Основы символического метода расчета электрических цепей переменного тока

Комплексные числа

$\underline{A} = A e^{j\alpha}$ - показательная форма;

$\underline{A} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha$

$\alpha = 0$ $\quad \underline{A} = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad \underline{A} = j$

$\alpha = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \underline{A} = -j$

$\alpha = \pi$ $\quad \underline{A} = -1$

Изображение производной от синусоидальной функции

$i(t) = I_m \sin\omega t \Longrightarrow I_m e^{j\omega t}$

$$\frac{di(t)}{dt} = I_m \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Longrightarrow I_m \omega e^{j(\omega t + \pi/2)} = I_m \omega e^{j\omega t} e^{j\pi/2} = j\omega I_m e^{j\omega t}$$

$$\frac{di(t)}{dt} \Longrightarrow I_m e^{j\omega t}\, j\omega$$

Изображение производной от некоторой функции равно изображению самой функции умноженному на jω.

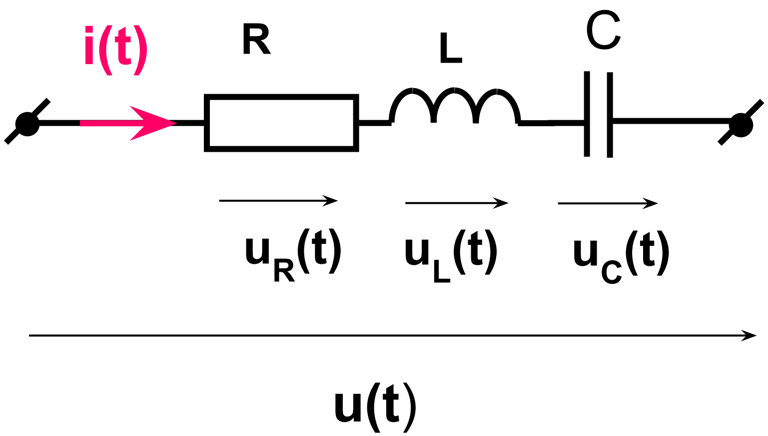
Изображение интеграла от синусоидальной функции

$$i(t) = I_m \sin\omega t \Rightarrow I_m e^{j\omega t}$$

$$\int i(t)dt = \frac{I_m}{\omega}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{I_m}{\omega} e^{j\omega t} e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\omega} I_m e^{j\omega t}$$

Изображение интеграла от некоторой функции равно изображению самой функции деленному на jω.

Комплексное сопротивление



$$u(t) = u_r(t) + u_c(t) + u_L(t)$$

$$u(t) = i(t)R + \frac{1}{C}\int i(t)dt + L\frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = I_m \sin\omega t \Longrightarrow I_m e^{j\omega t}$$

$$\underline{U}_m e^{j\omega t} = RI_m e^{j\omega t} + \frac{1}{c}\frac{1}{j\omega} I_m e^{j\omega t} + Lj\omega I_m e^{j\omega t} =$$

$$= I_m(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega c})e^{j\omega t} = I_m[R + j(\omega L - \frac{1}{\omega c})]e^{j\omega t} =$$

$$= I_m\underbrace{[R + j(x_L - x_c)]}_{\underline{Z}}e^{j\omega t}$$

$\underline{Z} = R + j\,(x_L - x_c)$ – **полное сопротивление участка электрической цепи.**

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi) \Longrightarrow I_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

$\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi}$ - **комплексная амплитуда**

$\underline{I} = I\, e^{j\varphi}$ - комплексное действующее значение

$i(t) \Longrightarrow \underline{I}\, e^{j\omega t}$ → Вращающий множитель

Комплексная проводимость

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$$

$$\underline{Y} = Ye^{j\varphi} = Y\angle\varphi = g - jb$$

$$\underline{z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g + jb}\,\frac{g - jb}{g - jb} = \frac{g}{g^2 + b^2} - j\frac{b}{g^2 + b^2}$$

$\underline{\underline{Z}} = R - jX$

$$\boxed{R = \frac{g}{g^2 + b^2}}$$

$$\boxed{X = \frac{b}{g^2 + b^2}}$$

Законы Кирхгофа в символической форме

1.Первый закон Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0 \longrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k = 0}$$

2.Второй закон Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t)R_k + L_k \frac{di_k(t)}{dt} + \frac{1}{c}\int i_k(t)dt = \sum_{k=1}^{n} e_k(t)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k \underline{z}_k = \sum_{k=1}^{n} \underline{E}_k}$$

Переменный ток

Законы Ома и Кирхгофа, записанные в символической форме абсолютно аналогичны, законам Ома и Кирхгофа записанным для цепей постоянного тока. Отсюда следует, что все методы расчета, разработанные для цепей постоянного тока, могут быть использованы для расчета цепей синусоидального тока с формальной заменой действительных чисел на комплексные.

Пример

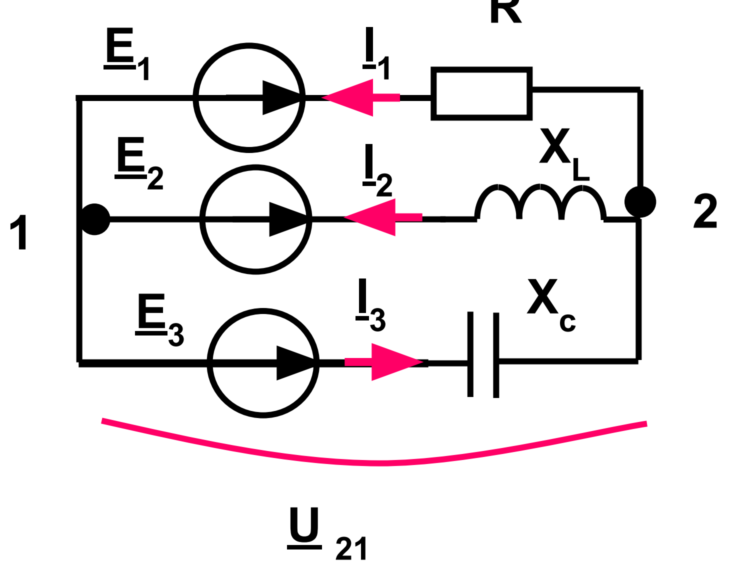


Рис.1

$E \longrightarrow \underline{E}$

$I \longrightarrow \underline{I}$

$R \longrightarrow \underline{Z}$

$g \longrightarrow \underline{Y}$

На постоянном токе

$$U_{12} = \frac{\sum_{k=1}^{n} E_k g_k}{\sum_{k=1}^{m} g_k} \qquad (1)$$

На переменном токе

$$\underline{U}_{12} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \underline{E}_k \underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^{m} \underline{Y}_k} \qquad (2)$$

Воспользуемся формулой(2) для схемы рис 1.

$$\underline{U}_{21} = \frac{\underline{E}_1 \frac{1}{R} + \underline{E}_2 \frac{1}{jx_L} + \underline{E}_3 \frac{1}{-jx_c}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jx_L} + \frac{1}{-jx_c}}$$

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{j\omega c}$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$\underline{Z}_c = -jx_c$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{21} - \underline{E}_1}{R}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{21} - \underline{E}_2}{jx_L}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{-\underline{U}_{21} + \underline{E}_3}{-jx_c}$$

Комплексная мощность

$$\underline{S} = \underline{U}\,\overset{*}{\underline{I}}$$

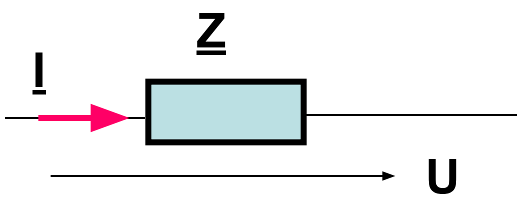
$\overset{*}{\underline{I}}$ -сопряженный комплекс тока ($\underline{I}=2\angle 10^0$, $\overset{*}{\underline{I}} = 2\angle -10^0$).

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ $\underline{U} = U\angle\varphi_U$ $\underline{I} = I\angle\varphi_i$

$$\underline{S} = U\angle\varphi_U I\angle -\varphi_i = UI\angle\varphi_u - \varphi_i = \underbrace{UI\cos\varphi}_{P} + j\underbrace{UI\sin\varphi}_{Q}$$

$$\underline{S}= P+jQ$$

В электрической цепи переменного тока соблюдается баланс мощностей в символической форме, т. е. $P_{потр}.=P_{отд}.$; $Q_{потр}=Q_{отд}.$; $\underline{S}_{отд}= \underline{S}_{потр}$.



$$\underline{U} = \underline{I}\,\underline{Z}$$

$$\underline{S}_{\text{ï î òð}.} = \underline{U}\overset{*}{\underline{I}} = \underline{Z}\underline{I}\overset{*}{\underline{I}} = I^2\underline{Z}$$

$$\underline{S}_{\text{ïîòð}.} = \sum_{k=1}^{n} I^2\underline{Z} = P_{\text{ïîòð}} - jQ_{\text{ïîòð}}.$$

$$\underline{S}_{\text{îòä}} = \sum_{k=1}^{n}\underline{E}_k\overset{*}{\underline{I}} + \sum_{k=1}^{n}\underline{U}_{ik}\overset{*}{I}_k$$