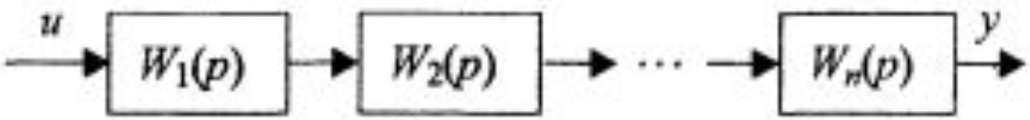
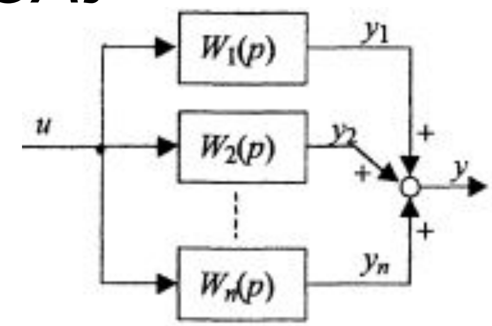
Задание 3: Передаточные функции типовых соединений звеньев САУ



$$W(p) = W_1(p)W_2(p)\ldots W_n(p).$$

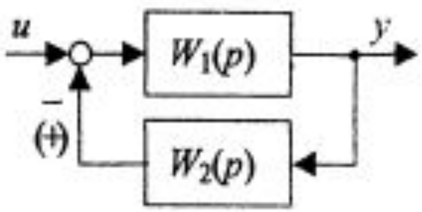


б

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + \ldots + W_n(p).$$

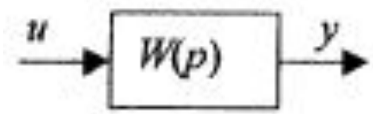
а – последовательное

б - параллельное



в

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1_{(}\pm_{)}W_1(p)W_2(p)}.$$



г

в – с обратной связью

г - эквивалентное

Передаточные функции типовых соединений звеньев САУ

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) \ldots W_n(p).$$

а – последовательное

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + \ldots + W_n(p).$$

б - параллельное

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p) W_2(p)}.$$

в – с обратной связью

Теорема Мэзона (Мейсона)

Согласно *теореме Мейсона*, передача, связывающая некоторую «входную» переменную u (обычно это внешнее воздействие) с некоторой «выходной» переменной y, определяется формулой

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_i [W_i(p)\Delta_i(p)]}{\Delta(p)}, \tag{2.4}$$

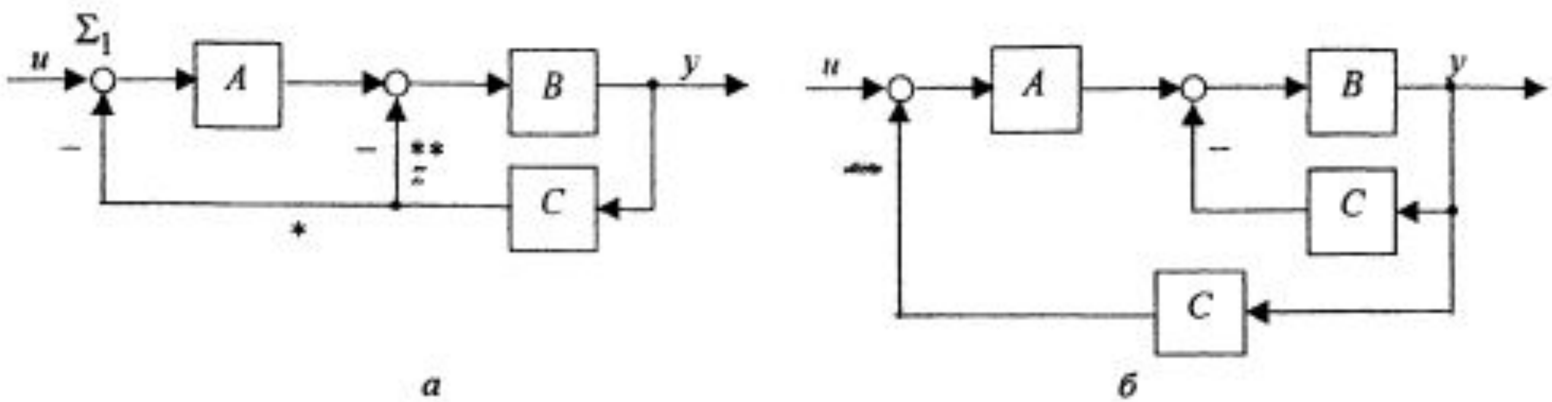
где

$$\Delta(p) = 1 - \sum W_{\text{к}1}(p) + \sum W_{\text{к}2}(p) - \sum W_{\text{к}3}(p) + \ldots; \tag{2.5}$$

$$\Delta_i(p) = 1 - \sum W_{i\text{к}1}(p) + \sum W_{i\text{к}2}(p) - \sum W_{i\text{к}3}(p) + \ldots \tag{2.6}$$

Обозначения, использованные в формулах (2.4)–(2.6), имеют следующий смысл: $W_i(p)$ – передача i-го пути от u к y; $\sum W_{\text{к}1}(p)$ – сумма передач всех контуров; $\sum W_{\text{к}2}(p)$ – сумма *произведений* передач всех не касающихся друг друга контуров, взятых по два; $\sum W_{\text{к}3}(p)$ – сумма *произведений* передач всех не касающихся друг друга контуров, взятых по три, и т. д.; $\sum W_{i\text{к}1}(p)$ – сумма передач всех контуров, не касающихся i-го пути; $\sum W_{i\text{к}2}(p)$ – сумма *произведений* передач всех контуров, не касающихся i-го пути и друг друга, взятых по два; $\sum W_{i\text{к}3}(p)$ – сумма *произведений* передач всех контуров, не касающихся i-го пути и друг друга, взятых по три, и т. д.

Эквивалентные структурные преобразования

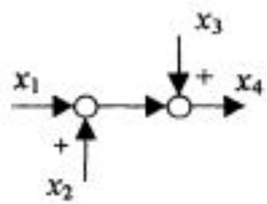
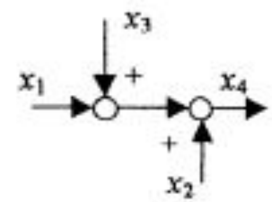
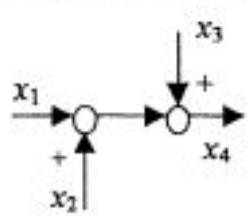
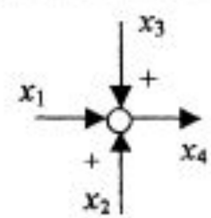
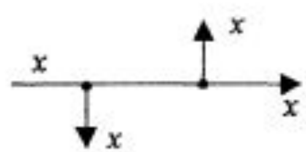
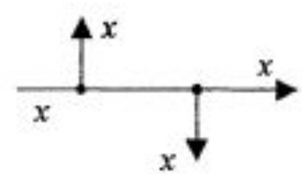


Пример структурного преобразование: а - исходная схема; б - эквивалентная схема

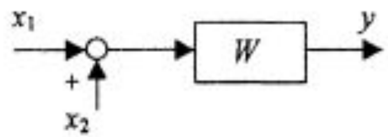
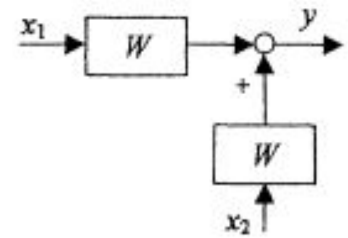
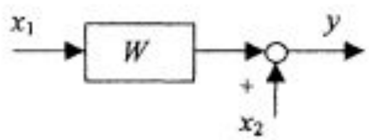
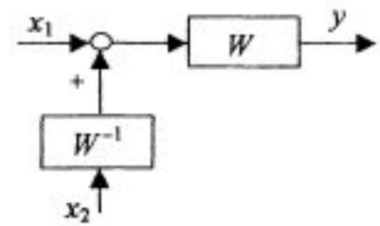
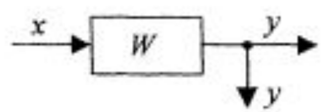
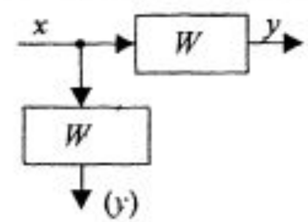
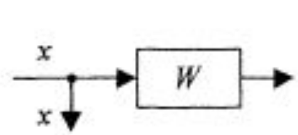
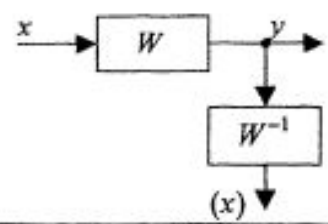
Критерий эквивалентности исходной и преобразованной схем (фрагментов): операция преобразования не должна изменять ни одной из передаточных функций Wtj(p) = Zi(p)/ Vi(p), i = 1..l , j = 1…q, связывающих каждый вход v, с каждым выходом Zj. Соблюдение условия эквивалентности при выполнении преобразований отдельных частей структурной схемы гарантирует, что и вся схема на любом этапе ее преобразования будет удовлетворять этому условию

Эквивалентные структурные преобразования

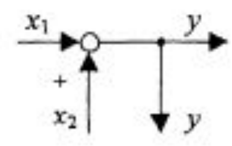
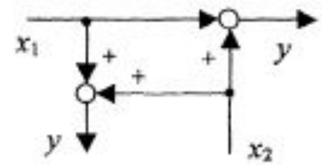
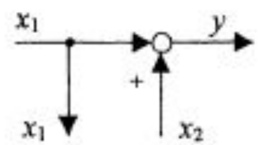
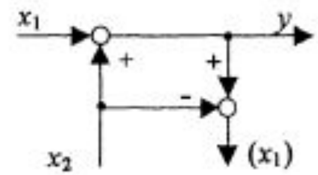
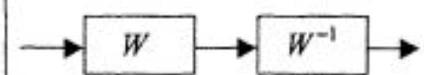
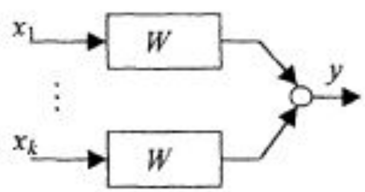
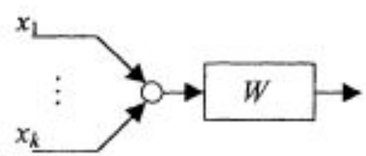
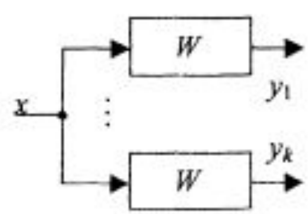
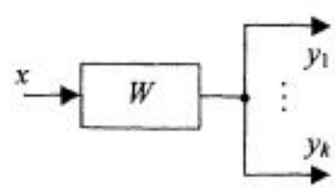
Правила выполнения структурных преобразований

№	Операция	Схема	
		исходная	эквивалентная
1	Перестановка звеньев		
2	Перестановка сумматоров		
3	Объединение и разъединение сумматоров		
4	Перестановка отводов		

Эквивалентные структурные преобразования

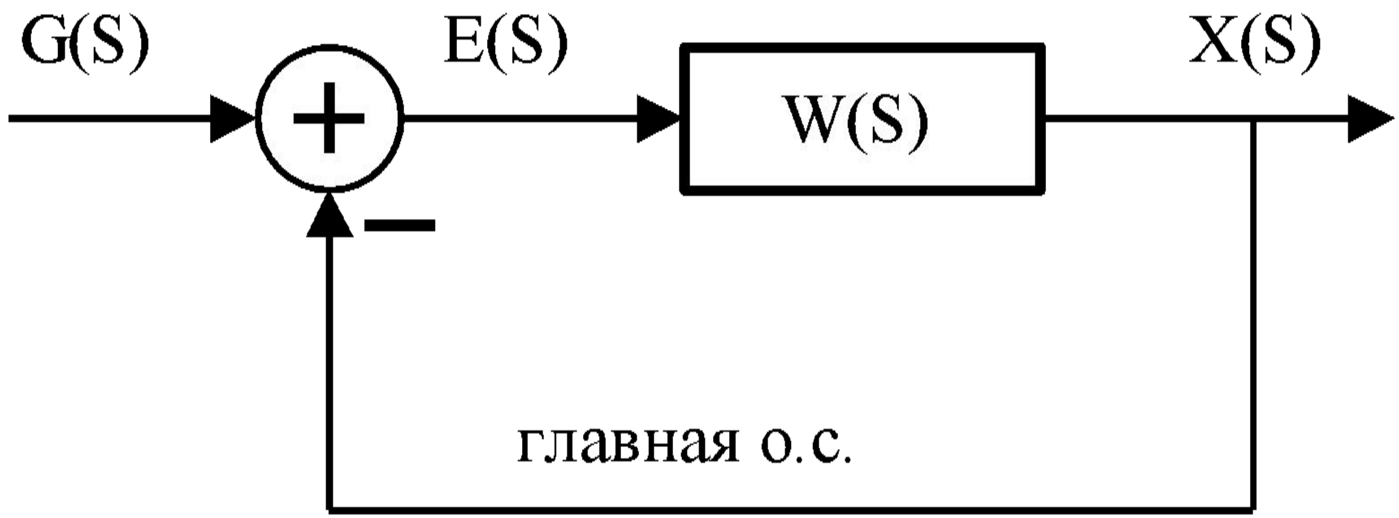
5	Перестановка звена и сумматора	*а*		
		б		
6	Перестановка звена и отвода	*а*		
		б		

Эквивалентные структурные преобразования

7	Перестановка сумматора и отвода	*а*		
		б		
8	Эквивалентирование единичной передачи			
9	Перенос общей передачи нескольких каналов через сумматор			
10	Перенос общей передачи нескольких каналов через точку разветвления			

Логарифмические частотные характеристики разомкнутых систем

Рассмотрим систему автоматического управления, структурная схема которой имеет вид



К такой структурной схеме (расчётной схеме) можно привести любую систему автоматического управления с помощью правил зования структурных схем.

Как следует из расчётной структурной схемы

$$E(s) = G(s) - X(s) \quad \text{или} \quad \varepsilon(t) = g(t) - x(t).$$

В случае, если $E(s) = G(s)$ или $\varepsilon(t) = g(t)$ для всех значений t, то говорят, что система автоматического управления разомкнута – отсутствует главная обратная связь.

Передаточная функция разомкнутой системы автоматического управления $W(s)$. Ее, как правило, можно представить в виде

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s)$$

где $W_i(s)$ - передаточная функция элементарных звеньев.

В этом случае модули и аргументы передаточных функций системы и звеньев

$$A(\omega)=\left|W(j\omega)\right|; \quad A_i(\omega)=\left|W_i(j\omega)\right|;$$

$$\varphi(\omega)=\arg W(j\omega); \quad \varphi_i(\omega)=\arg W_i(j\omega)$$

связаны между собой соотношением

$$A(\omega)=\prod_{i=1}^{n} A_i(\omega); \quad \varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\omega).$$

Отсюда следует, что логарифмические амплитудно-частотные характеристики разомкнутой системы определяются как

$$Lm(\omega) = Lm\left|W(j\omega)\right| = Lm\prod_{i=1}^{n}\left|W_i(j\omega)\right| =$$

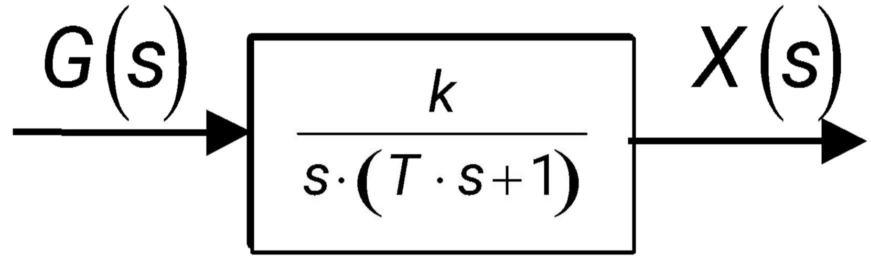
$$= \sum_{i=1}^{n} Lm\left|W_i(j\omega)\right| = \sum_{i=1}^{n} 20\lg A_i(\omega)$$

Из сказанного следует, что для построения логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы автоматического управления нужно:

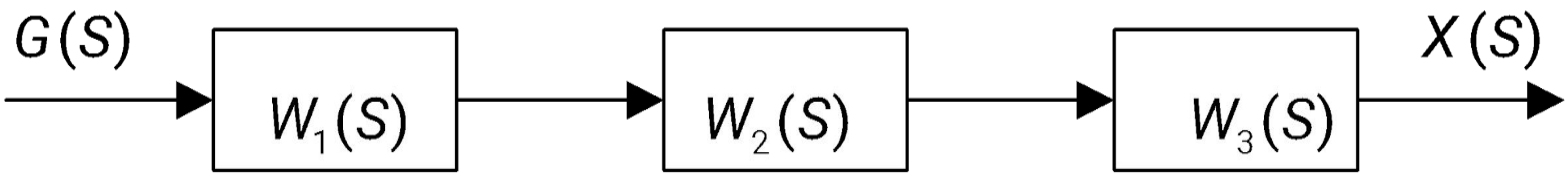
1. передаточную функцию разомкнутой системы представить в виде произведения элементарных звеньев;
2. построить логарифмические частотные характеристики элементарных звеньев системы, и затем эти характеристики графически суммировать.

Пример 5. Построить логарифмические частотные характеристики системы с передаточной функцией

$$W(s)=\frac{k}{s\cdot(T\cdot s+1)}$$



Решение. Передаточную функцию разомкнутой системы $W(s)$ можно представить в виде последовательного соединения элементарных звеньев:



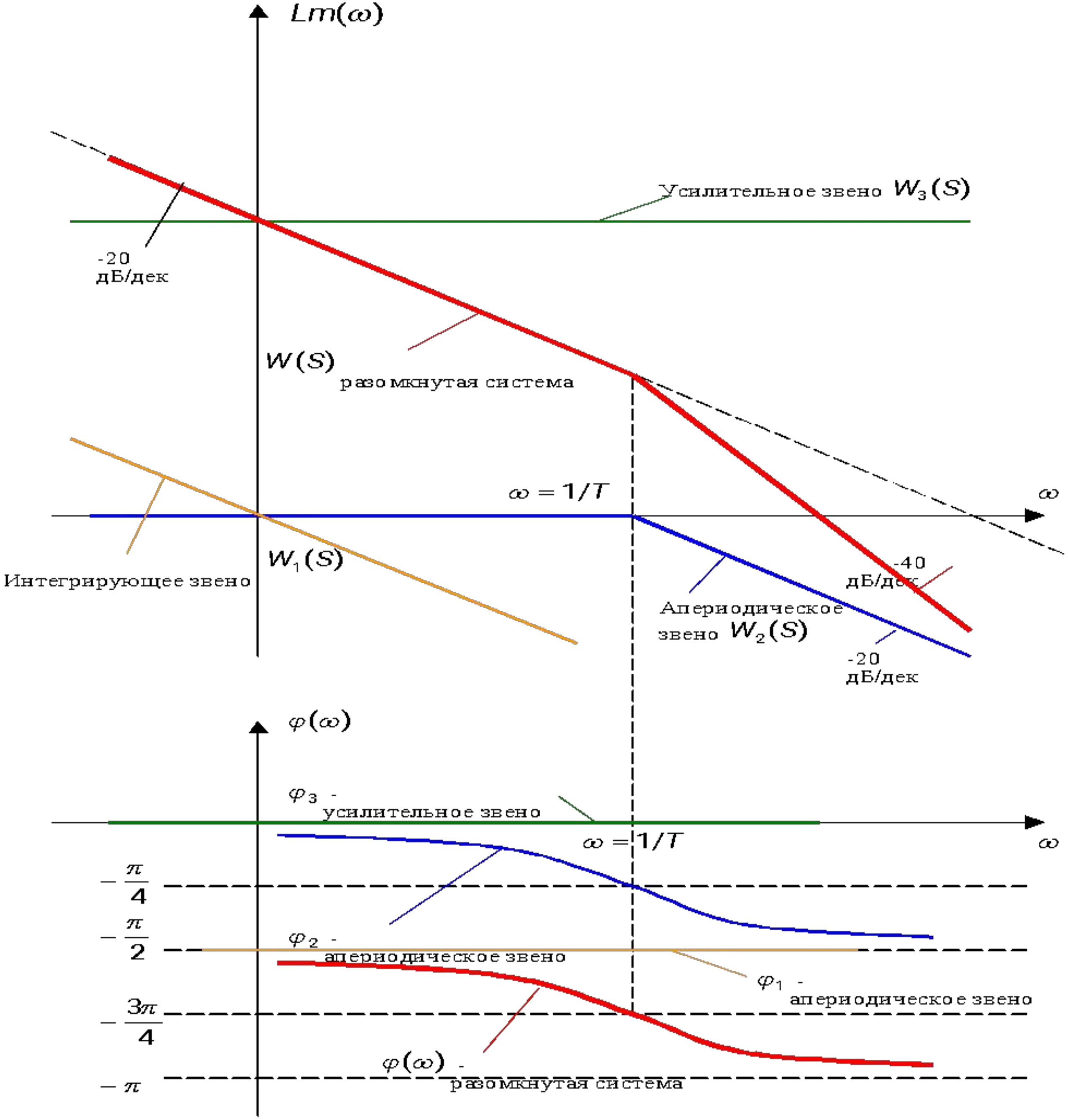
1. Интегрирующего звена с передаточной функцией $W_1(s)=\dfrac{1}{s}.$

2. Апериодического звена
с передаточной функцией $W_2(s)=\dfrac{1}{T\cdot s+1}.$

3. Усилительного звена
с передаточной функцией $W_3(s)=k.$

Затем строим логарифмические частотные характеристики каждого из этих звеньев и производим их графическое сложение (см. рис.1).

Можно предположить несколько иной, более простой порядок построения логарифмической амплитудно-частотной характеристики разомкнутой системы, как в *примере 6*



$Lm(\omega)$
Усилительное звено $W_3(S)$
-20 дБ/дек
$W(S)$
разомкнутая система
$\omega = 1/T$
ω
$W_1(S)$
Интегрирующее звено
-40 дБ/дек
Апериодическое звено $W_2(S)$
-20 дБ/дек
$\varphi(\omega)$
φ_3 - усилительное звено
$\omega = 1/T$
ω
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$
φ_2 - апериодическое звено
φ_1 - апериодическое звено
$-\frac{3\pi}{4}$
$\varphi(\omega)$ - разомкнутая система
$-\pi$

Рис. 1.

Пример 6 Построить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику системы, передаточная функция которой

$$W(s)=\frac{k\cdot(\tau\cdot s+1)}{s\cdot(T_1\cdot s+1)\cdot(T_2^2\cdot s^2+2\cdot\xi\cdot T\cdot s+1)}$$

Решение. Представим передаточную функцию разомкнутой системы W(s) в виде

$$W(s)=\left[k\right]\cdot\left[\frac{1}{s}\right]\cdot\left[\frac{1}{T_1 s+1}\right]\cdot\left[\tau\cdot s+1\right]\cdot\left[\frac{1}{T_2^2\cdot s^2+2\cdot\xi\cdot T\cdot s+1}\right]=$$

$$=W_0(s)\cdot W_1(s)\cdot W_2(s)\cdot W_3(s)\cdot W_4(s)$$

Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика состоит из пяти асимптотических логарифмических амплитудно-частотных характеристик пяти элементарных звеньев.

$W_0(s)=k$ - усилительное звено.

$W_1(s)=\frac{1}{s}$ - интегрирующее звено.

$W_2(s)=\frac{1}{T_1 \cdot s+1}$ - апериодическое звено.

$W_3(s)=\tau \cdot s+1$ - дифференцирующее (форсирующее) звено 1-го порядка.

$$W_4(s)=\frac{1}{T_2^2\cdot s^2+2\cdot\xi\cdot T\cdot s+1}$$ - колебательное звено.

Определим сопрягающие частоты:

$$\omega_1=\frac{1}{T_1};\ \ \omega_2=\frac{1}{\tau};\ \ \ \omega_3=\frac{1}{T_2}.$$

Пусть постоянные времени таковы, что

$$\omega_1<\omega_2<\omega_3$$

Отметим эти частоты на оси ω (частот). Напомним, что на этой оси масштаб логарифмический.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется уравнением:

$$Lm(\omega) = 20 \cdot \lg k - 20 \cdot \lg \omega - 20 \cdot \lg \sqrt{(T_1\omega)^2 + 1} +$$

$$+ 20 \cdot \lg \sqrt{(\tau\omega)^2 + 1} - 20 \cdot \lg \sqrt{(1 - T_2^2\omega^2)^2 + (2\xi T_2\omega)^2}$$

Напоминание. При построении асимптотической логарифмической амплитудно-частотной характеристики элементарных звеньев при частотах, меньших сопрягающей частоты, под корнем оставляют только единицу, а остальными членами пренебрегают. При частотах, больших сопрягающей частоты, оставляют члены с наивысшей степенью ω.

В рассматриваемом примере при $\omega_1 < \omega_2$ уравнение первой асимптоты будет

$$Lm(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$$

Согласно этому уравнению, первую асимптоту проводят через точку с координатами $\{1; 20\lg k\}$ с наклоном $\{-20 дБ / дек\}$ (см. рис. 2).

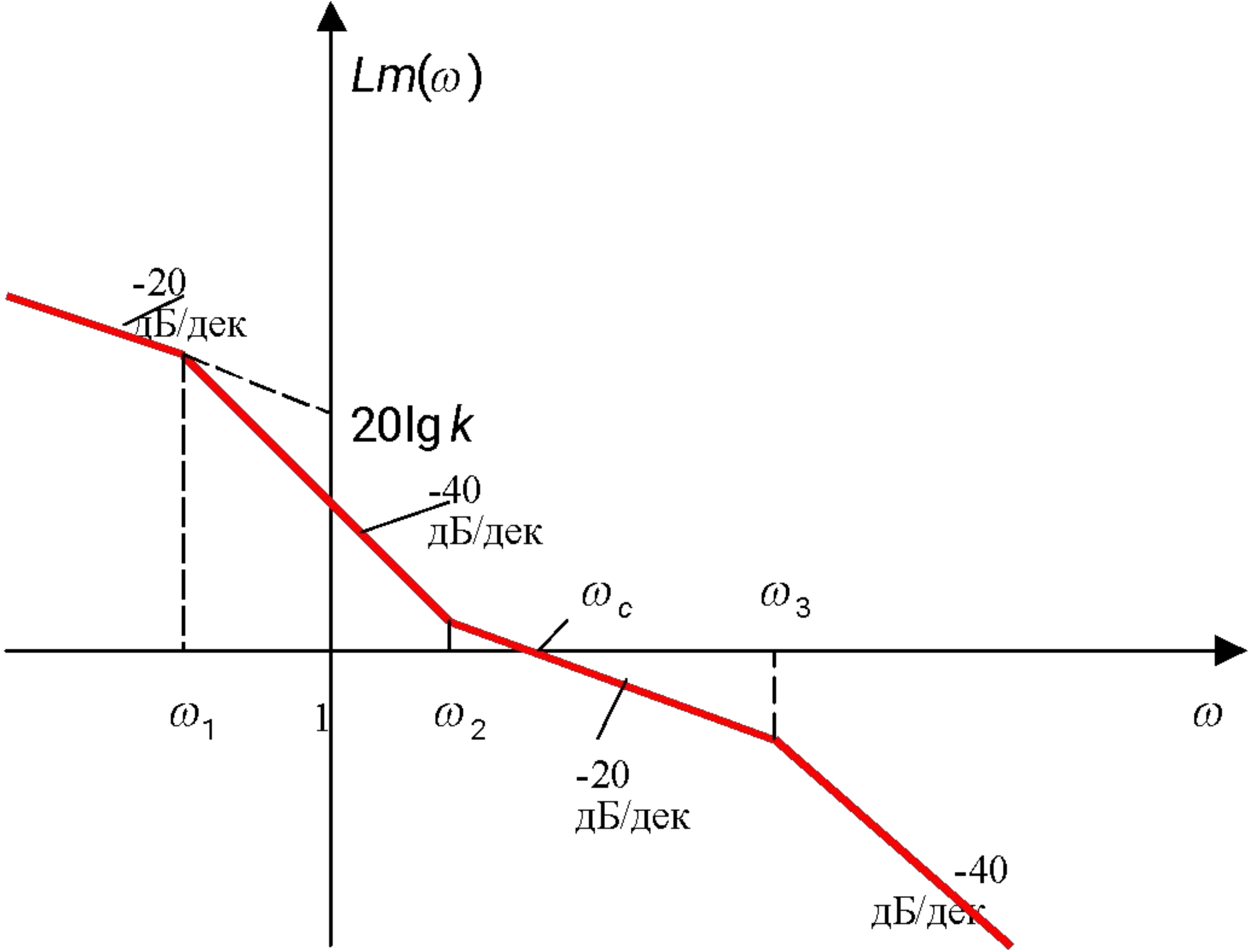
Она оканчивается на первой сопрягающей частоте

$$\omega = \omega_1$$

При $\omega_1 \le \omega < \omega_2$ аналогично имеем

$$Lm(\omega) = 20\lg k - 20\lg \omega - 20\lg T_1\omega$$

Это уравнение второй асимптоты.



$Lm(\omega)$
-20
дБ/дек
$20\lg k$
-40
дБ/дек
ω_c
ω_3
ω_1
1
ω_2
ω
-20
дБ/дек
-40
дБ/дек

Рис. 2.

Её наклон изменился на $\{-20\ \partial Б / \partial ек\}$ и обусловлен апериодическим звеном.

Вторую асимптоту проводят от конца первой асимптоты до второй сопряжённой частоты согласно ее уравнению с наклоном $\{-40\ \partial Б / \partial ек\}$

При $\omega_2 \le \omega < \omega_3$ имеем

$$Lm(\omega) = 20\lg k - 20\lg\omega - 20\lg T_1\omega + 20\lg\tau\omega$$

Это уравнение третьей асимптоты. Её наклон изменяется на +20 дБ/дек и обуславливается форсирующим звеном первого порядка.

Третью асимптоту проводят от конца второй асимптоты до третьей сопрягающей частоты с наклоном (-20 дБ/дек).

При $\omega > \omega_3$ имеем

$$Lm(\omega) = 20\lg k - 20\lg\omega - 20\lg T_1\omega + 20\lg\tau\omega - 20\lg T_1^2\omega^2$$

Это уравнение последней, четвертой асимптоты. Её наклон изменяется по отношению к третьей асимптоте на $\{-40 \;\; дБ/дек\}$ и обуславливается колебательным звеном.

Теперь можно сформулировать общее правило построение асимптотической амплитудно-частотной характеристики системы с передаточной функцией

$$W(s)=\prod_{i=1}^{n} W_i(s)$$

где $W_i(s)$ - передаточная функция элементарных звеньев.

Правило построения асимптотических амплитудно-частотных характеристик разомкнутых систем автоматического управления.

1. Передаточная функция разомкнутой системы автоматического управления имеет вид:

$$W(s)=\frac{b_0 \cdot s^m+\ldots+b_m}{a_0 \cdot s^n+\ldots+a_n}$$

2. Представить передаточную функцию W(s) разомкнутой системы управления в виде

$$W(s)=\prod_{i=1}^{n} W_i(s)$$

где $W_i(s)$ - передаточная функция i - го элементарного звена.

3. Определить сопрягающие частоты и значение $20lgk$ и наносят значения сопрягающих частот на ось ω и отмечают точку с координатами $\{1;20\lg k\}$.

4. Через точку с координатами $\left\{1;20\lg k\right\}$ проводят первую асимптоту с наклоном $\left\{-\nu\cdot 20\right\}$ дБ/дек до первой сопрягающей частоты.

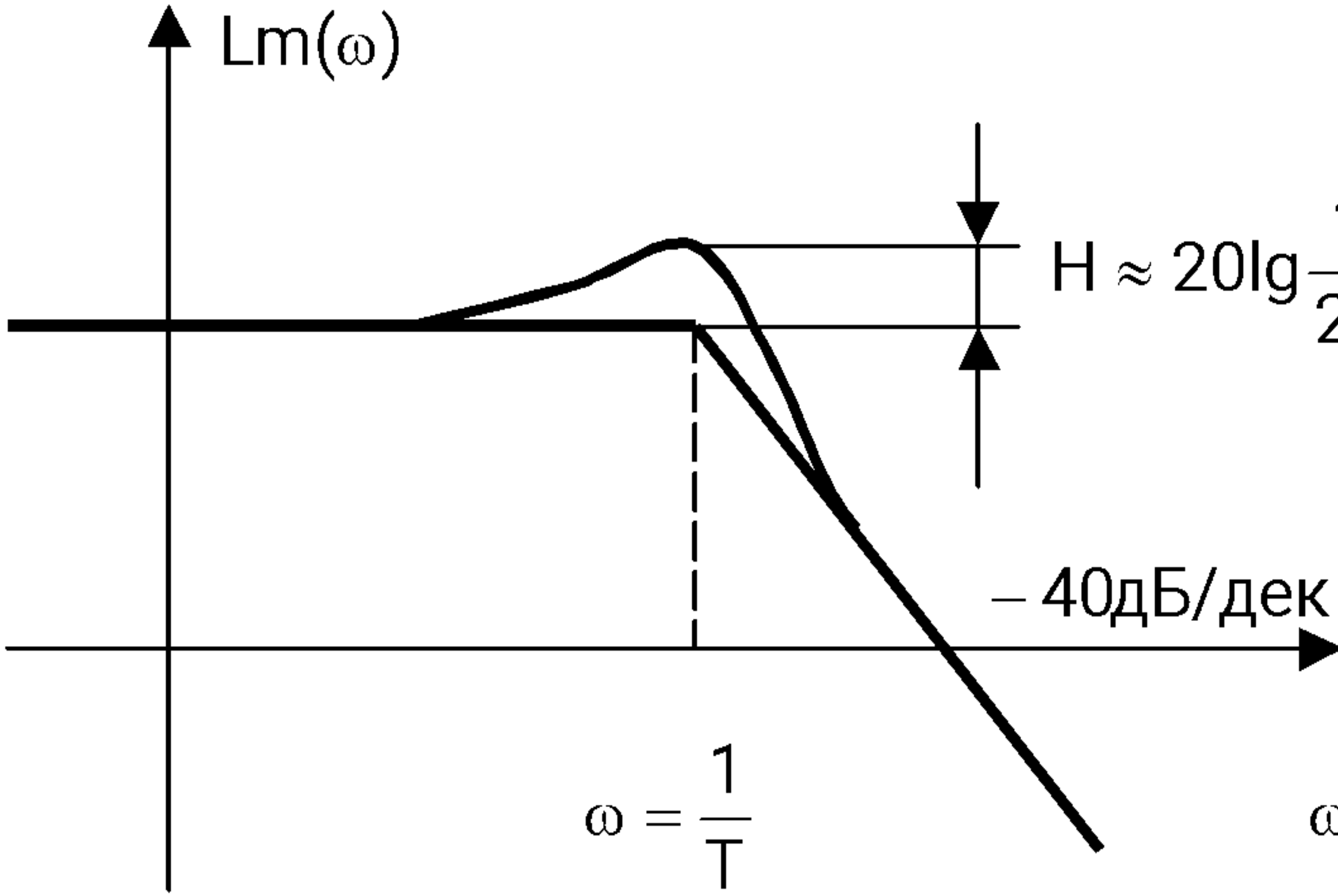
5. Проводят вторую асимптоту от правого конца первой до второй сопрягающей частоты. Её наклон изменяется на $\left\{\pm 20\ \ \partial Б/дек\right\}$ или на $\left\{\pm 40\ \ \partial Б/дек\right\}$ в зависимости от того, является ли сопрягающая частота – сопрягающей частотой апериодического, дифференцирующего звена первого порядка и т.п.

6. Строят каждую последующую асимптоту аналогично второй. Изменение наклона (i+1)-ой асимптоты зависит от того, сопрягающей частотой какого элементарного звена является ω_i.

Если какая-либо сопрягающая частота является кратной и ее кратность равна μ (имеется μ одинаковых элементарных звеньев), то изменение наклона при этой частоте в μ раз больше, чем при соответствующей простой частоте.

Для колебательных звеньев необходимо выполнить поправки в соответствии с графиками, шаблонами и т.п., можно по формуле:

$$H \approx 20\lg\frac{1}{2\xi}$$


Lm(ω)
H ≈ 20lg 1/2ξ
– 40дБ/дек
ω = 1/T
ω