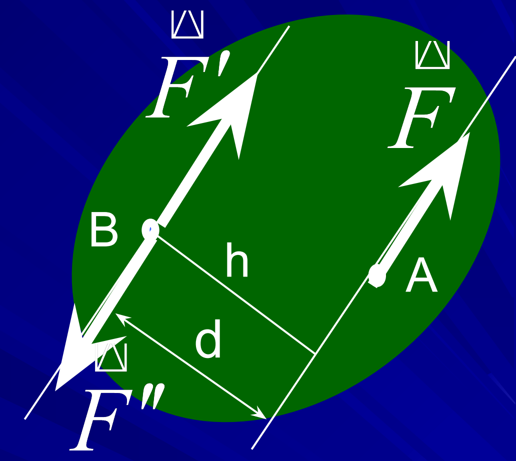
4. ПЛОСКАЯ ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ

4.1. Параллельный перенос силы

Известно, что Следствие Аксиомы 2 позволяет переносить точку приложения силы в любую другую точку линии действия без изменения действия силы на АТТ.

Возникает вопрос: ***можно ли переносить силу параллельно ей самой не изменяя при этом ее действие на АТТ?***



*Пусть силу **F**, приложенную в точке А, надо перенести параллельно ей самой в точку В, не изменяя при этом ее действие на тело. Последнее условие является важным моментом в данной постановке задачи.*

Воспользуемся Аксиомой 2, приложив в точке В уравновешенную систему двух равных по модулю и противоположно направленных сил

$$\vec{F}' = -\vec{F}''$$

*Пусть модули этих сил равны модулю исходной силы **F**, т.е. **F'=F''=F**.*

*Силы **F** и **F''** можно рассматривать как пару сил, т.к эти векторы равны по модулю параллельны и противоположно направлены. Момент этой пары равен:*

$$m\left(\vec{F}, \vec{F}''\right) = F \cdot d$$

*Важно заметить, что момент этой пары равен моменту переносимой силы **F** относительно точки В, куда сила переносится, т.е.*

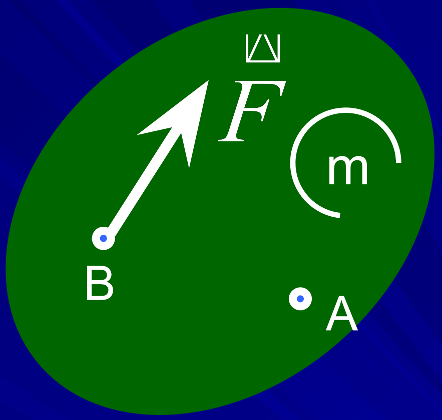
$$m\left(\vec{F}, \vec{F}''\right) = m_B\left(\vec{F}\right) = F \cdot h \quad при \quad h = d$$

С учетом всего сказанного ранее можно выполнить следующие преобразования:

1)заменить на рисунке два вектора **F** и **F"** , образующих пару, на круговую стрелку, отображающую ту же пару сил;

2) силу **F'** , приложенную в точке В, можно заменить на силу **F**, приложенную в точке А, т.к. эти силы равны по модулю и направлены в одну сторону

Таким образом сила **F**, изначально приложенная в точке А, оказывается в точке В, но при этом появляется пара сил, момент которой равен моменту переносимой силы **F** относительно точки В, куда эта сила должна быть перенесена. При этом мы выполнили условие о том, что при переносе силы ее действие на тело должно остаться без изменений.

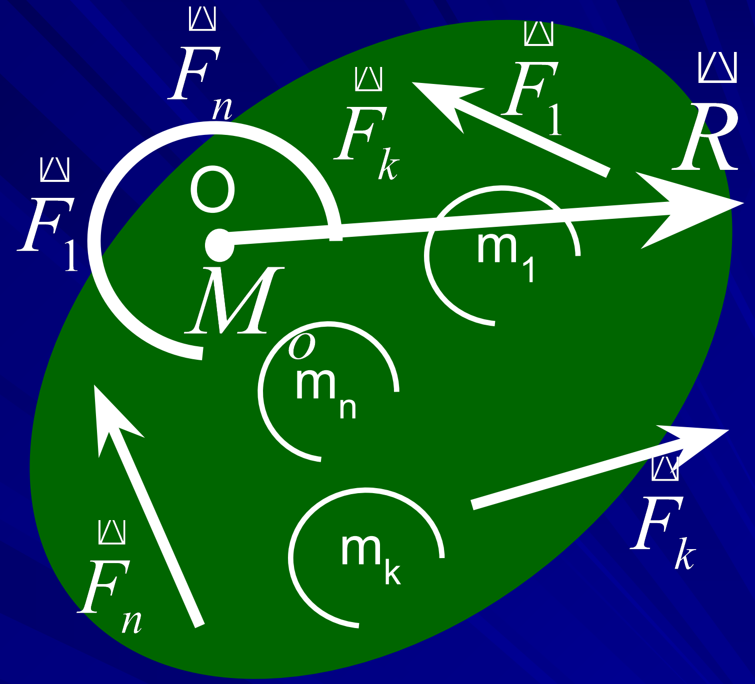


Итак, мы получили возможность параллельно переносить силу, не меняя при этом ее действие на тело.
Сформулируем это правило:

не изменяя оказываемого на тело действия, силу, приложенную к телу, можно перенести параллельно ей самой в любую точку тела, прикладывая, при этом, пару с моментом, равным моменту силы относительно точки, куда сила переносится

4.2. Приведение плоской системы сил к центру

произвольная плоская система сил при приведении к любому центру, находящемуся в этой же плоскости, заменяется главным вектором системы, R, приложенным в этом центре и равным геометрической сумме сил системы, и главным моментом (парой сил) M_o, равным алгебраичес-кой сумме моментов сил системы относительно центра приведения



*Итак, рассмотрим плоскую систему n сил, (**F_1…F_k…F_n**), приложенных к телу.*

*Покажем, что в результате приведения (переноса) этих сил к произвольному центру О, находящемуся в той же плоскости, что и система сил, все силы могут быть заменены на два вектора **R** – главный вектор и **M_o** – главный момент*

Воспользуемся правилом параллельного переноса и перенесем все силы в точку О. Напомним, что при параллельном переносе силы необходимо прикладывать пару.

*В результате параллельного переноса всех сил в точку О (приведения системы) мы получили систему сходящихся в точке О сил и систему пар. Сложив ССС, получим главный вектор **R**, а сложив систему пар – главный момент **M_o***

$$\bar{R} = \sum_n \bar{F}_k$$

$$M_o = \sum_n m_o(\bar{F}_k)$$

4.3. Частные случаи приведения

*Итак, произвольная система сил вне зависимости от числа векторов может быть заменена в общем случае на главный вектор, **R**, и главный момент, **M$_o$**. Но могут быть и частные случаи приведения системы, которые и рассмотрим:*

1) **R=0, Mo=0 -** система сил находится в равновесии. $\sum_n \overline{F}_k = 0$

Это означает, что обе суммы равны нулю, т.е. $\sum_n m_o(\overline{F}_k) = 0$

Это может показаться маловероятным, но природа равновесия системы предполагает возможность некоторых сил (например, сил реакций) изменять свои модули и направления, приводя к этому результату.

2) R=0, Mo≠0 - система сил приводится к одной паре с моментом **M$_o$**.
Это означает, что первая сумма оказалась равна нулю, а вторая сумма определила величину и направление действия (знак суммы) главного момента, ***M$_o$**.*
В этом случае вся исходная система сил эквивалентна паре (главному моменту); исходя из свойств пары можно заключить, что положение центра приведения не влияет на конечный результат.

3) R≠0: а) ***Mo=0*** - система приводится к главному вектору ***R***, который, в этом случае, выполняет функции равнодействующей *(см. определение равнодействующей)*;

б) ***Mo≠0*** - система приводится к главному вектору ***R***, отстоящему от центра приведения ***(·)O*** на расстоянии ***d***.

Действительно: заменим круговую стрелку M$_o$ на 2 силы с модулем R, а затем снимем уравновешенную систему сил **R, R''** *(Аксиома 2), получим силу R, отстоящую на* $d = M_o / R$

4.4. Условия равновесия плоской системы сил

для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно чтобы ее главный вектор и главный момент были равны нулю

$\mathbf{R} = 0$

$M_O = 0$

Поскольку в плоскости любой вектор можно определить как

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

постольку R=0, если $R_x = R_y = 0$.

*Учитывая, что **R** является вектором суммы, т.к.*

$$\vec{R} = \sum_n \vec{F}_k$$

то на основе теоремы о проекции вектора суммы на ось, имеем:

$$R_x = \sum F_{kx}$$

$$R_y = \sum F_{ky}$$

Главный момент вычисляется как сумма моментов сил системы относительно произвольной точки:

$$M_o = \sum_n m_o\left(\vec{F}_k\right)$$

Объединяя все это, получим удобное для использования при решении задач уравнения равновесия системы сил:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_n F_{kx} = 0 \\ &\sum_n F_{ky} = 0 \\ &\sum_n m_o(\overline{F}_k) = 0 \end{aligned}\right\}$$

<u>Форма 1</u>: **для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую координатную ось, а также сумма их моментов относительно любого центра, находяще-гося в этой же плоскости, были равны нулю**

Можно предложить еще две формы записи условий равновесия плоской системы сил. Следует иметь в виду, что все формы записи служат проверкой ***необходимого и достаточного условия равновесия****, а именно R=M$_o$=0.*

<u>Форма 2</u>: **для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы их моментов относительно двух произвольно выбранных центров А и В, и сумма проекций всех сил на ось х, не перпендикулярную к прямой, проходящей через эти центры, были равны нулю**

$$\left.\begin{aligned}\sum_n m_A(\overline{F}_k) &= 0\\ \sum_n m_B(\overline{F}_k) &= 0\\ \sum_n F_{kx} &= 0\end{aligned}\right\}$$

Условие выбора оси х связано с необходимостью предотвратить случай, когда линия действия R может проходить через точки А и В, тем самым не позволит проявить наличие R в первых двух уравнениях - плечо момента R относительно А и В будет равно нулю. В этом случае уравнение суммы проекций сил на ось х является последней возможностью удостовериться в наличии вектора R. Если же ось х будет перпендикулярна прямой АВ, то соответственно и проекция вектора R будет равна нулю, и мы не сможем убедиться существует ли вектор R или нет

Форма 3: **для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы их моментов относительно трех центров, не лежащих на одной прямой, были равны нулю**

$$\left.\begin{aligned}\sum_n m_A(\overline{F}_k) &= 0\\ \sum_n m_B(\overline{F}_k) &= 0\\ \sum_n m_C(\overline{F}_k) &= 0\end{aligned}\right\}$$

Ту же цель преследует условие выбора точек А,В,С – проверка наличия вектора R. Если эти точки окажутся на линии действия R, то момент R относительно этих точек будет равен нулю.

Все задачи о равновесии тела под действием системы сил можно разделить условно на две группы.

Прямая задача (первая группа):
будет ли заданная система сил являться уравновешенной

Другими словами: ***будет ли тело под действием данной системы находиться в равновесии?***

Чтобы ответить на этот вопрос мы должны использовать одну из трех приведенных выше форм записи уравнений равновесия и определить значения сумм, стоящих в левых частях уравнений. Если все суммы равны нулю, то это означает, что выполняется необходимое и достаточное условие равновесия; в противном случае, система сил и, соответственно, тело к которому приложена система, не находятся в равновесии.

Обратная задача (вторая группа): **найти неизвестные силы, входящие в данную уравновешенную систему сил**

В этом случае мы знаем, что тело и система сил (одно подразумевает другое) находятся в равновесии, т.е. выполняются уравнения (по любой форме записи). Из этих уравнений мы можем определить три неизвестные величины. Чаще всего этими неизвестными являются силы реакций связей.