

Лекция № 8

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Сила Лоренца

Из опыта: сила, действующая на точечный заряд q , зависит в общем случае и от местоположения заряда и от его скорости \underline{v} .

Обобщенная сила Лоренца – полная электромагнитная (э/м) сила, действующая на заряд q :

$$\underline{F} = q\underline{E} + q\left[\underline{v}, \underline{B}\right] \quad (8.1)$$

(8.1) – справедливо как для постоянных, так и для переменных электрических и магнитных полей при любых \underline{v} заряда.

Электрическая составляющая э/м силы
(8.1) не зависит от \vec{v}

$$\vec{F}_E = q\vec{E}.$$

Магнитная сила Лоренца

$$\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}] \quad (8.2)$$

- всегда $\vec{F}_M \perp \vec{v}$,
- *сообщает частице нормальное ускорение, изменяя ее скорость только по направлению;*
- *не совершает работы над заряженными частицами $A_{\vec{F}_M} = 0$, т.к. $\vec{F}_M \perp \vec{v}$*

Частица в магнитном поле кинетическую энергию не меняет.

Движение заряженной частицы в электрических и магнитных полях

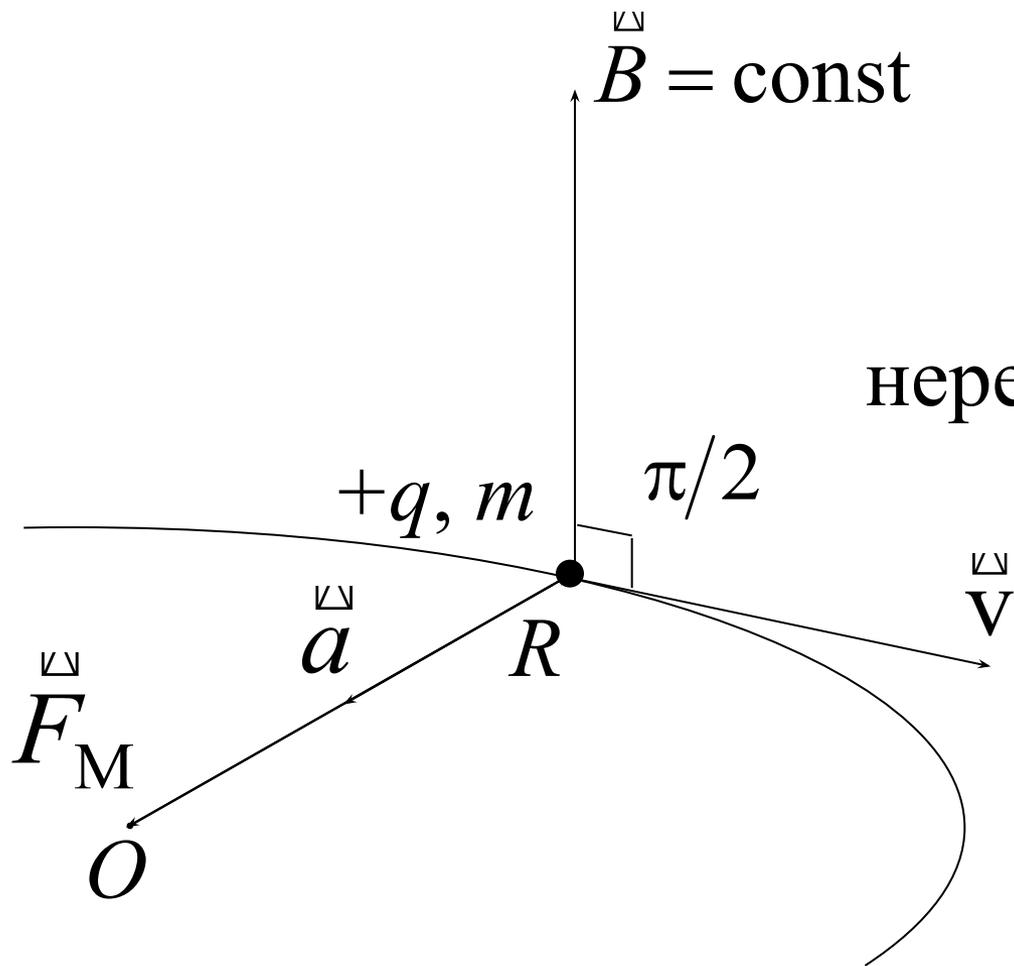
Уравнение движения :

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q\vec{E} + q \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{B} \right], \\ \text{н. у. : } \vec{r}(0), \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(0). \end{array} \right.$$

$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$ — ускорение движущейся заряженной частицы.

Рассмотрим частные случаи.

Движение заряженной частицы в поперечном однородном магнитном поле



$$\vec{B} = \text{const} \quad \vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}] = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Ускорение нерелятивистской частицы

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_M}{m} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B}$$

При $(\vec{v} \perp \vec{B})$

$$a = \frac{q v B}{m} \quad (8.3)$$

Т.к. $\vec{F}_M \perp \vec{v}$,

$$a = a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{q v B}{m},$$

изменяет скорость только по направлению.

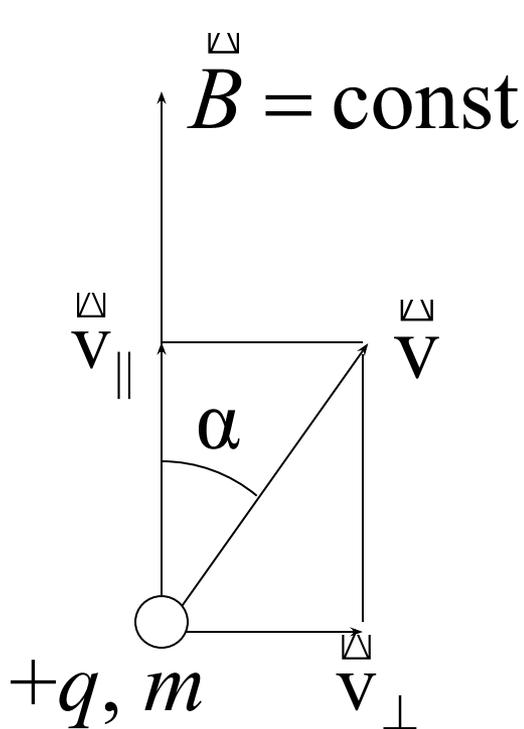
Под действием \vec{F}_M частица движется с $|\vec{v}| = v = \text{const}$ по окружности радиуса

$$R = \frac{m v}{q B} = \text{const} \quad (8.4)$$

Период обращения $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{q B}, \quad (8.5)$

частота $\nu = \frac{1}{T} = \frac{q B}{2\pi m}$

Движение нерелятивистской заряженной частицы в однородном непоперечном магнитном поле



Пусть $\vec{v}, \vec{B} = \alpha$

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp},$$

где $\vec{v}_{\parallel} \parallel \vec{B}, \quad \vec{v}_{\perp} \perp \vec{B}$

Тогда

$$\vec{F}_M = q \vec{v} \times \vec{B} = q \vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} + q \vec{v}_{\perp} \times \vec{B} = q \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}$$

Здесь $\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} = 0,$

а $v_{\perp} = v \sin \alpha, \quad v_{\parallel} = v \cos \alpha$

Это движение можно разложить на два – вращение по окружности и поступательное движение вдоль поля. *Частица движется по винтовой спирали с ускорением*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_M}{m},$$

$$a = \frac{F_M}{m} = \frac{q v_{\perp} B}{m} = \frac{q v B \sin \alpha}{m}$$

Поскольку $\vec{F}_M \perp \vec{v}$,

$\vec{a} = \vec{a}_n$, а его величина

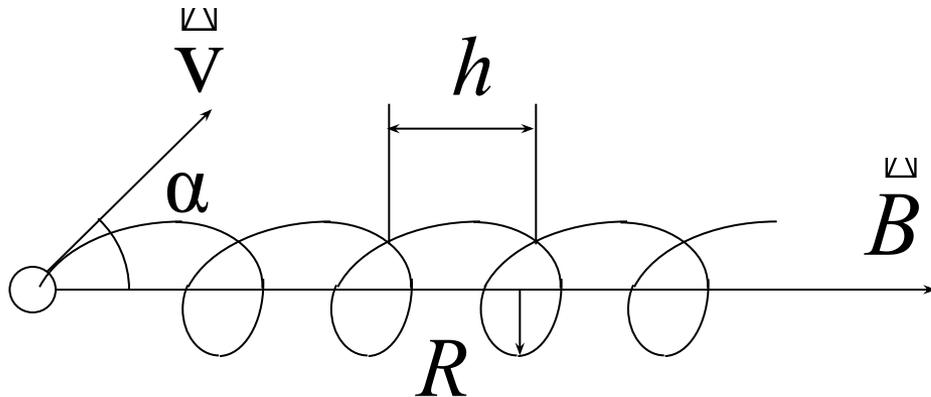
$$a = \frac{q v_{\perp} B}{m} = a_n = \frac{v_{\perp}^2}{R}$$

Радиус обращения частицы

$$R = \frac{m v_{\perp}}{qB} = \frac{m v \sin \alpha}{qB} \quad (8.7)$$

Период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi R}{v \sin \alpha},$$



$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (8.8)$$

Шаг винтовой спирали

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m}{qB} v \cos \alpha \quad (8.9)$$

Период обращения нерелятивистских заряженных частиц в магнитном поле не зависит от скорости.

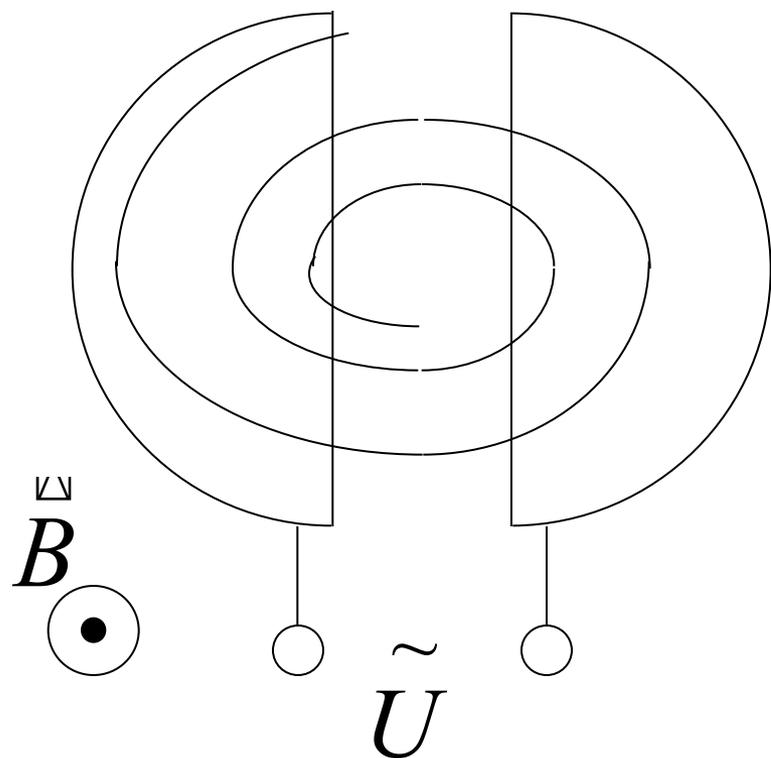
Ускорение заряженных частиц

Циклотрон – предварительный ускоритель «+» заряженных частиц (протонов, α -частиц и т.д.).

Используют независимость периода обращения нерелятивистской частицы от скорости (8.5), (8.8):

$$T = \frac{2\pi m}{qV}$$

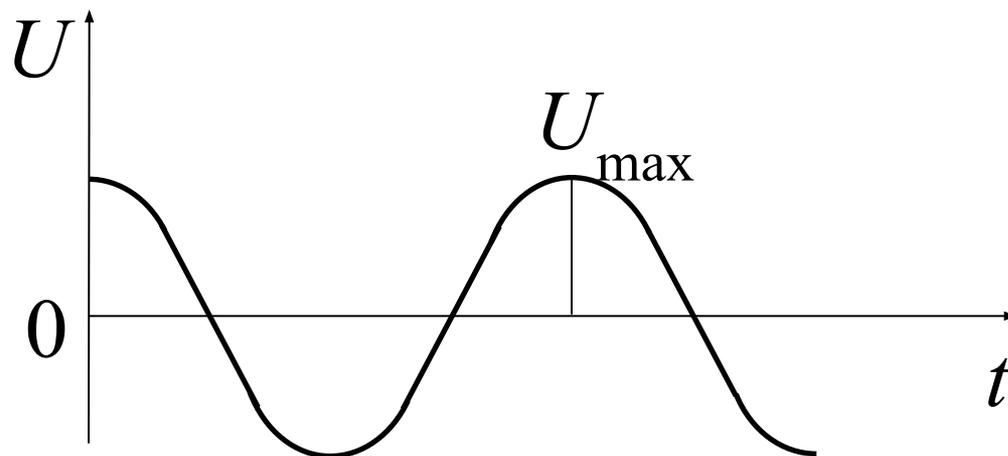
Циклотрон – два металлических дуанта, помещенные в поперечное магнитное поле постоянного магнита. К дуантам приложена высокочастотная разность потенциалов



высокочастотная разность потенциалов

$$U = U_0 \cos \omega t,$$

создающая в зазоре между дуантами переменное поле.



Ионы, вылетевшие из ионного источника (помещается в зазоре), ускорятся электрическим полем. Пройдя зазор, ионы будут двигаться в магнитном поле по окружности. Через время

$$\Delta t = \frac{\pi m}{qV}$$

ионы вновь подойдут к зазору. Если за это время полярность дуантов поменялась, то ионы опять будут ускоряться.

Т.к. в магнитном поле $\omega = \frac{qV}{\hbar}$, каждый интервал времени Δt ион будет попадать в зазор.

Ионы будут ускоряться внешним высокочастотным электрическим полем, если частота его изменения совпадает с частотой обращения частицы (ионов) по окружности

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$$

– условие циклотронного резонанса.

Энергия, которую набирает ион

$$W_k = \frac{m_0 v^2}{2} = qU$$

Внутри дуантов действует поперечное магнитное поле. Между – электрическое поле

$$U \sim 10^5 \text{ В}, W_k \sim 25 \div 28 \text{ МэВ (для протона)}.$$

$$1\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1\text{В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Дальнейшее увеличение энергии практически невозможно, как в связи с трудностями по увеличению радиуса дуантов, так и потому, что при этом увеличивается релятивистская масса иона

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

и период его обращения также увеличивается

$$T(v) = \frac{2\pi m(v)}{qB},$$

ион начинает выходить из резонанса и может попадать в зазор в моменты, когда поле будет тормозить ион.

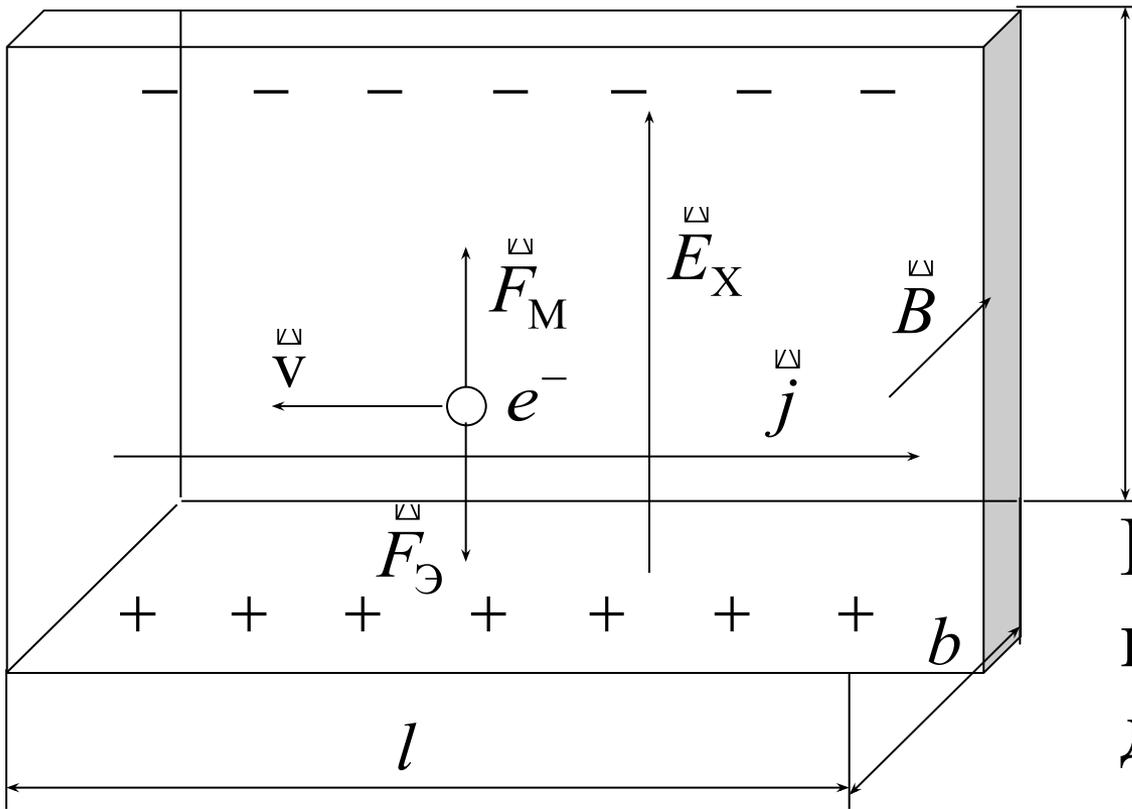
При скоростях частиц $v \sim c$

для ускорения используют синхротроны (в них – изменение магнитной индукции) и фазотроны (синхроциклотроны) (в них изменяется период высокочастотного ускоряющего поля).

Эффект Холла

При помещении металлической пластинки, по которой течет ток, в магнитное поле, силовые линии которого \perp току, между нижней и верхней гранями пластинки возникает *разность потенциалов* $\Delta\varphi$, называемая *холловской*.

Появление $\Delta\varphi$ объясняется действием силы Лоренца на носители тока.



На электрон
в магнитном
поле действует

$$\vec{F}_M = -e \langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}$$

Возникает эл. поле,
препятствующее
движению
электронов вверх

Перемещение зарядов продолжается до
установления состояния равновесия

$$\vec{F}_M + \vec{F}_Э = 0,$$

после чего накопление заряда прекратится и установится значение \overline{E}_X

Условие равновесия
$$e\langle \overline{\mathbf{v}} \rangle \times \overline{\mathbf{B}} = -e\overline{E}_X,$$

откуда

$$\overline{E}_X = -\langle \overline{\mathbf{v}} \rangle \times \overline{\mathbf{B}} = -\frac{\overline{\mathbf{j}} \times \overline{\mathbf{B}}}{en_e} = -R_X \cdot \overline{\mathbf{j}} \times \overline{\mathbf{B}} \quad (8.10)$$

Здесь $\overline{\mathbf{j}} = n_e e \langle \overline{\mathbf{v}} \rangle,$

где n_e — концентрация электронов,
постоянная Холла

$$R_X = \frac{1}{en_e}$$

Часто знак « \rightarrow » в (8.10) относят к постоянной Холла, т.е. для электронов $R_X < 0$, а для $q > 0$ — $R_X > 0$.

$$E_X = \Delta\varphi/h$$

Холловская разность потенциалов

$$\Delta\varphi = R_X j h B \quad (8.11)$$

Ларморова прецессия электронных орбит

Движение электрона по круговой орбите эквивалентно электрическому току

$$I = ev$$

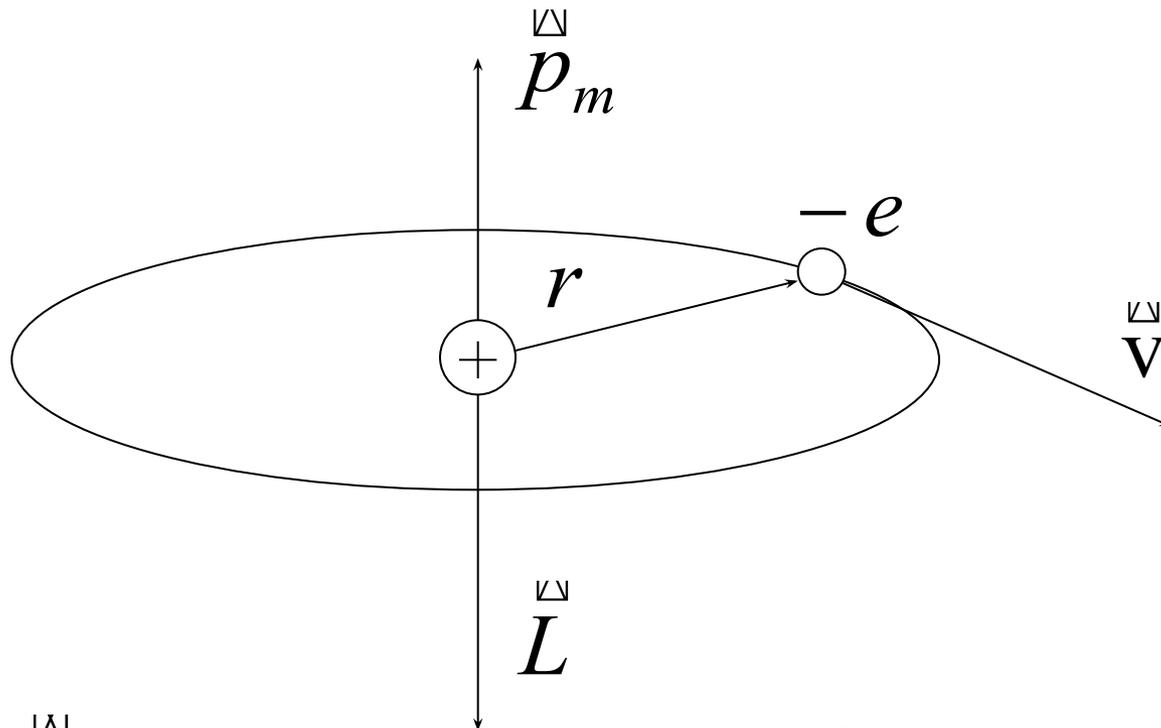
где ν – частота обращения электрона вокруг ядра.

Орбитальный магнитный момент электрона

$$P_m = IS = evS = ev\pi r^2,$$

момент импульса и угловая скорость

$$L = m\omega r^2 \quad \text{и} \quad \omega = 2\pi\nu$$



$$\left| \frac{\vec{p}_m}{L} \right| = \frac{evS}{m\omega r^2} = \frac{ev\pi r^2}{m2\pi v r^2} = \frac{e}{2m}$$

ПОСКОЛЬКУ $\vec{L} \uparrow \downarrow \vec{p}_m$,

гиромагнитное отношение

$$\Gamma = \frac{\overset{\vee}{P}_m}{L} = -\frac{e}{2m} \quad (8.12)$$

Формула (8.12) справедлива и для эллиптических орбит.

Если на электрон, вращающийся по орбите, будет действовать внешнее магнитное поле, то на замкнутый ток в магнитном поле действует пара сил под действием которой он будет совершать **прецессионное** движение.

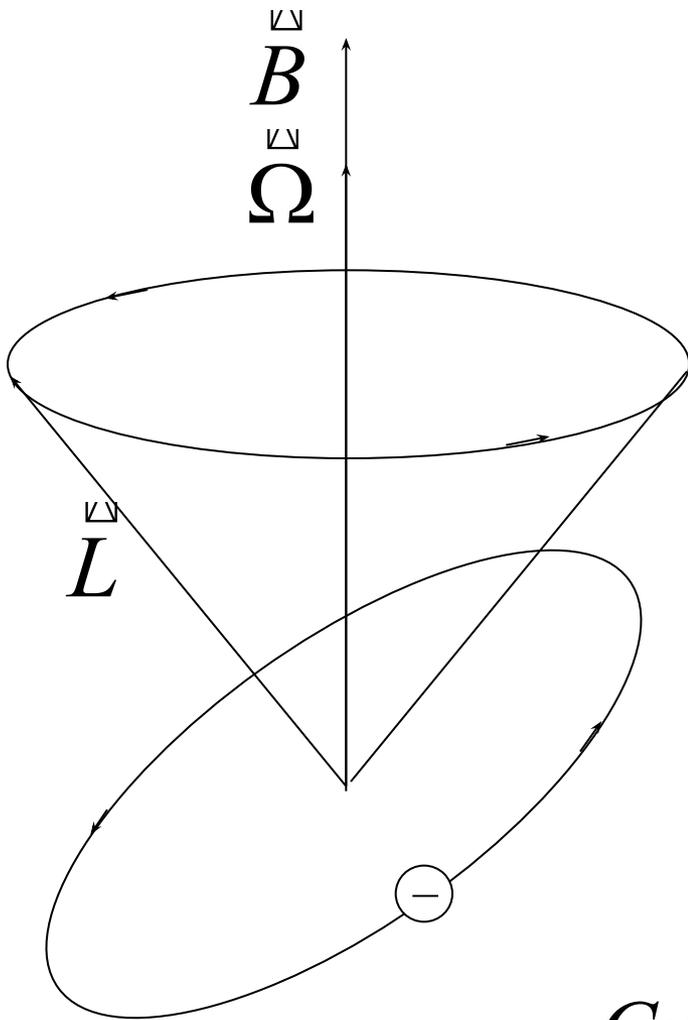
Если вращающаяся
частица имеет
отрицательный заряд и

$$\vec{\Omega} \parallel \vec{B}$$

величина **угловой**
скорости прецессии

$$\Omega = \frac{eV}{2m} = \Gamma B \quad (8.13)$$

*Скорость этой прецессии не
зависит от ориентировки
орбиты.*



Теорема Лармора: *действие магнитного поля на движущийся электрон заключается в наложении на первоначальное движение равномерного вращения вокруг направления внешнего магнитного поля.*

Внешнее магнитное поле не вызывает непосредственно переориентировки электронных орбит, но только их прецессию.

Доказательство теоремы Лармора. Пусть в отсутствии внешнего магнитного поля на заряженную частицу действует центральная сила (Кулона) $\vec{F}(\vec{r})$

Уравнение движения частицы

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}) \quad (8.14)$$

Включили внешнее магнитное поле с индукцией \vec{B} и ввели новую систему координат, которая равномерно вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega} \parallel \vec{B}$

Во вращающейся системе на частицу будут действовать: магнитная сила Лоренца

$$\vec{F}_M = e [\vec{v}, \vec{B}]$$

сила Кориолиса

$$\vec{F}_K = 2m[\vec{v}, \vec{\Omega}]$$

и центробежная сила

$$\vec{F}_ц = m\Omega^2 \vec{r}$$

Для достаточно малого Ω

$$F_ц \ll F_K$$

Так как $\vec{\Omega} \parallel \vec{v}$, при должном выборе величины Ω можно получить

$$\vec{F}_M + \vec{F}_K = 0$$

Это выполняется, если

$$e v B \sin \left(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{B} \right) + 2m v \Omega \sin \left(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{B} \right) = 0$$

или

$$\Omega = -\frac{eB}{2m}$$

В рассматриваемой вращающейся системе координат уравнение движения частицы будет иметь прежний вид (8.14).

Действие магнитного поля в первом приближении (пока можно пренебречь центробежной силой) сводится к наложению дополнительного равномерного вращения с угловой скоростью Ω . Для электрона получаем формулу (8.13).

Прецессионный магнитный момент всегда

$$\vec{\rho}'_m \uparrow \downarrow \vec{B}$$

$$|\vec{\rho}'_m| \ll |\vec{\rho}_m|$$