Динамика

Динамика – денеге түсірілген күштер мен олардың әсерінен болатын қозғалыстарды зерттейтін теориялық механика бөлімі.

Динамика

Нүкте динамикасы

Механикалық система динамикасы

Нүкте динамикасы – материялық нүктені оған әсер ететін күштерін ескеріп зерттейді.

Негізгі объект – материялық нүкте – мөлшерін елемеуге болатын массасы бар ұсақ бөлшектер.

Механикалық система динамикасы – әрбір нүктенің орны мен қозғалысы басқа нүктелердің орны мен қозғалысына тәуелді болып келетін бір-бірімен байланысты материялық нүктелер жиынтығы.

- **Динамиканың заңдары** – динамиканың негізіне Галилей мен Ньютон ашқан заңдар жатады.

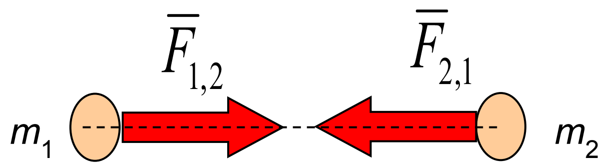
■ **Инерция заңы (Галилея-Ньютона заңы)** – **тыныштық күйде немесе бірқалыпты түзу сызықты қозғалыста болатын материялық нүкте ешқандай себепсіз өзіндік күйін өзгерте алмайды.** Материялық денелердің күш әсерінен өзіндік жылдамдығын шапшаңырақ немесе баяуырақ өзгертетін қасиетін Галилей **инерттілік** деп атады. Инерция заңы орындалатын координат системасын **инерция санақ** системасы дейміз.

■ **Күш пен үдеудің пропорциональдық заңы (Динамиканың негізгі теңдеуі – Ньютонның II заңы)** – **Материялық нүкте үдеуі әсер етуші күшке пропорционал және күш бағытымен бағыттас**: $m\bar{a} = \bar{F}.$ немесе $\bar{a} = \frac{1}{m}\bar{F}$

$$m = \frac{G}{g}.$$

Мұндағы m – нүкте массасы (инерттілік шамасы), кг өлшенеді және Салмақты еркін түсу үдеуіне бөлгенге тең.
F – берілген күш, өлшем Н (1 Н күш массасы 1 кг нүктеге 1 м/с^2 үдеу береді, яғни 1 Н = 1/9.81 кг-с).

- **Әсер және кері әсер заңы (Ньютонның III заңы)** – **Екі материялық нүктенің өзара әсерлесу күштерінің шамалары бір-бірне тең бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытталған:**



$$\overline{F}_{1,2} = -\overline{F}_{2,1}$$

- **Күш әсерінің тәуелсіздігі туралы заң** – **Егер материялық нүктеге бір мезгілде бірнеше күш әсер етсе, онда нүкте үдеуі әсер ететін күштердің әрқайсысының нүктеге беретін үдеулерінің геометриялық қосындысына тең:**

$$\overline{a}(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots) = \overline{a}_1(\overline{F}_1) + \overline{a}_2(\overline{F}_2) + \ldots \quad \text{немесе} \quad \overline{a}(\overline{R}) = \overline{a}_1(\overline{F}_1) + \overline{a}_2(\overline{F}_2) + \ldots$$

- **Динамиканың негізгі теңдеуі**:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i .$$

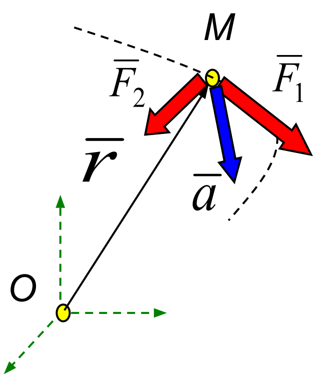
- Нүкте қозғалысының векторлық
- әдісіне сәйкес келеді.

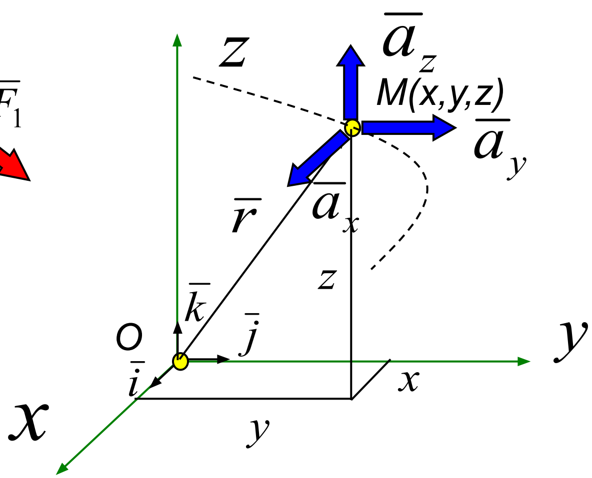
- **Материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуі:**

Үдеуді $\bar{a} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$ динамиканың негізгі теңдеуіне қоямыз:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_i \quad (1).$$

- Нүкте қозғалысының дифференциальдық теңдеуі векторлық түрі.





Координаттық түрде:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$$

Күштің проекциялары:

$$F_i = X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}$$

Өзгертулерден соң: $$m\frac{d^2}{dt^2}(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})=\sum(X_i\bar{i}+Y_i\bar{j}+Z_i\bar{k}).$$

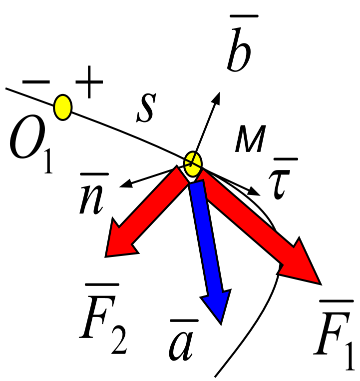
$$(x):m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum X_i;$$
$$(y):m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum Y_i;$$
$$(z):m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum Z_i.$$

немесе:

$$m\ddot{x}=\sum X_i;$$
$$m\ddot{y}=\sum Y_i;$$
$$m\ddot{z}=\sum Z_i.$$

- қозғалысы координаттық түрде берілген нүктенің дифференциальдық теңдеулері.

Қозғалысы табиғи түрде берілген нүктенің теңдеулері –



$$(\tau):ma_{\tau\tau}=\sum F_{i\tau};$$
$$(n):ma_n=\sum F_{in};$$
$$(b):m\cdot 0=\sum F_{ib}.$$

немесе

$$m\ddot{s}=\sum F_{i\tau};$$
$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho}=\sum F_{in}.$$

- қозғалысы табиғи түрде берілген нүкте теңдеулері.

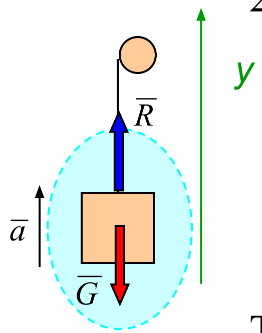
Нүкте динамикасының екі негізгі есебі:

Бірінші есеп (тура есеп): Нүктенің берілген ***қозғалысы***(қозғалыс теңдеуі, траектория) арқылы әсер ететін ***күштерді*** анықтау.

Екінші есеп(кері есеп): Нүктеге әсер ететін күштер арқылы нүкте қозғалысын анықтау. Қозғалыстың параметрлерін табу (қозғалыс теңдеуі, қозғалыс траекториясы).

Динамиканың тура есебін шешу – бірнеше мысалдар келтірейік:

1 мысал. Салмағы $\boldsymbol{G}$ тең лифтің кабинасы тростың бойымен $\boldsymbol{a}$ үдеумен жоғары көтеріледі. Тростың тартылу күшін табу:



1. Объекті таңдаймыз (лифтің кабинасы ілгерлемелі қозғалады, оны материялық нүкте деп қарастырамыз).

2. Байланысты алып тастаймыз(трос) да оны $\boldsymbol{R}$ реакциясымен алмастырамыз.

3. Динамиканың негізгі заңының теңдеулерін құрастырамыз:

4. y өсіне проекциялаймыз: $(y):\ ma_y = R - G.$ $\quad m\overline{a} = \sum \overline{F}_i = \overline{G} + \overline{R}.$

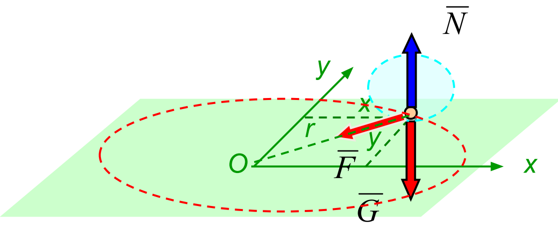
Тростың реакциясын анықтаймыз: $R = G + ma_y = G + \dfrac{G}{g}a_y = G(1 + \dfrac{a_y}{g}).$

Тростың тартылу күшін табамыз:

$$\overline{T} = -\overline{R};\quad T = R = G(1 + \frac{a_y}{g}).$$

Бір қалыпты қозғалыста кабинаның $a_y = 0$,онда тростың тартылуы салмаққа тең: $T = G$.
Трос үзілгенде $T = 0$, онда кабинаның үдеуі еркін түсу үдеуіне тең: $a_y = -g$.

2 мысал. Оху жазықтығында массасы m, болатын нүкте келесі теңдеумен қозғалады: $x = a \cdot \cos kt$, $y = b \cdot \cos kt$. Нүктеге түсірілген күшті табыңыз.



1. Нүктені таңдаймыз (материялдық нүкте).

2. Байланысты алып тастап (жазықтық) оны **N** реакциясымен алмастырамыз.

3. Системаға белгісіз **F** күшін қосамыз.

4. Динамиканың негізгі теңдеуін жазамыз: $m\bar{a} = \sum \overline{F}_i = \overline{G} + \overline{N} + \overline{F}.$

5. Негізгі теңдеулерді *x,y* өстеріне проекциялаймыз:

$$(x): \quad m\ddot{x} = F_x;$$

$$(y): \quad m\ddot{y} = F_y.$$

Күш проекцияларын анықтаймыз:

$$F_x = m\ddot{x} = -mak^2 \cos kt = -mk^2 x;$$

$$F_y = m\ddot{y} = -mak^2 \sin kt = -mk^2 y.$$

Күш модулі:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = $$
$$= mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r.$$

Бағыттаушы косинустар:

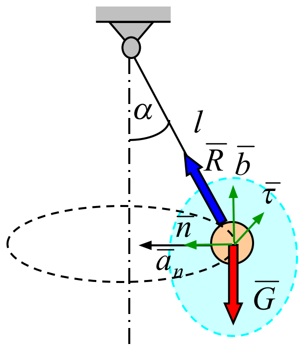
$$\cos(\overline{F}, x.) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}; \cos(\overline{F}, y.) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Сонымен, күш нүктенің координат центріне дейінгі қашықтыққа пропорционал, центрге бағытталған. Қозғалыс траекториясы эллипс:

$$x^2 = a^2 \cos^2 kt;$$
$$y^2 = b^2 \sin^2 kt.$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

3 мысал: Салмағы G –ға тең жүк ұзындығы l ға тең жіпке ілініп, жазықтықта шеңбер жасап қандай да бір жылдамдықпен қозғалады. Жіп вертикаль өстен α бұрышына ауытқиды. Жіптің тартылыс күшін және жүктің жылдамдығын табыңыз.



1. Объектті таңдаймыз (жүк).

2. Байланысты алып (трос) реакция $\boldsymbol{R}$ алмастырамыз.

3. Динамиканың теңдеуі: $m\overline{a} = \sum \overline{F}_i = \overline{G} + \overline{R}.$

4. Динамиканың теңдеуін τ,n, b өстеріне жіктейміз:

$$(\tau): \quad ma_\tau = 0;$$
$$(n): \quad ma_n = R\sin\alpha;$$
$$(b): \quad 0 = R\cos\alpha - G.$$

Жіптің тартылыс күшін анықтаймыз:

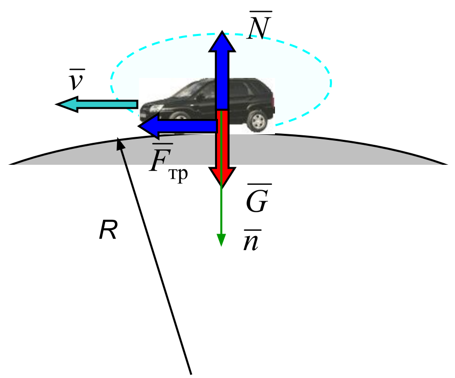
$$\overline{T} = -\overline{R}; \quad T = R = \frac{G}{\cos\alpha}.$$

Жіптің реакциясын екінші теңдеуге қоямыз, содан жүктің жылдамдығын табамыз:

$$\frac{G}{g}\frac{v^2}{l\sin\alpha} = \frac{G}{\cos\alpha}\sin\alpha.$$

$$v = \sqrt{\frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.$$

4 мысал: **Салмағы G тең автомобиль доңес көпірмен V жылдамдықпен келе жатыр (қисықтық радиусы R).** Автомобилдің көпірге түсіретін қысымын тап.



1. Объекті таңдаймыз (автомашинаның өлшемдерін ескермей, нүкте деп карастырамыз).

2. Байланысты алып тастаймыз (бұдыр бет) оны $\boldsymbol{N}$ реакциясымен және үйкеліс күші $\boldsymbol{F}_{үйк}$ алмастырамыз.

3. Динамиканың теңдеуі: $m\bar{a} = \sum \overline{F}_i = \overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_{тр}$.

4. Динамиканың теңдеуін n өсіне проекциялаймыз: $(n): \ ma_n = G - N.$

Осыдан нормаль реакцияны табамыз: $N = G - ma_n = G - m\dfrac{v^2}{R} = G(1 - \dfrac{v^2}{gR}).$

Автомобилдің көпірге қысымын анықтаймыз: $\overline{Q} = -\overline{N}; \quad Q = G(1 - \dfrac{v^2}{gR}).$

Осыдан жылдамдықтың көпірге түсірілген қысымының нөл $(Q = 0)$ кезіндегі жылдамдығын табамыз:

$$v = \sqrt{gR}.$$

- **Динамиканың кері есебінің шешуі** – жалпы жағдайда нүкте теңдеулері уақытқа, координатқа, жылдамдыққа тәуелді.
- Нүкте қозғалысының теңдеулері 2-ші дәрежелі дифференциалдық теңдеулермен өрнектеледі:

$$m\ddot{x} = \sum X_i;$$

$$m\ddot{y} = \sum Y_i;$$

$$m\ddot{z} = \sum Z_i.$$

Интегралдағаннан кейін әрқайсысындада алты тұрақты шығады C_1, C_2,…., C_6:

$$\dot{x} = f_1(t, C_1, C_2, C_3); \qquad x = f_4(t, C_1, C_2, ..., C_6);$$
$$\dot{y} = f_2(t, C_1, C_2, C_3); \qquad y = f_5(t, C_1, C_2, ..., C_6);$$
$$\dot{z} = f_3(t, C_1, C_2, C_3). \qquad z = f_6(t, C_1, C_2, ..., C_6).$$

Тұрақтыла C_1, C_2,…., C_6
$t = 0$ болғандағы алты шарттың көмегімен анықталады:

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0;$$
$$\dot{x} = \dot{x}_0; \quad \dot{y} = \dot{y}_0; \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

$$\dot{x} = f_1(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$
$$\dot{y} = f_2(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$
$$\dot{z} = f_3(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

Табылған мәндерді орнына қойғаннан кейін:

$$x = f_4(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0);$$
$$y = f_5(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0);$$
$$z = f_6(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0).$$

Сонымен, **материялық нүкте әсер еткен күштер системасының нәтижесінде бастапқы шарттарға байланысты күрделі қозғалыста болады**.

Механикалық жүйенің динамикасы.

Механикалық жүйе немесе материялық нүктелер жүйесі – деп кез келген нүктенің(дененің) орны мен қозғалысы басқа нүктелер(денелер) орны мен қозғалыстарына тәуелді болып келетін нүктелер(денелер) жиынтығын атайды.

Еркін нүктелер жүйесі – қозғалысы әсер ететін күштермен ғана анықталатын, кеңістікте кез келген бағыттағы қозғалысы ешқандай байланыстармен шектелмейтін материялық нүктелер жүйесі(күн жүйесінің барлық денелері бір-бірімен тартылыс күшетрі арқылы байланысқан. Планеталар осы күштердің әсерінен өз орбиталарының бойымен еркін қозғалады).

Еркін емес(еріксіз) материялық жүйе– материялық нүктелердің қозғалысы немесе денелерді шектейтін байланыстар (мысалы, механизм, машина және т.б.).

Системаға әсер етуші күштер. Алдында келтірген(активті және реактивті) күштерден басқа қосымша күштердің түрлеріне тоқталайық:

1. **Сыртқы күштер(е)** – системаның *нүктелеріне* не *денелеріне* системаға жатпайтын ***нүктелер*** мен ***денелердің*** әсері.

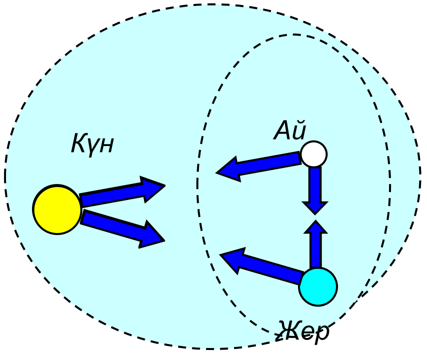
2. **Ішкі күштер (і)** – системадағы нүктелер мен денелердің өзара әсерлесуі.

Мұнда бір күш сыртқы да ішкі де күш болуы мүмкін, ол механикалық системаны қарастыруымызға байланысты.

Мысалы: Күн системасында, Жер мен Ай және олардың арасындағы тартылыс күші ішкі күш болады. Ал Жер мен Айға келсек, күннің тартылыс күші – сыртқы күш деп есептелінеді:

Осыдан **ішкі күштердің екі қасиетін алуға болады**:

$$\overline{R}^{i} = \sum \overline{F}_k^{i} = 0.$$



1. **Ішкі күштердің басты векторы нолге тең**:

2. **Ішкі күштердің кез келген нүктеге қатысты басты моменті нолге тең**:

$$\overline{M}_O^{i} = \sum \overline{M}_{kO}^{i} = 0.$$

Координат осьтеріне проекциялары:

$$\sum X_k^i = 0; \quad \sum Y_k^i = 0; \quad \sum Z_k^i = 0. \qquad \sum M_{kx}^i = 0; \quad \sum M_{ky}^i = 0; \quad \sum M_{kz}^i = 0.$$

- **Күштің импульсі** – **күштің, осы күштің әсер етуінің элементар уақытына көбейтіндісін көрсететін, күш әсерінің векторлық шамасы**:

$$\overline{S} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F} dt$$

Координат остеріне проекциялары: $(x): S_x = \int_{t_1}^{t_2} X dt; \quad (y): S_y = \int_{t_1}^{t_2} Y dt; \quad (z): S_z = \int_{t_1}^{t_2} Z dt.$

Күш тұрақты болса: $\overline{S} = \overline{F}(t_2 - t_1).$

Координат остеріне проекциялары:

$$S_x = X(t_2 - t_1); \quad S_y = Y(t_2 - t_1); \quad S_z = Z(t_2 - t_1);$$

- **Күштің қозғалыс мөлшері** – **материялық нүктенің массасы мен жылдамдығының көбейтіндісіне тең векторлық шама:**

$$\overline{Q} = m\overline{v}.$$

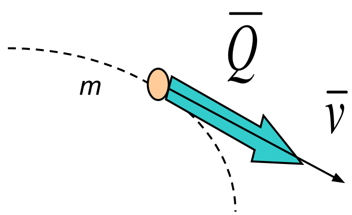
- **Материялық нүкте системасының қозғалыс мөлшері** – **материялық нүктелердің қозғалыс мөлшерлерінің геометриялық қосындысы:**

$$\overline{Q} = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 + \ldots + \overline{Q}_n = \sum \overline{Q}_k.$$

$$\overline{Q} = \sum \overline{Q}_k = \sum m_k \overline{v}_k = \sum m_k \frac{d\overline{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \overline{r}_k\right).$$

Массалар центрінің анықтамасы бойынша:

$$M\overline{r}_C = \sum m_k \overline{r}_k.$$



Онда: $\overline{Q} = \frac{d}{dt}(M\overline{r}_c) = M\frac{d\overline{r}_C}{dt} = M\overline{v}_C.$

$\overline{Q} = M\overline{v}_C.$ **Қозғалыс мөлшерінің векторы системаның массасы мен массалар центрінің жылдамдығының көбейтіндісіне тең.**

Қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема –

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}^{e}.$$

Қозғалыс мөлшері векторынан уақыт бойынша алынған туынды системаның сыртқы күштерінің басты векторына тең.

- **Нүктенің қозғалыс мөлшері моменті немесе кез келген нүктеге қатысты қозғалыстың кинетикалық моменті – материялық нүктенің радиус векторы мен қозғалыс мөлшерінің векторының векторлық көбейтіндісіне тең:**

$$\overline{K}_O = \overline{r} \times \overline{Q} = \overline{r} \times m\overline{v}.$$

- **Қозғалыс мөлшері моментінің өзгеруі туралы теорема** –

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{M}_O^{e}.$$

Қозғалыс мөлшері моментінен уақыт бойынша алынған туынды системаның сыртқы күштерінің сол центрге қатысты моменттерінің басты моментіне тең.