$