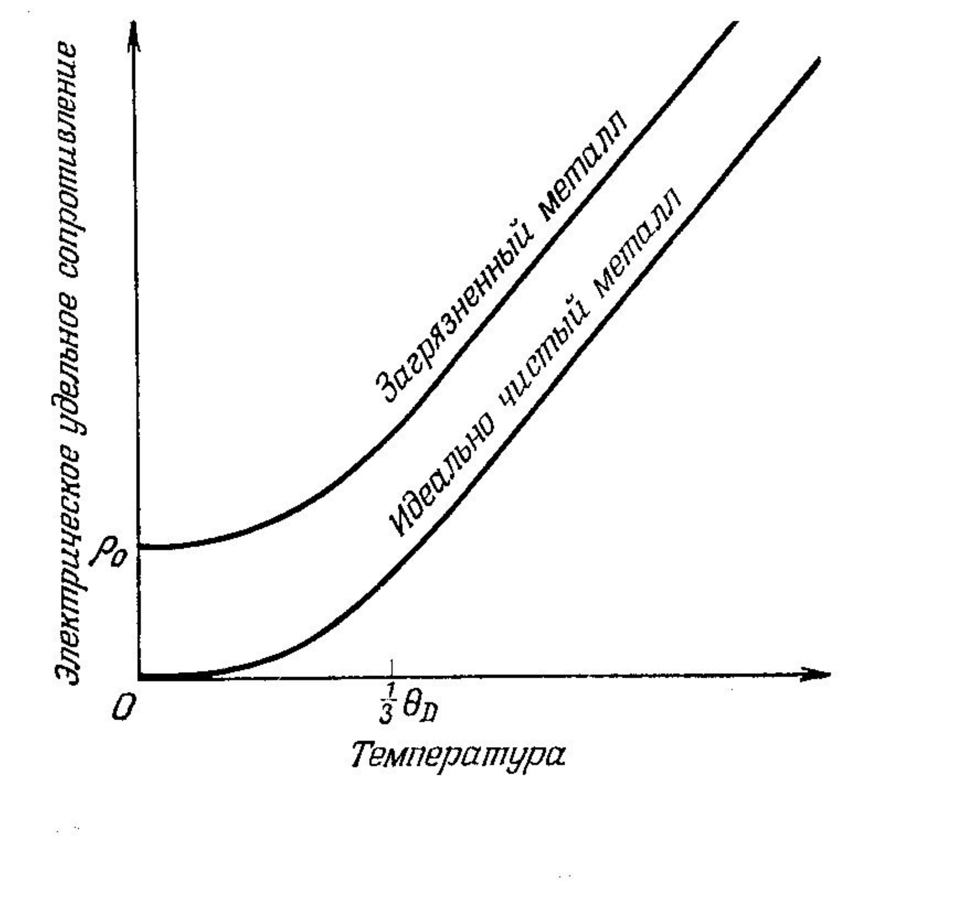
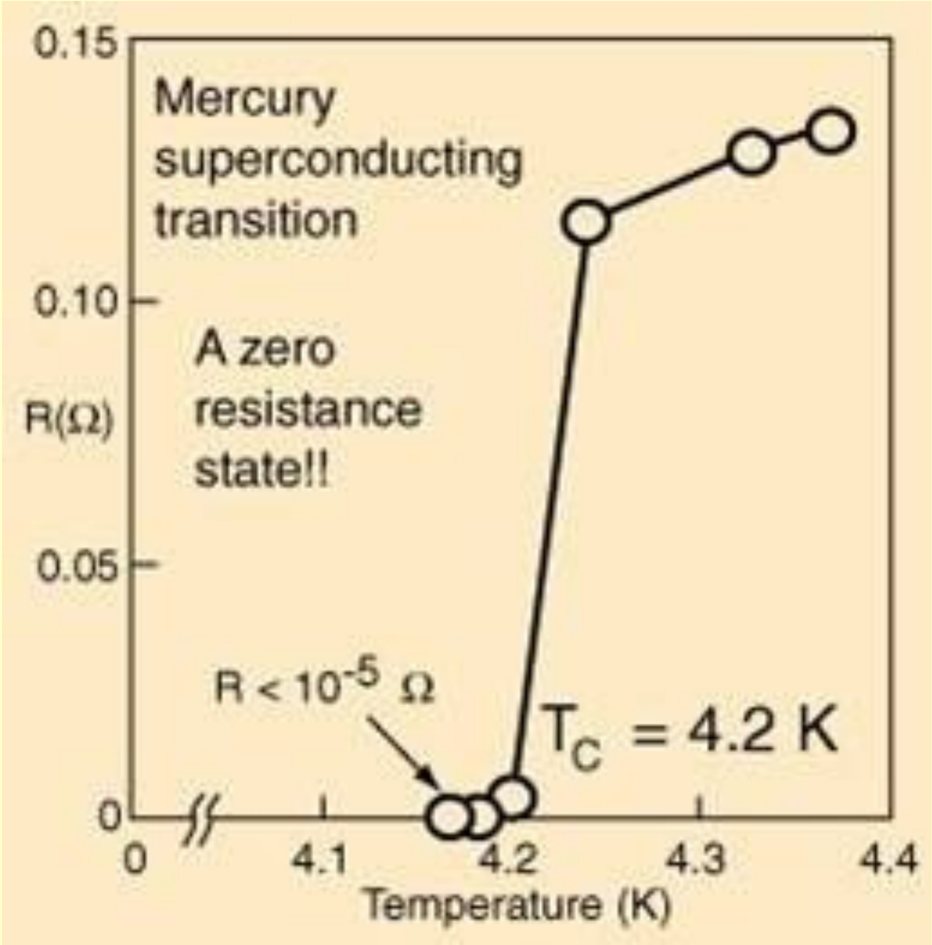
Тема 7.

Основы теории сверхпроводимости

Классическая теория проводимости



Хейке Камерлинг-Оннес



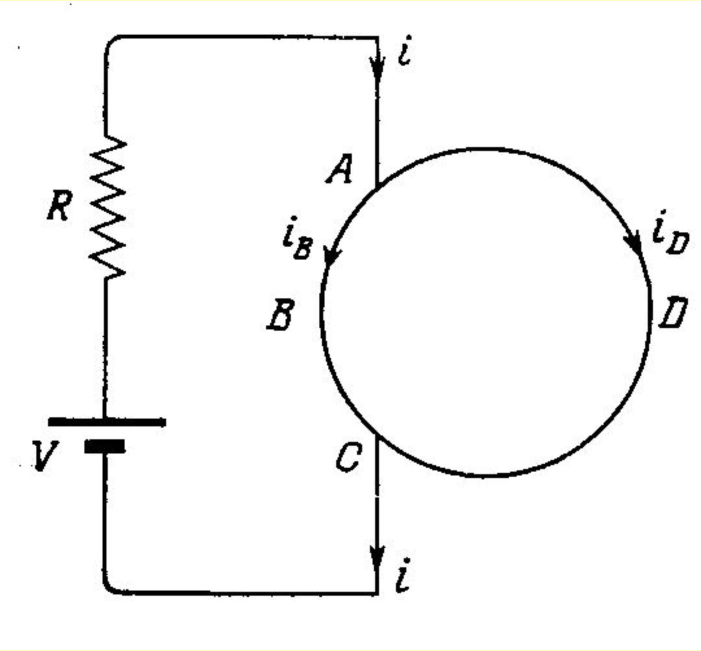
1911 г. сопротивление ртути

Сопротивление постоянному току

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{LI^2}{2}\right] = RI^2 \rightarrow \frac{dI}{I} = \frac{R}{L}dt$$

$$\ln\left[\frac{I}{I_0}\right] = \frac{R}{L}t \rightarrow I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

D. Quinn, W. Ittner JAP 33, 748 (1962) **$\rho < 4 \cdot 10^{-25}$ Ом·м**



$$L_1\frac{dI_1}{dt} = L_2\frac{dI_2}{dt}$$

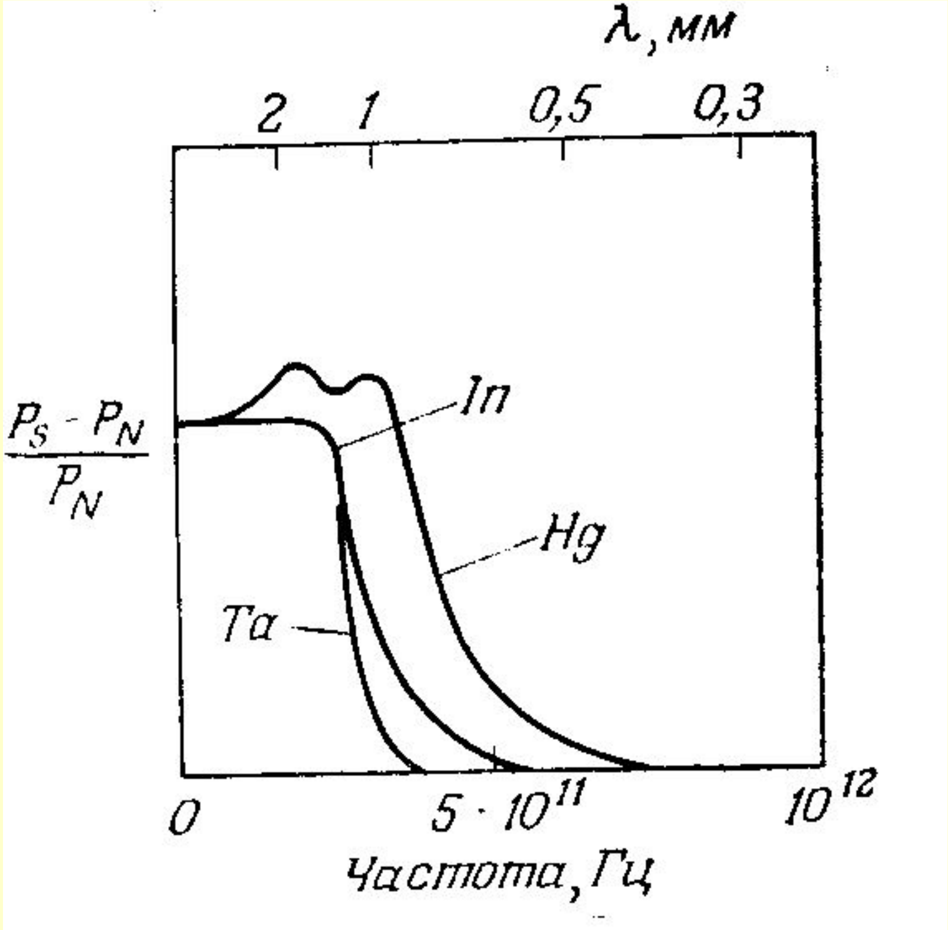
$$L_1I_1 = L_2I_2 + const$$

$$I_1 = I_2 = 0, при \; t = 0$$

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{L_2}{L_1}} \qquad const = 0$$

Сопротивление переменному току

$$R_{\sim} > 0$$

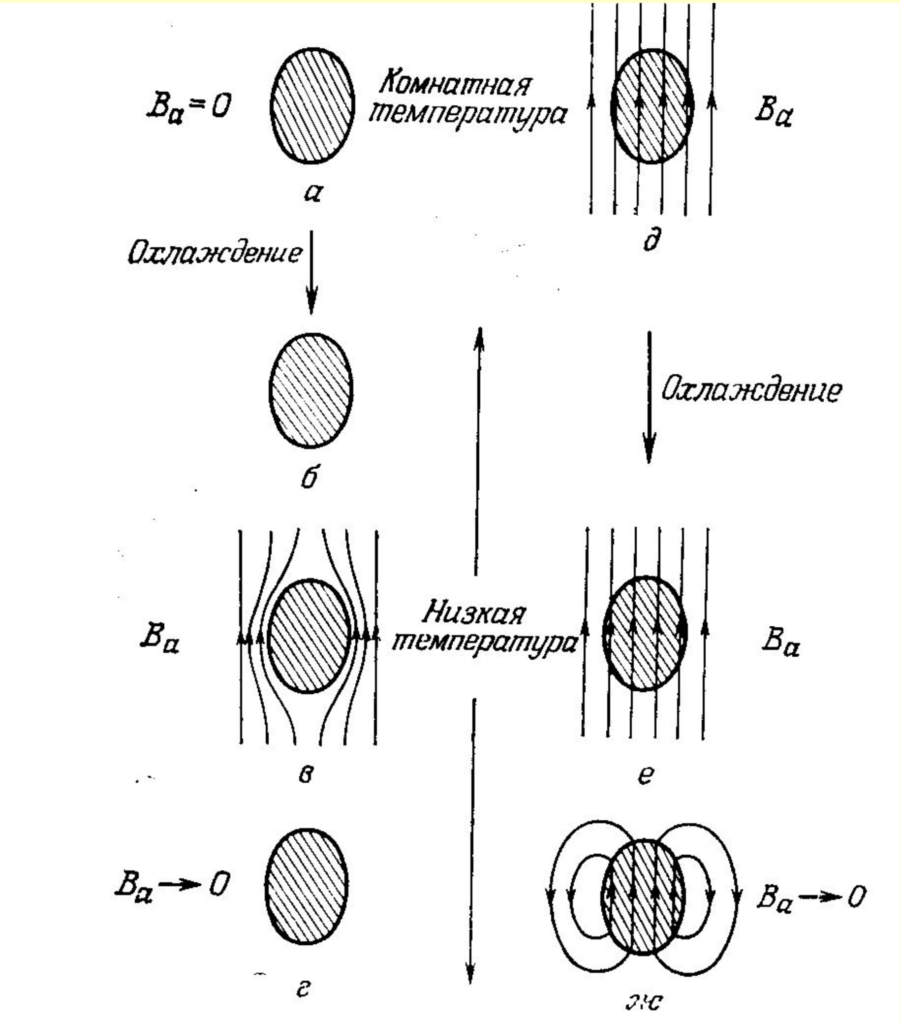


$$R_S \xrightarrow{\omega \to \omega_c} R_N$$

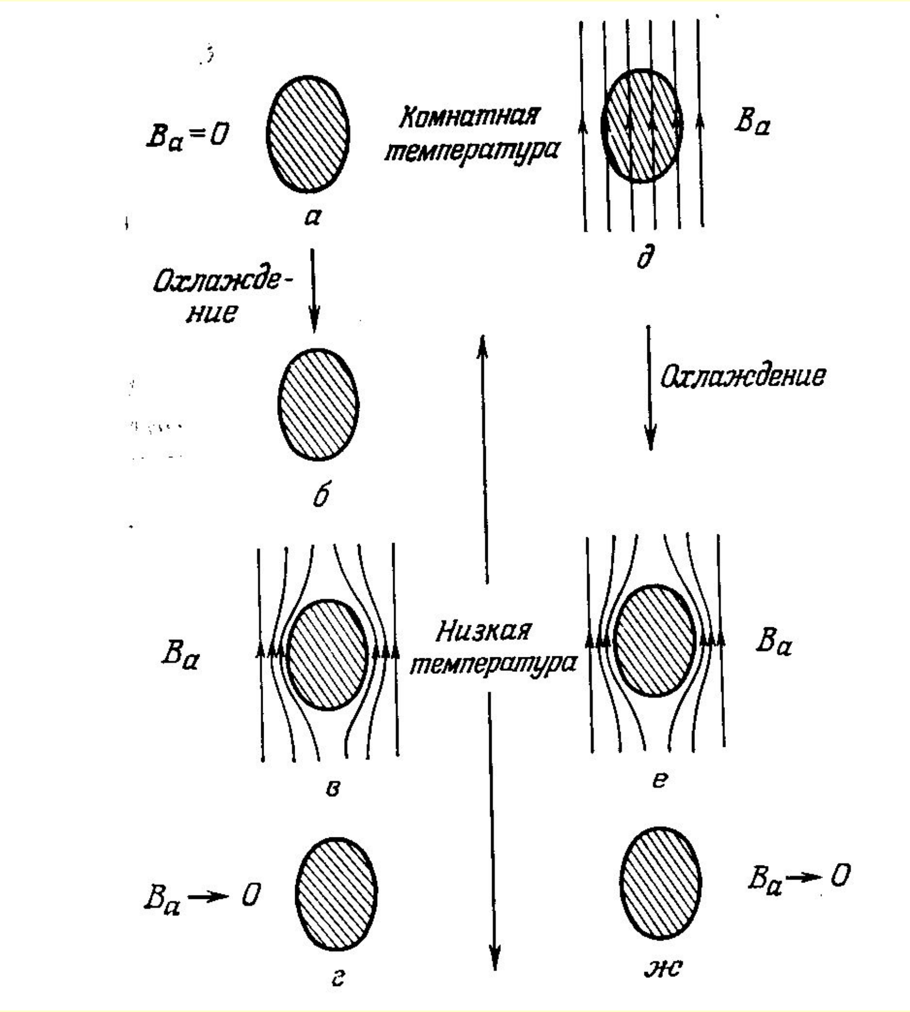
Порог поглощения

$\omega_c \approx 4 \cdot kT_c/$□

Эффект Мейсснера - Оксенфельда



Идеальный проводник



Сверхпроводник

Электродинамика идеальных проводников

$$J_s = e \cdot v_s \cdot n_e \qquad m_e \frac{dv_s}{dt} = e \cdot E \qquad \frac{dJ_s}{dt} = \frac{e^2 \cdot n_s \cdot E}{m_e}$$

$$\boxed{\frac{dB}{dt} = -rot(E)} \qquad \boxed{rot(H) = J + \frac{dD}{dt}} \qquad \boxed{div(B) = 0}$$

$$\mu = 1$$

$$rot(B) = \mu_0 \left[J_s + \frac{dD}{dt} \right] \qquad J_s \overset{\omega \to 0}{>>} \frac{dD}{dt}$$

$$\frac{dB}{dt} = -rot(E)$$

$$\frac{m_e}{e^2 \cdot n_s} \frac{dJ_s}{dt} = E$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{m_e}{e^2 \cdot n_s} rot\left(\frac{dJ_s}{dt}\right)$$

$$rot(B) = \mu_0 J_s$$

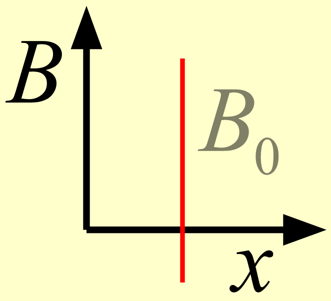
$$\frac{dB}{dt} = -\frac{m_e}{e^2 \cdot n_s \cdot \mu_0} rot\left(rot\left(\frac{dB}{dt}\right)\right)$$

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{m_e}{e^2 \cdot n_s \cdot \mu_0} rot\left(rot\left(\frac{dB}{dt} \right) \right)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{m_e}{e^2 \cdot n_s \cdot \mu_0}} \qquad \frac{dB}{dt} = -\alpha \cdot rot\left(rot\left(\frac{dB}{dt} \right) \right)$$

$$rot\left(rot\left(\frac{dB}{dt} \right) \right) = \nabla div\left(\frac{dB}{dt} \right) - \Delta\left(\frac{dB}{dt} \right)$$

$$\frac{dB}{dt} = \alpha \cdot \Delta\left(\frac{dB}{dt}\right) \;\rightarrow\; \Delta\left(\frac{dB}{dt}\right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dB}{dt}$$



$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{dB}{dt} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dB}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dB}{dt} = \frac{dB_0}{dt} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)}$$

Теория Лондонов

$$\Delta B = \frac{B}{\alpha}$$

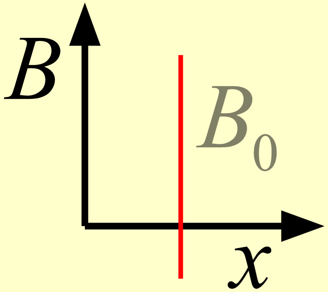
$$\boxed{B = B_0 \cdot \exp(-\frac{x}{\sqrt{\alpha}})}$$

$$B = \frac{m_e}{e^2 \cdot n_s} rot\left(J_s\right)$$

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_e}{e^2 \cdot n_s \cdot \mu_0}}$$

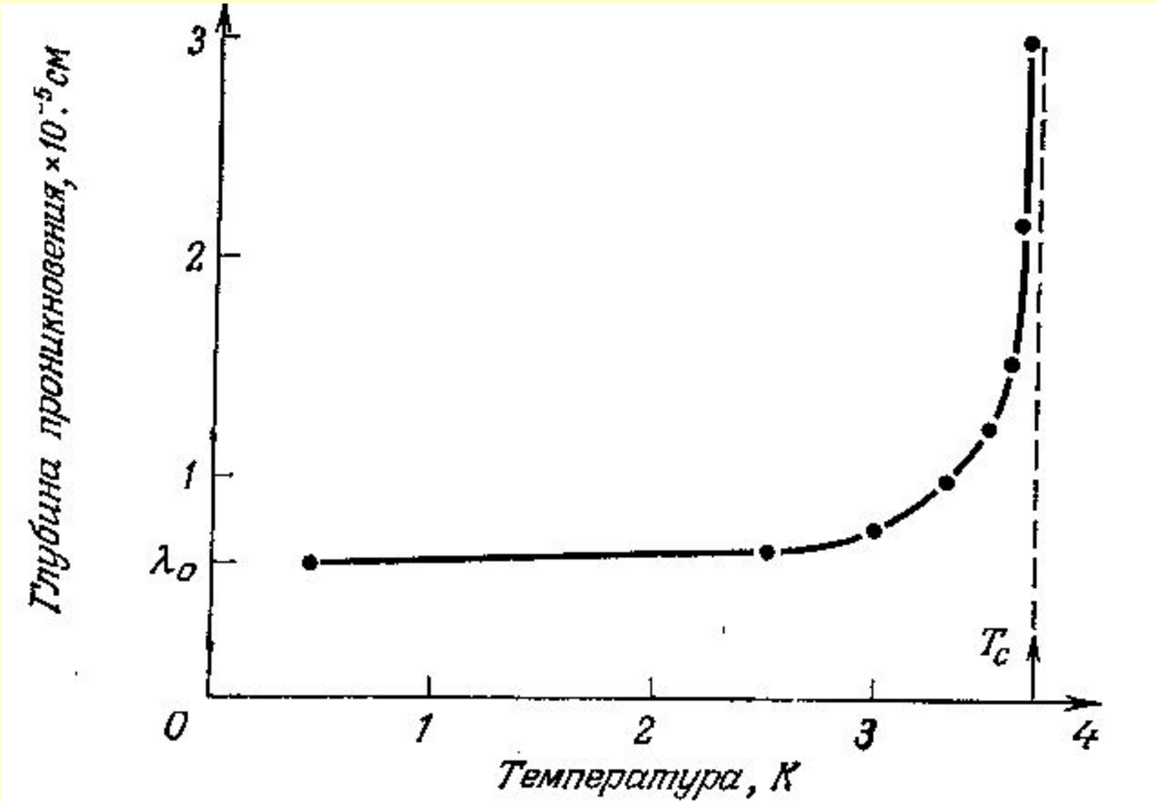
$$\frac{dJ_s}{dt} = \frac{e^2 \cdot n_s E}{m_e}$$

Элем.	Al	Cd	In	Nb	Pb	Sn	Tl
λ_L, Å	500	1300	640	470	390	510	920



$$J = \left[\frac{B_0}{\mu_0 \cdot \lambda_L}\right] \cdot \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right) = J_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right)$$

$$-\frac{dB}{dx} = \mu_0 J_y$$

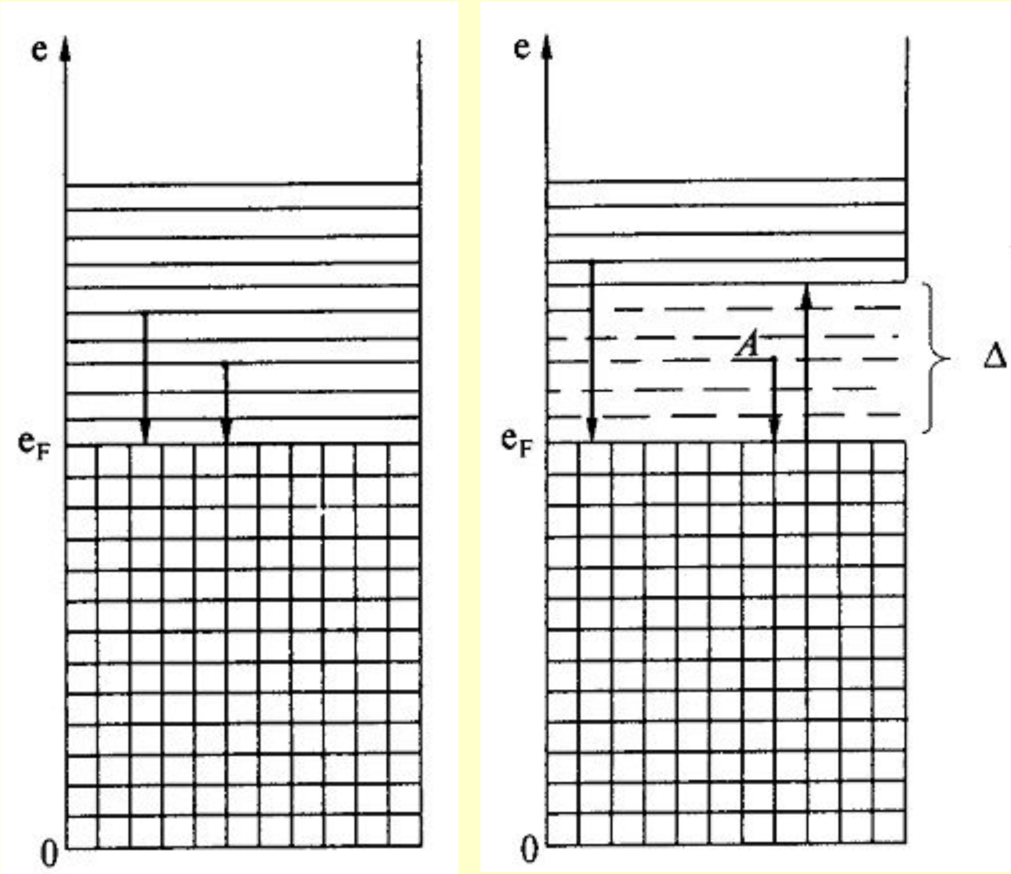


$$rot\left(B\right) = \mu_0 J_s$$

$$B << B_c$$

$$T << T_c$$

$$\lambda_L(T) = \lambda_L(0)\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}}$$



$$\varepsilon_F = \frac{m_e V_F^2}{2}$$

$$J_s = e \cdot v_s \cdot n_e$$

$$0 < J_s < J_c = e \cdot V_c \cdot n_e$$

$$0 < v_s < V_c$$

$$0 < m_e V_F v_s < m_e V_F V_c$$

$$\frac{m_e (V_F + v_s)^2}{2} - \frac{m_e V_F^2}{2} \approx m_e V_F v_s \qquad \Delta \approx m_e V_F V_c$$

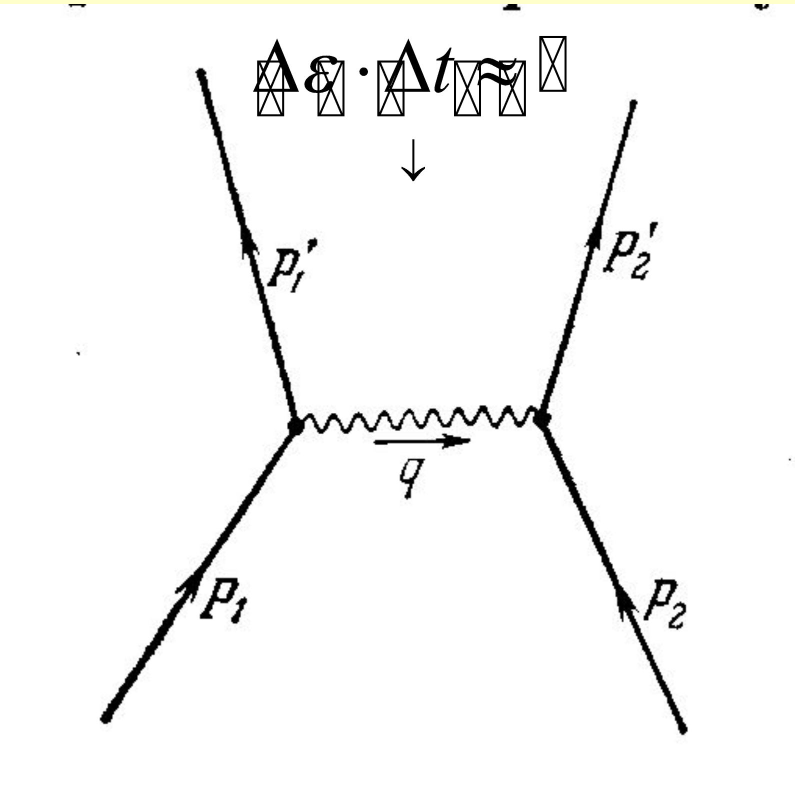
1) Критическая температура разрушения сверхпроводимости T_c составляет несколько Кельвинов, следовательно, тепловая энергия kT_c необходимая для разрушения взаимодействия электронов имеет порядок величины 10^{-4} –10^{-5} эВ.

2) Тоже значение энергии получается из частотной зависимости поглощения электромагнитных волн (Порог поглощения 10^{10} - 10^{11} Герц).

3) И, наконец, эту энергию можно получить из термодинамических соображений. Разница между свободными энергиями металла и сверхпроводника, приходящаяся на 1 см^3, равна $H_c^2/8\pi$. Подставляя в эту формулу типичное значение критического поля $H_c=10^3$ эрстед, мы получаем $H_c^2/8\pi \sim 10^5$ эрг/см^3. В одном кубическом сантиметре содержится $\sim 10^{22}$ электронов, значит, на один электрон приходится энергия 10^{-17} эрг $\sim 6 \times 10^{-5}$ эВ.

Электрон-фононное взаимодействие

Фрёлиховское взаимодействие – 1950 г.



$$q = \frac{\hbar\omega_q}{v_{зв}}$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_1' < \hbar\omega_D$$

притяжение

Изотопический эффект

$$\boxed{T_c \approx \sqrt{M_I}}$$

$$p_1' + q = p_1 \quad p_2 + q = p_2'$$

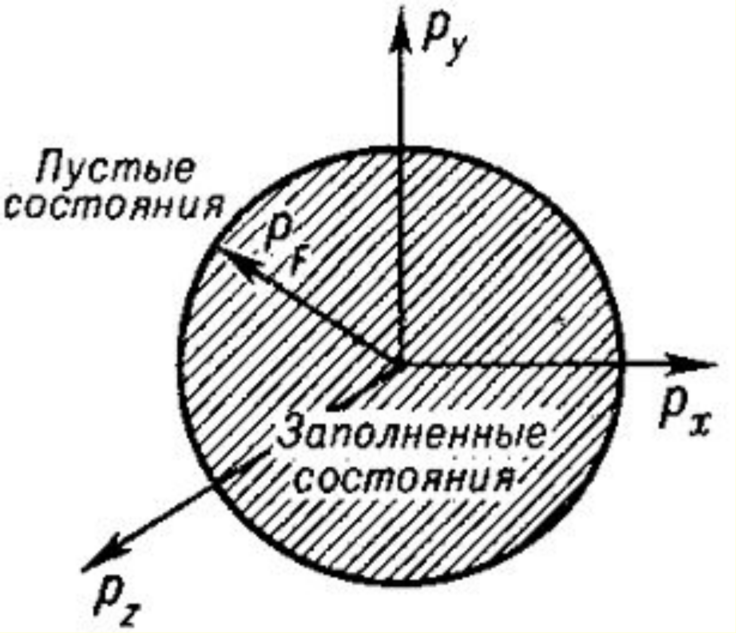
$$p_1' + p_2' = p_1 + p_2$$

Куперовские пары

Добавим 2 невзаимодействующих электрона

Сфера Ферми

$$\varphi(r_1, r_2, p_1, p_2) = \psi(r_1, p_1)\cdot\psi(r_2, p_2)$$



Учтем взаимодействие электронов

$$\Phi(r_1, r_2, p_1, p_2) =$$
$$= \sum_{i,j} a_{i,j}\psi(r_i, p_i)\cdot\psi(r_j, p_j)$$

$$p_F = (2m_e\varepsilon_F)^{\frac{1}{2}}$$

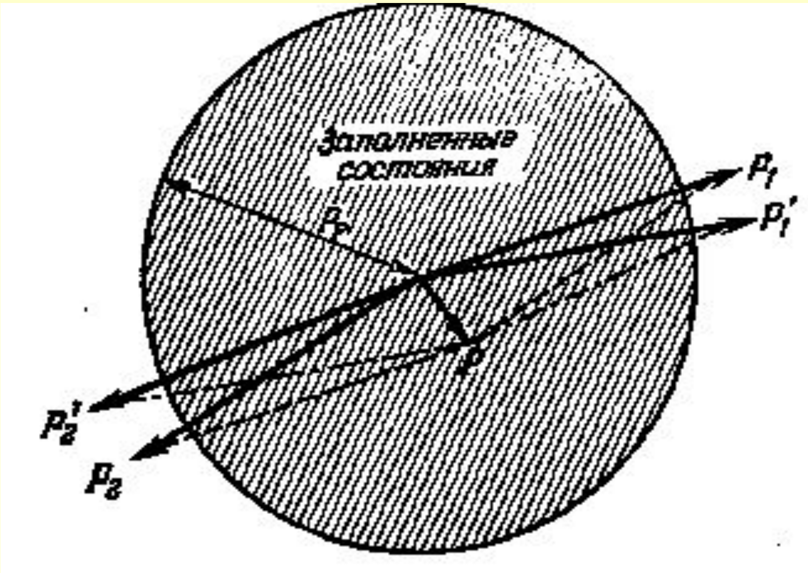
$|a_{i,j}|^2$ – *вероятность иметь электроны в состояниях* p_i *и* p_j

Куперовские пары

В процессе рассеяния электроны взаимодействуют между собой и, если это взаимодействие отвечает притяжению, то результирующая потенциальная энергия будет отрицательна.

За период времени, в течение которого происходит многократное рассеяние энергия двух электронов уменьшается на эту, усредненную по времени отрицательную потенциальную энергию. Величина этого уменьшения пропорциональна числу происходящих актов рассеяния - т.е. числу способов, которыми можно выбрать два члена из волновой функции *Ф*.

Куперовские пары

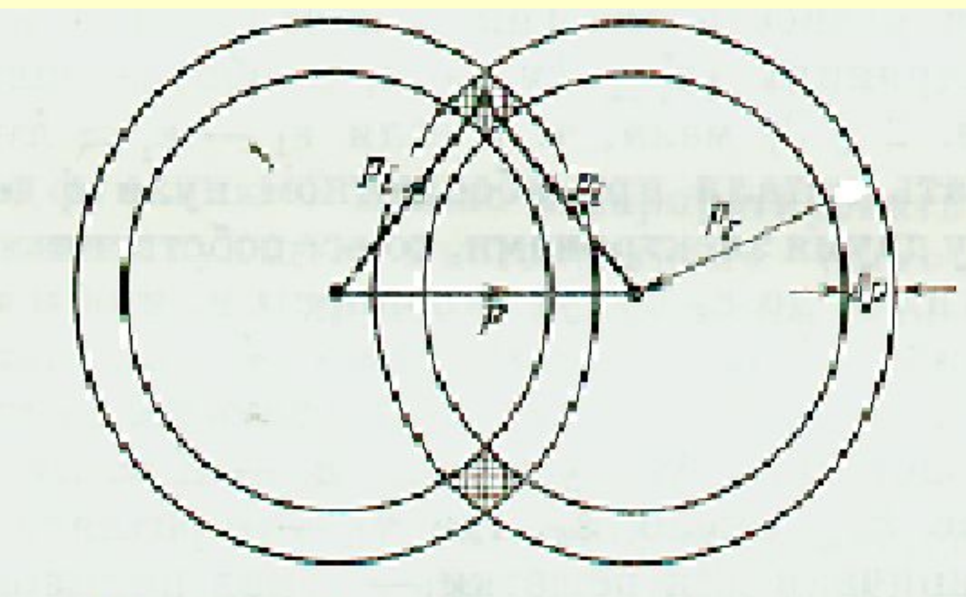


$$\varepsilon_i - \varepsilon_i' < \hbar\omega_D \quad \varepsilon_i, \varepsilon_i' > \varepsilon_F$$

$$p_F < p_i, p_i' < p_F + \Delta p$$

$$\Delta p = \frac{m_e \hbar \omega_D}{p_F}$$

$$\Delta^k < 0 \ \text{при каждом рассеянии}$$



$$p_i + p_j = P = Const$$

$$P = 0 \ \Rightarrow |\Delta| = \max$$

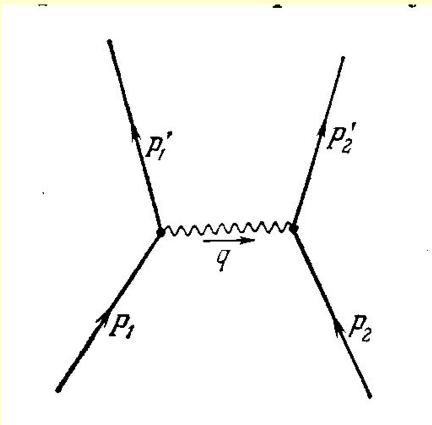
$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{N(\varepsilon_F)V}}$$

$$[p_j \uparrow, -p_j \downarrow] \to [p_i \uparrow, -p_i \downarrow]$$

Куперовские пары

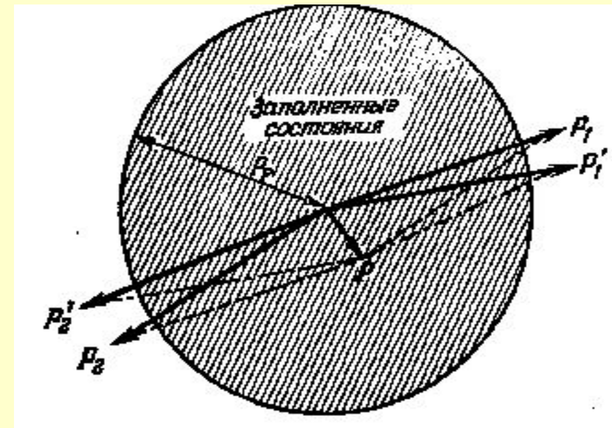
Добавочная энергия Т, 2-х невзаимодействующих е : $2\varepsilon_F$

<u>Добавочная энергия 2-х е испытывающих Фрёлиховское рассеяние</u>



$$\varepsilon_i - \varepsilon_i' \leq \hbar\omega_D$$

$$\Delta p = \frac{m_e \hbar \omega_D}{p_F}$$



$p_i, p_i' > p_F$ *кинетическая энергия* $T > 2\varepsilon_F$

$$\boxed{\text{Полная энергия } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = T + \Delta < 2\varepsilon_F}$$

$$\boxed{\Phi(r_1, r_2, p_1, p_2) = \sum_{i,j} a_i \psi(r_i, p_i \uparrow) \cdot \psi(r_j, p_{-i} \downarrow)}$$

Учет взаимодействия 2 электронов дает выигрыш в энергии!!!

Может быть нужно учесть взаимодействие между большим количеством электронов, 3-мя, 4-мя, ….?

И мы получим еще больший выигрыш в энергии?

БКШ

Главное предположение этой теории заключается в том, что единственным существенным для сверхпроводимости взаимодействием является взаимодействие между двумя любыми электронами, которые образовали куперовскую пару. Влияние всех остальных электронов заключается лишь в том, что вследствие принципа Паули число состояний, в которые могут рассеиваться взаимодействующие пары, ограничено, поскольку некоторые из состояний уже заполнены.

Соображения Купера можно применить к любой паре е вблизи уровня Ферми

$$\boxed{\psi_G(r_{n....}) = \Phi(r_1, r_2)\cdot\Phi(r_3, r_4)\cdot.......\Phi(r_n, r_{n+1})}$$

Мы можем рассматривать каждую пару как квазичастицу, подчиняющеюся статистике Бозе-Эйнштейна

Образование, каждой новой пары уменьшает полную энергию системы электронов

Вопрос:
Могут ли все электроны образовать пары?

НЕТ!, потому что количество незаполненных состояний (p,↑ -p↓) уменьшается с ростом количества пар

Выигрыш в энергии ~ числу актов рассеяния в ед. времени

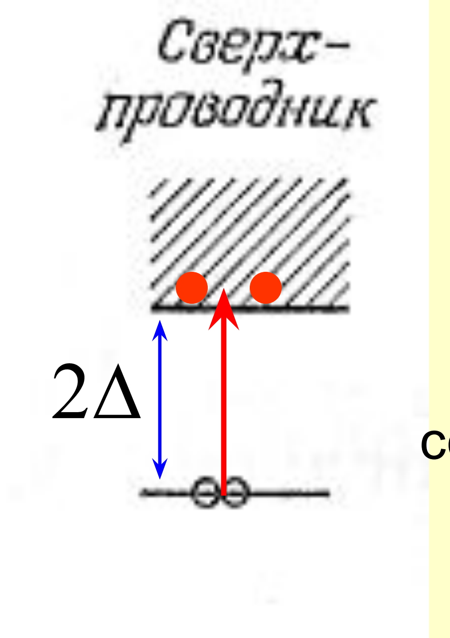
Энергетическая щель

Основное состояние сверхпроводника – идеальный газ Куперовских пар

Что будет, если мы внесем в него возбуждение? **(+ *ΔT* или *hν*)**

Как описать возбужденное состояния сверхпроводника?

Элементарное возбуждение это разрушение одной К.П.

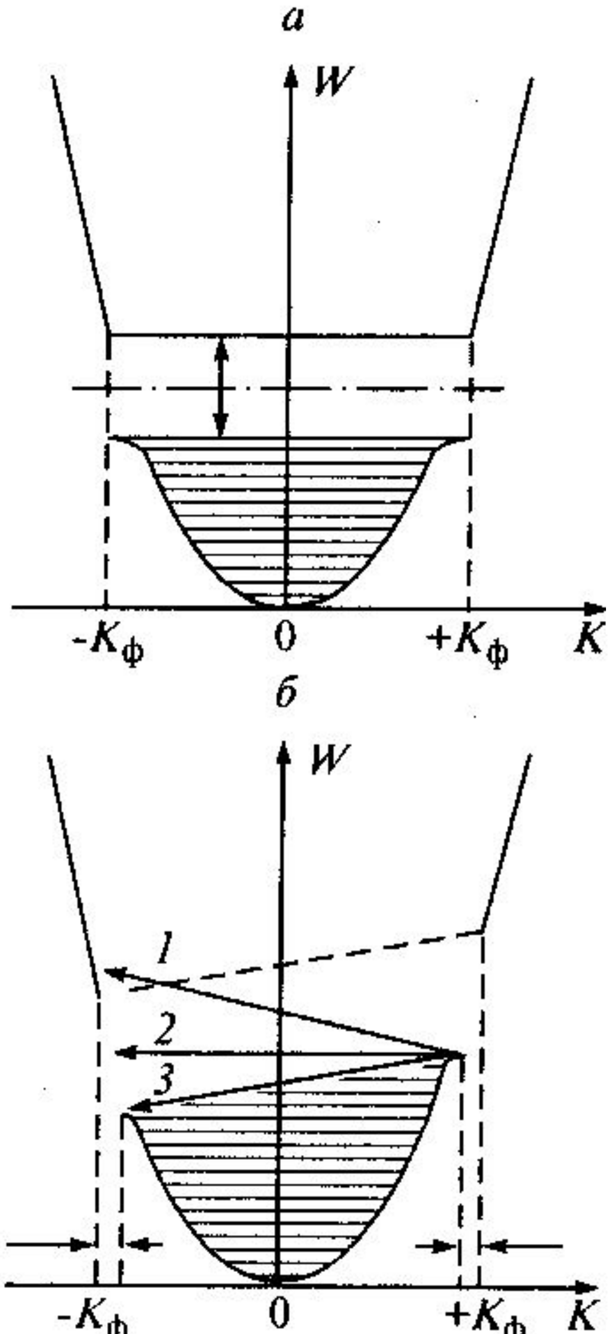


$$E_{возб} = [(\varepsilon_i - \varepsilon_F)^2 + \Delta^2]^{1/2} + [(\varepsilon_j - \varepsilon_F)^2 + \Delta^2]^{1/2}$$

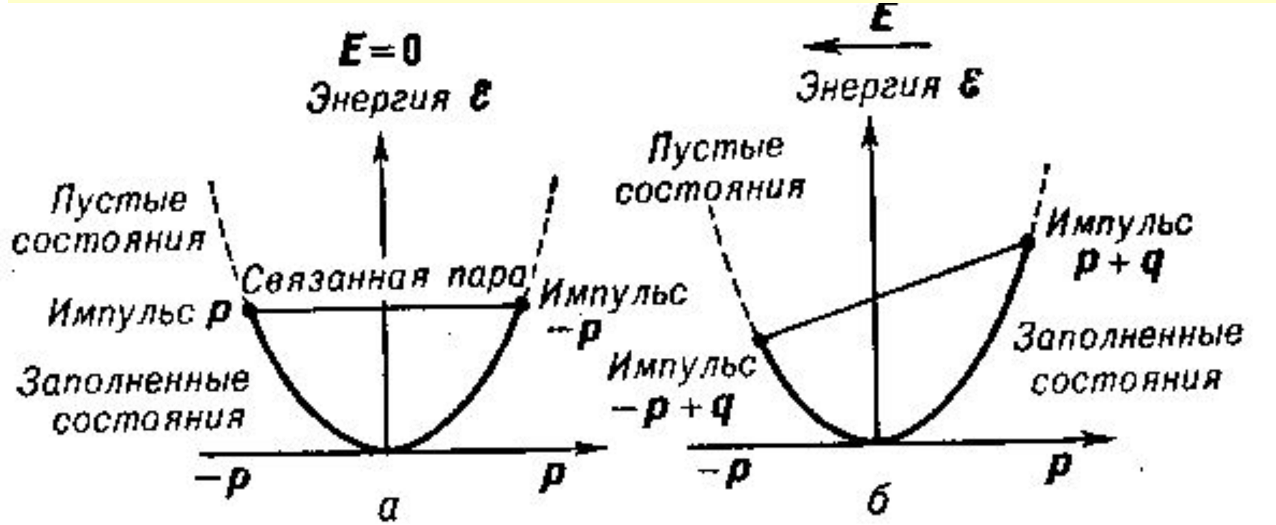
Появляется 2 электрона, в состояниях с импульсами **p**↑ , причем дополнительные состояния **-p** ↓ не заполнены

Т.е. в результате возбуждения уменьшается число состояний, в которые могут рассеиваться оставшиеся К.П.

$$2\Delta(T=0) = 3{,}5kT_c \qquad \Delta \xrightarrow{T \to T_c} 0$$



Состояния с током



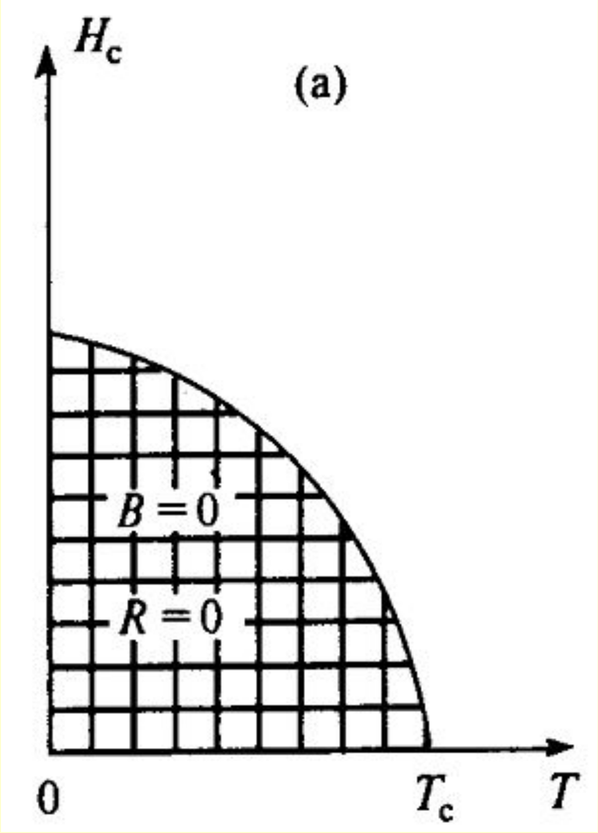
$$\left[p_j + q\uparrow, -p_j + q\uparrow\right]$$

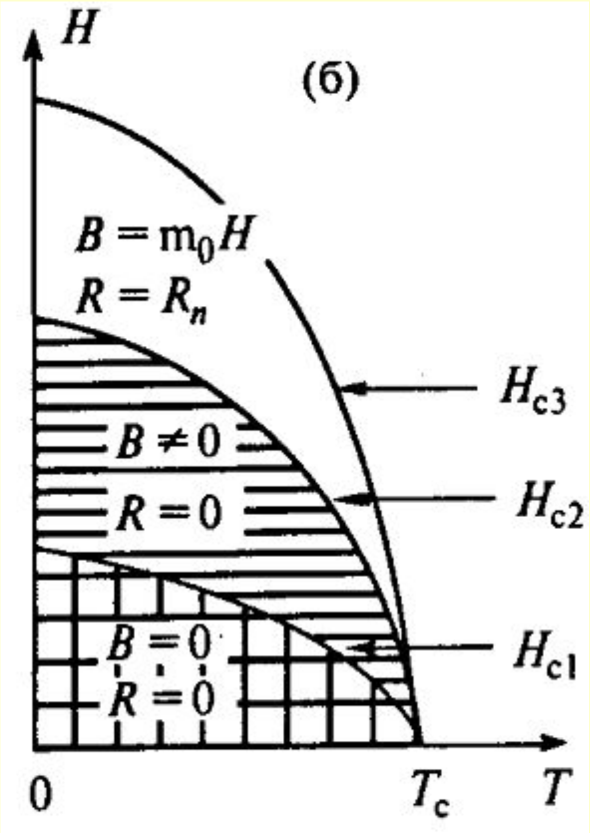
Внешнее электрическое поле добавляет всем электронам одинаковый импульс **q**

Ток переносится парой е $j = en_s \mathrm{P}/2m$

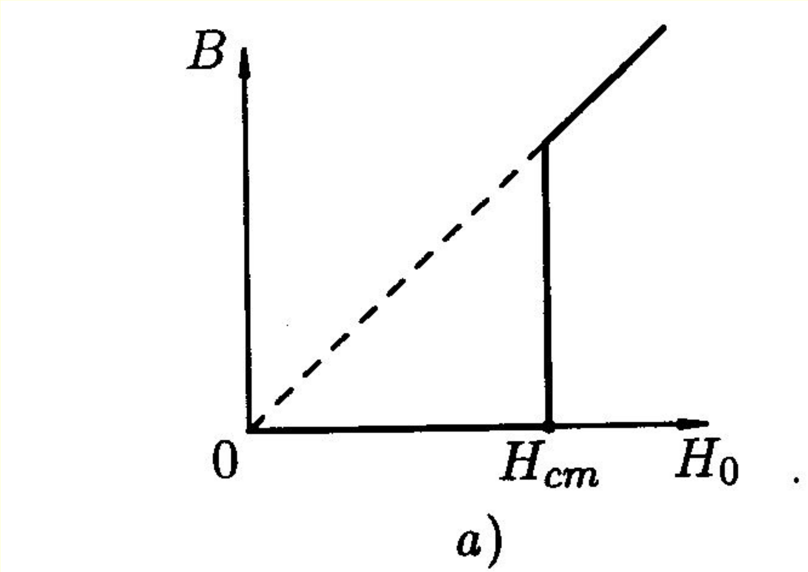
$$p_F \mathrm{P}/m < 2\Delta \; \textit{условие на} \; \exists \; \textit{свп. тока}$$

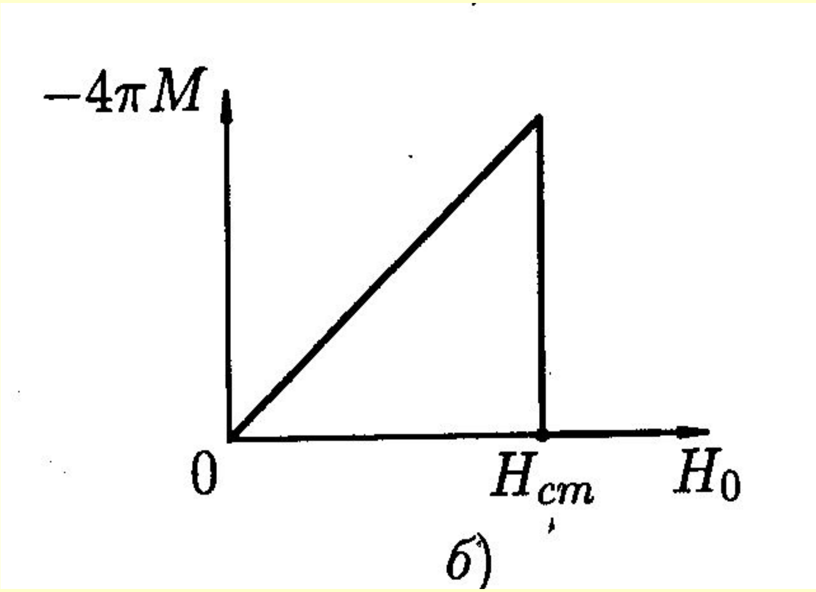
Сверхпроводники 1-го и 2-го рода



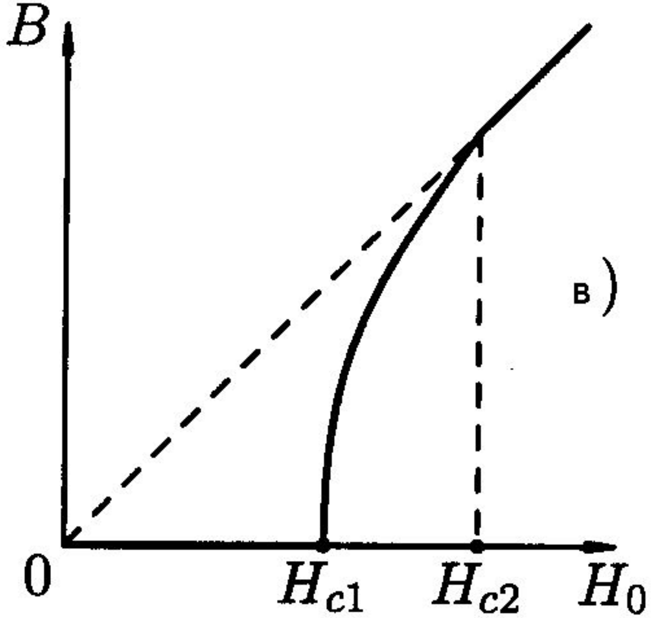


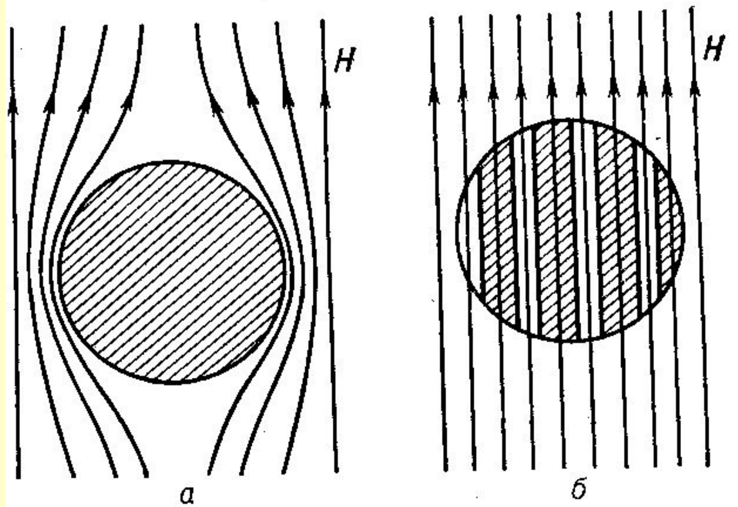
$$H_c = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$$

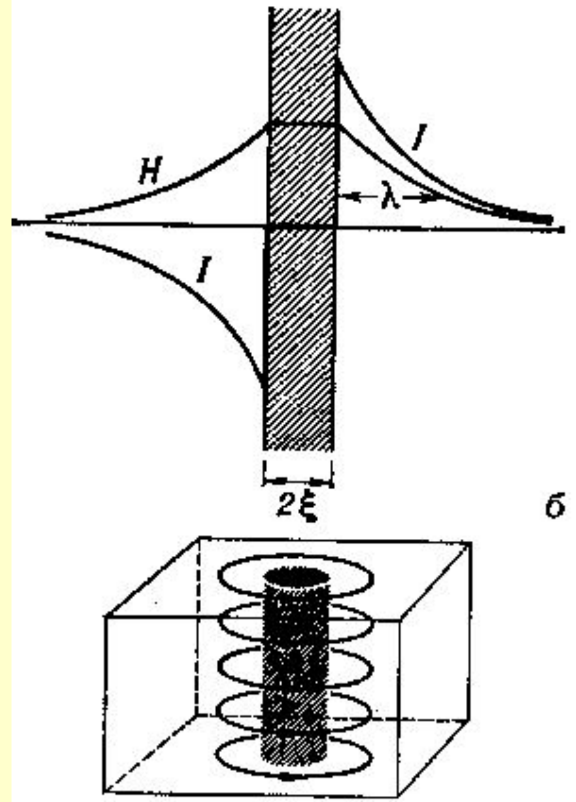


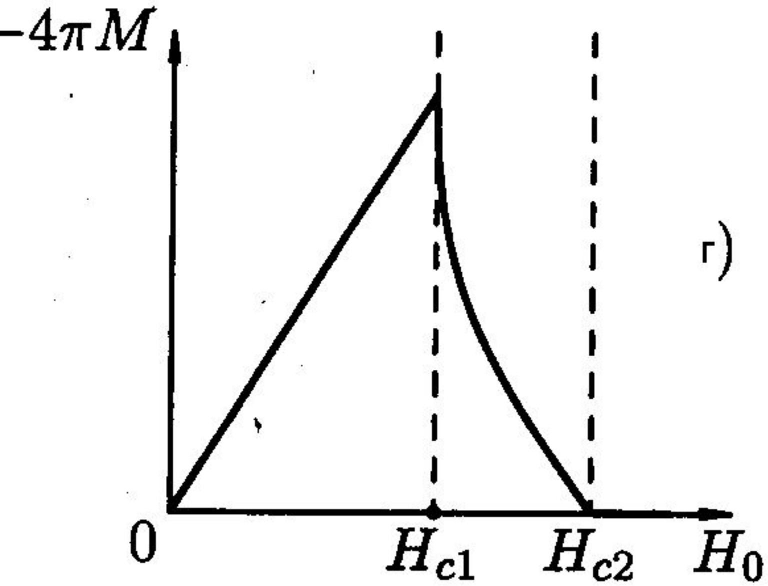


$$B = H + 4\pi \cdot M$$

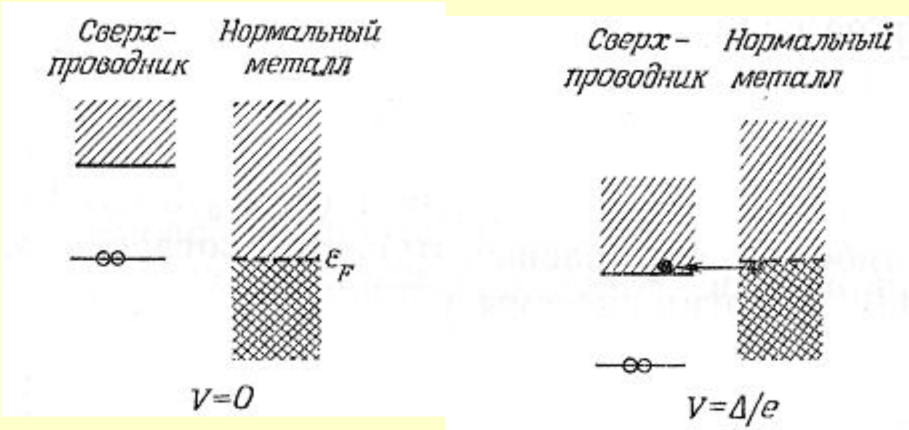

B
0
H_{c1}
H_{c2}
H_0
в)

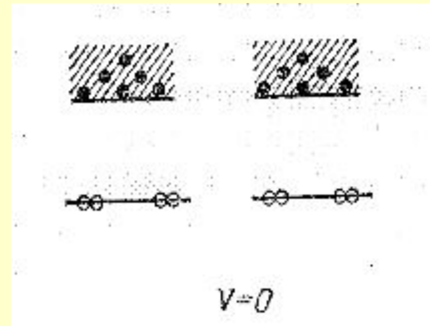

H
H
а
б

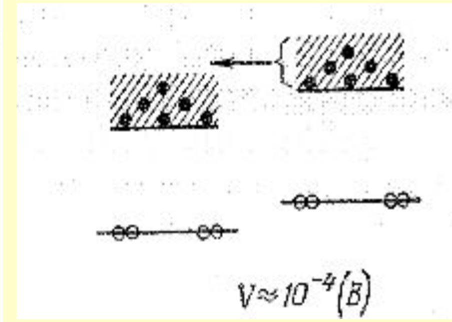

H
I
λ
I
2ξ
б

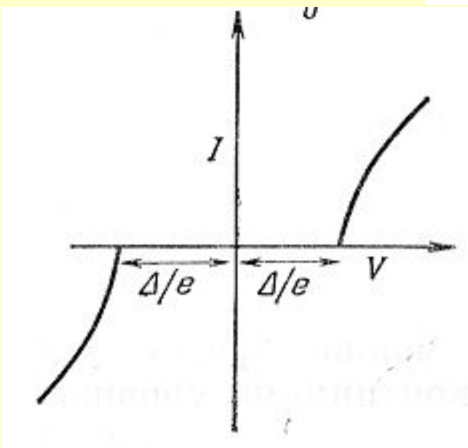

$-4\pi M$
0
H_{c1}
H_{c2}
H_0
г)

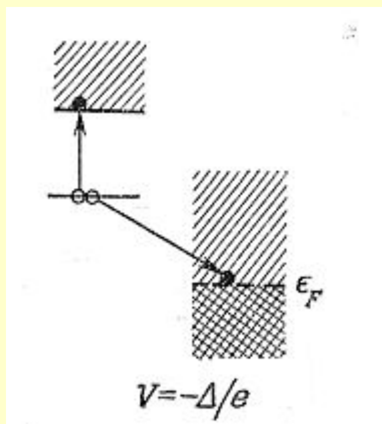
Туннелирование

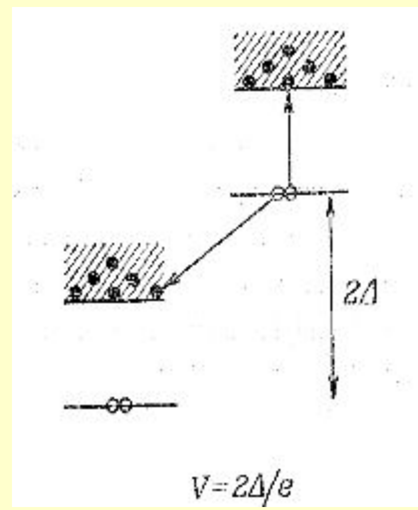


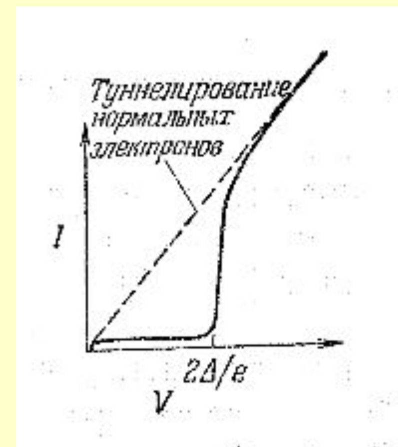


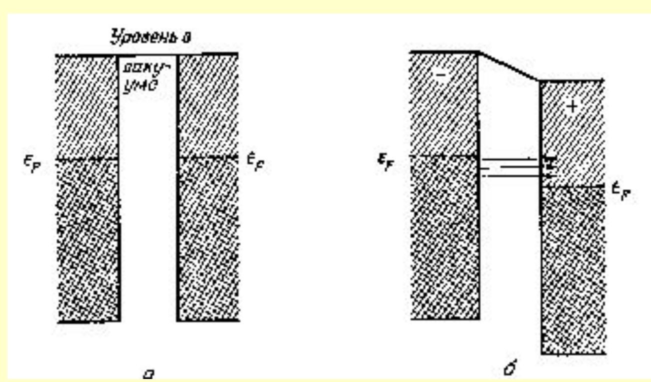




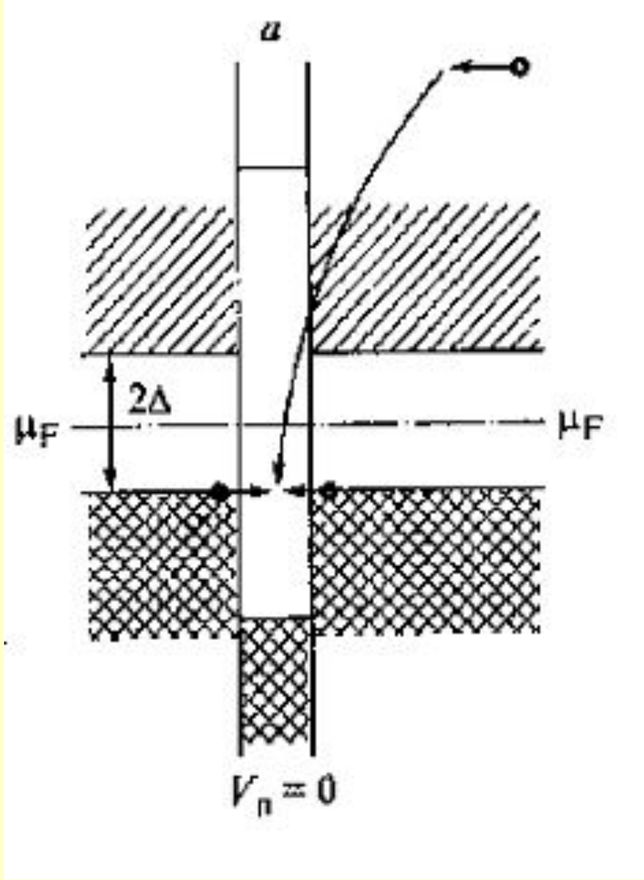








Эффекты Джозефсона

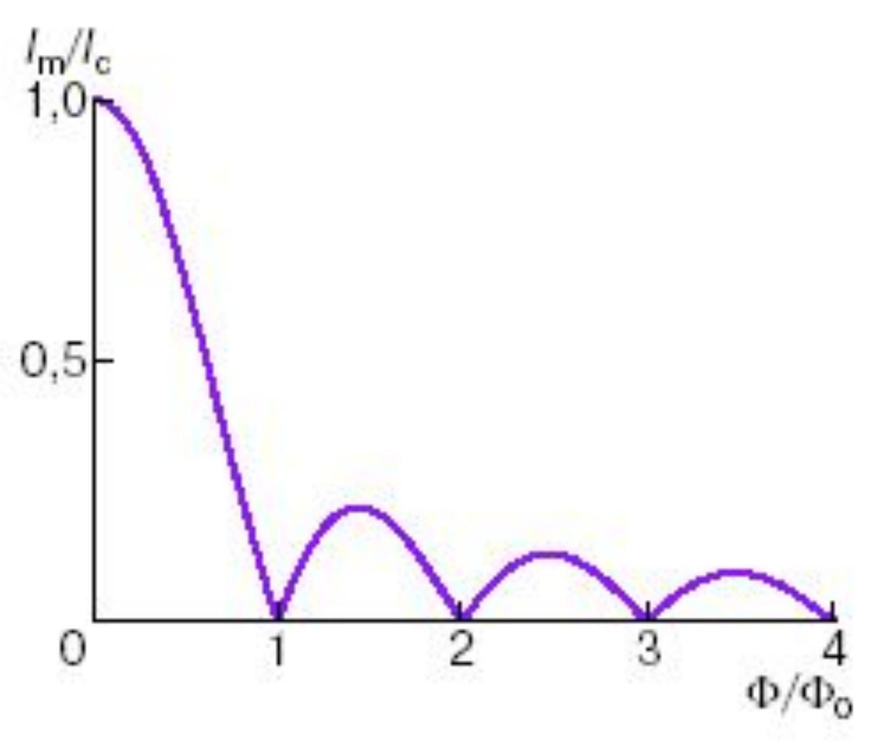


$$\psi(r,t) = \sqrt{n_c} \cdot \exp[i\varphi(r,t)]$$

$$\psi_1(x) = \alpha(x) \cdot n_{c1}{}^{1/2} \cdot exp\{i \cdot \phi_1(x)\}$$
$$\psi_2(x) = \beta(x) \cdot n_{c2}{}^{1/2} \cdot exp\{i \cdot \phi_2(x)\}$$

$$J = J_{\max} \cdot \sin(\Delta\varphi)$$

$$I \propto Im(\psi(x)\nabla\ \psi(x)) \quad \propto n_{c1}{}^{1/2} \cdot n_{c2}{}^{1/2} \cdot \sin(\phi_1(x) - \phi_2(x)).$$

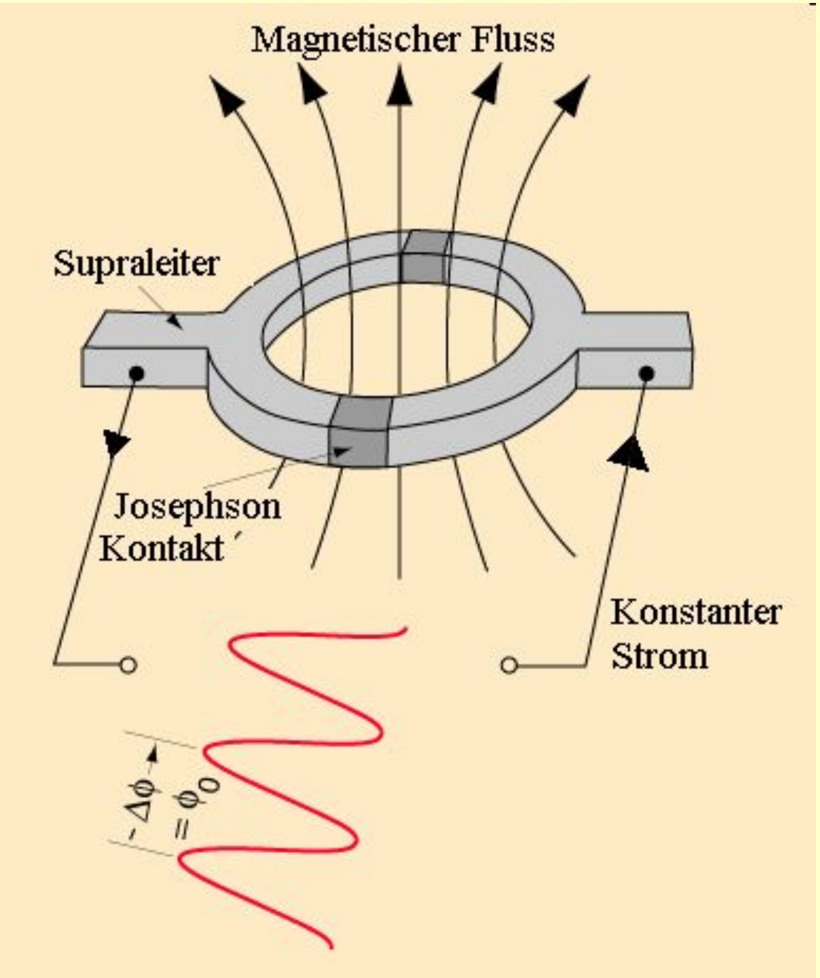


$$\Phi = \mu_0 HLd$$

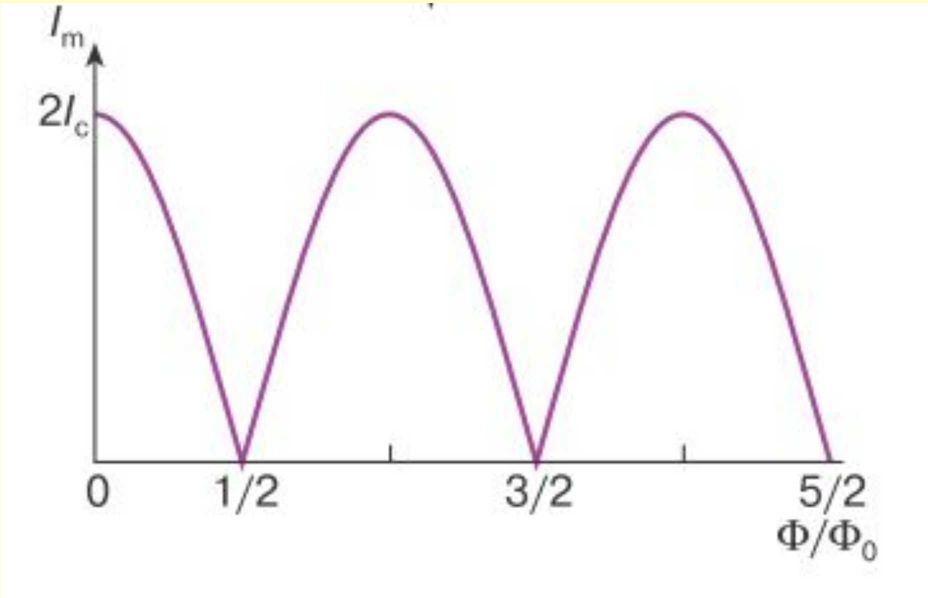
$$m = \frac{\mu_0 HLd}{\Phi_0}$$

$$J = J_{\max} \cdot \frac{\sin(\varphi + 2\pi m)}{\dfrac{2\pi\Phi}{\Phi_0}} = J_{\max} \cdot \frac{\sin(\varphi + \dfrac{2\pi\Phi}{\Phi_0})}{\dfrac{2\pi\Phi}{\Phi_0}}$$

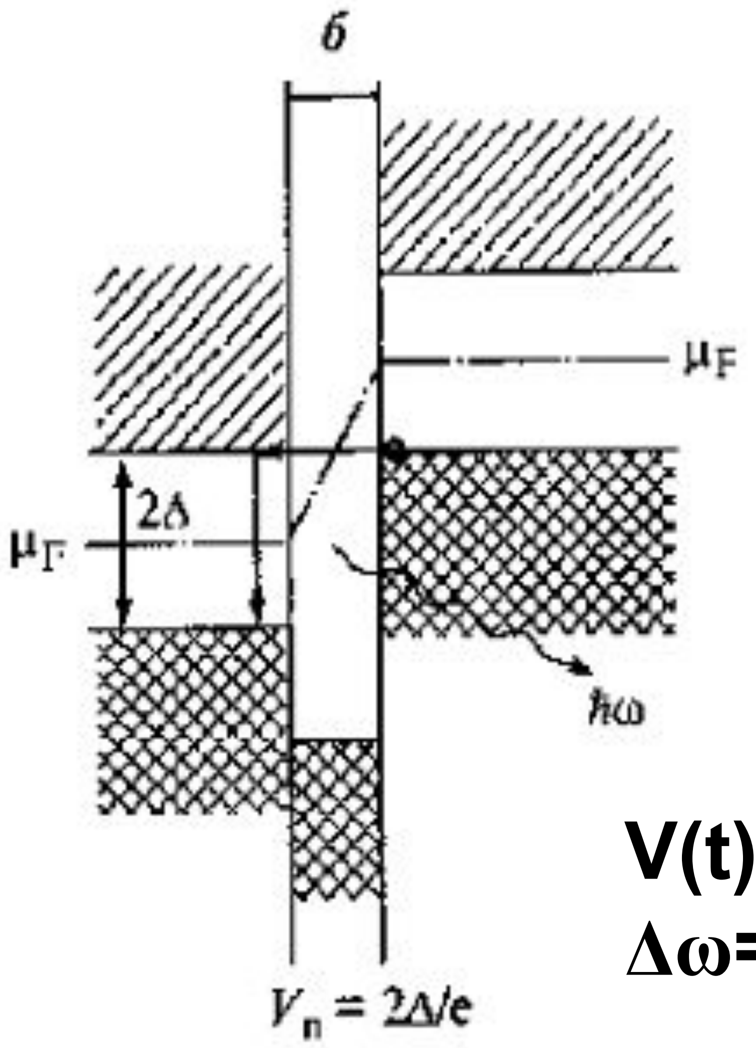
СКВИД - Superconducting Quantum Interference Device



$$J(\Phi) = 2J_{\max}\cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)$$



$$J = J_{\max} \cdot \sin(\Delta\varphi) + \frac{V}{R}$$



$$I(t) = I_m \cdot \sin(\phi) + (\square/2 \cdot e \cdot R)\, d\phi/dt,$$

$$d\phi/dt = \Delta\omega = 2 \cdot e \cdot V/\square$$

$$\mathbf{V(t) = R \cdot (I^2 - I_m^{\,2})/(I + I_m \cdot \sin(\Delta\omega \cdot t))}$$

$$\mathbf{\Delta\omega = (2 \cdot e \cdot R/\square) \cdot (I^2 - I_m^{\,2})}$$