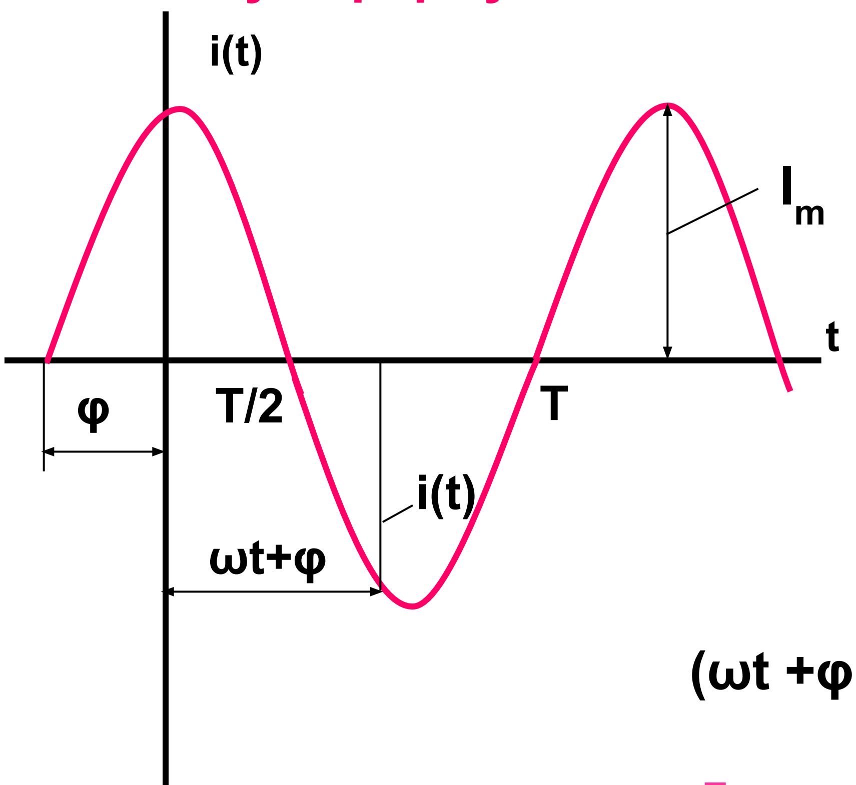
Линейные электрические цепи однофазного синусоидального тока

Цепью **однофазного синусоидального тока** называется электрическая цепь, находящаяся под воздействием **синусоидального источника питания одной частоты.**

Если в электрической цепи существует источник питания форма которого близка к синусоидальной, то в линейной электрической цепи все токи и напряжения будут иметь синусоидальную форму



I_m-амплитудное значение

i(t)- мгновенное значение

φ-начальная фаза

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ **- угловая частота**

(ωt +φ)- фаза колебания

$$i(t) = I_m \sin(\omega t+\varphi_i)$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t+\varphi_u)$$

$$e(t) = E_m \sin(\omega t+\varphi_E)$$

e(t), u (t), i (t) – мгновенные значения тока, напряжения ЭДС.

I_m, U_m, E_m –амплитудные значения тока, напряжения ЭДС.

φ_i, φ_u, φ_E- начальные фазы тока, напряжения ЭДС.

Максимальное, среднее и действующее значение синусоидальных тока, напряжения и ЭДС.

Определение среднего значения:

Под средним значением переменного синусоидального тока понимается его средне-интегральное значение за половину периода

$$I_p = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_m \sin\omega t dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} I_m \sin\frac{2\pi}{T} t dt =$$

$$= \frac{2}{T}\frac{T}{2\pi} I_m \left[-\cos\frac{2\pi}{T} t\right]\Big|_0^{T/2} = \frac{I_m}{\pi}\left[-\cos\pi + \cos 0\right] = \frac{2I_m}{\pi}$$

$$\boxed{I_{cp} = \frac{2I_m}{\pi}} \qquad \boxed{U_{cp} = \frac{2U_m}{\pi}} \qquad \boxed{E_{cp} = \frac{2E_m}{\pi}}$$

Действующее значение

Определение:

Под действующим значением переменного тока понимается его средне - квадратичное значение

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^{\;2}}{2T}\left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\frac{2\pi}{T}dt\right)} =$$

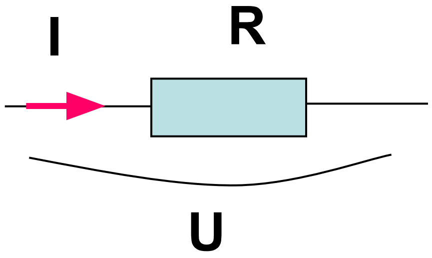
$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2{}_m \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)dt} = \qquad \sqrt{\frac{I_m^{\;2}}{2T}T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}}$$

Физически, действующее значение переменного тока равно такому постоянному току, при котором в активном сопротивлении за одно и то же время выделается такая же мощность, как и на переменном токе.

Докажем ,что это так.

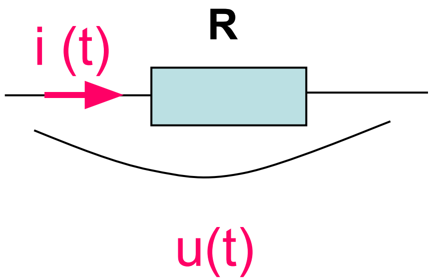
1. Пусть некоторое сопротивление обтекается постоянным током I



В этом сопротивлении выделяется мощность

$$P = I\,U = I^2 R$$

2. **Пусть то же самое сопротивление обтекается переменным синусоидальным током**



Введем понятие мгновенной мощности

p=i(t) u(t).

Тогда активная мощность выделяющаяся в этом сопротивлении за время равное периоду

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,i(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left(U_m \sin\frac{2\pi}{T}t\right)\left(I_m \sin\frac{2\pi}{T}t\right)dt =$$

$$= \frac{U_m I_m}{T}[\frac{1}{2}(\int_0^T \cos 0dt - \int_0^T \cos(2\frac{2\pi}{T}t)dt)] = \frac{U_m I_m}{2T} t \Big|_0^T =$$

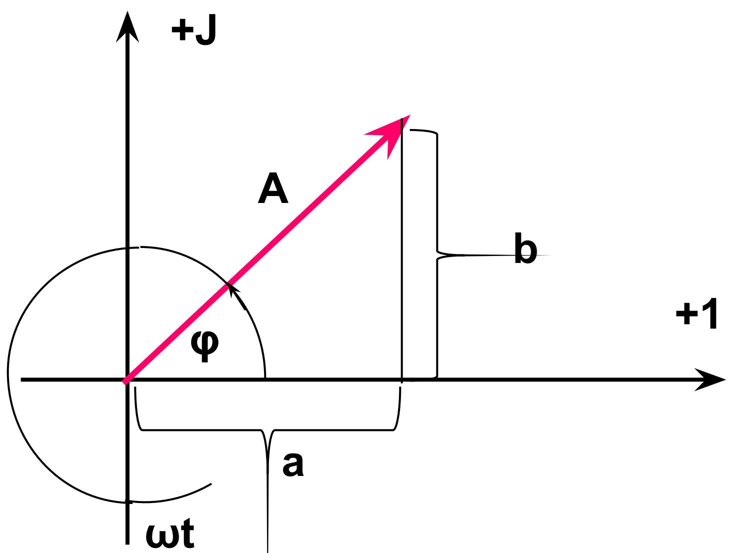
$$= \frac{U_m I_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} = UI = IRI = I^2R$$

На постоянном токе $P=I^2R$

На переменном токе $P=I^2R$, где I -действующее значение переменного тока

Векторные диаграммы

Рассмотрим вектор <u>A</u> , изображающий некоторое комплексное число на комплексной плоскости.



$$j = \sqrt{-1}$$ **- мнимая единица**

$$b = A \sin \varphi$$ **- Мнимая часть комплексного числа**

$$a = A \cos \varphi$$ **- действительная часть комплексного числа**

<u>A</u> = a +Jb - комплексное число в алгебраической форме

A – модуль комплексного числа

Если вектор $\overline{A}$ начать вращать против часовой стрелки со скоростью ω, то его проекция на мнимую ось может быть записана следующим образом $\overline{A} \longrightarrow$ Jm ($\underline{A}$)=Asin(ωt+β), что совпадает с записью мгновенного значения тока [$i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi)$]. Таким образом, мгновенное значение тока i(t) может быть изображено вектором, вращающимся на комплексной плоскости со скоростью ω .

$\underline{A}$ - комплексное число. Обозначается подчеркнутой буквой.

Переменный ток

Комплексное число может быть записано в следующих формах:

- **Алгебраической форме** $\underline{A} = a + jb$

  a- действительная часть комплексного числа

  b- мнимая часть комплексного числа

- **Показательной форме** $\underline{A} = A\,e^{j\beta}$

  A-модуль комплексного числа (неподчеркнутая буква)

  β-аргумент комплексного числа

- **Тригонометрической форме** $\underline{A} = A\cos\beta + jA\sin\beta$

При этом

a = A cos β, a b = A sin β; $A = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\beta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}$

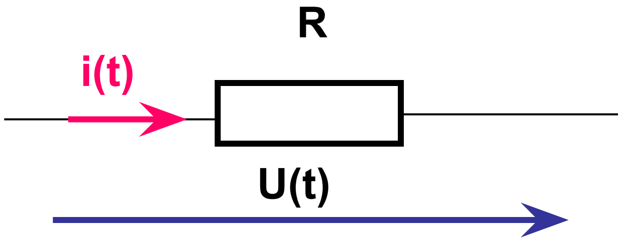
Совокупность векторов, изображающих токи и напряжения на комплексной плоскости называется векторной диаграммой.

Замечание.

Векторная диаграмма может быть изображена и без комплексной плоскости и без соблюдения масштабов векторов. Такая диаграмма называется качественной. При построении качественной векторной диаграммы тем не менее выдерживается (если это возможно) точный относительный фазовый сдвиг векторов. Такая диаграмма используется для расчета электрических цепей переменного тока.

Синусоидальный ток в элементах электрической цепи

1.Синусоидальный ток в активном сопротивлении



$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$; $u(t) = I(t)\,R$

$u(t) = I_m R \sin(\omega t + \varphi)$

Обозначим $I_m R = U_m$, тогда $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$

$\boxed{I_m R = U_m}$ -закон Ома для амплитудных значений

$I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$ -действующее значение тока

$U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$ -действующее значение напряжения

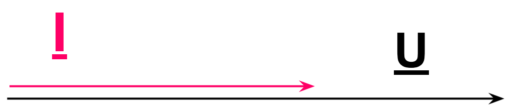
$\boxed{IR = U}$ -закон Ома для действующих значений

Качественная векторная диаграмма

Пусть начальная фаза тока φ =0

$i(t) = I_m \sin\omega t$

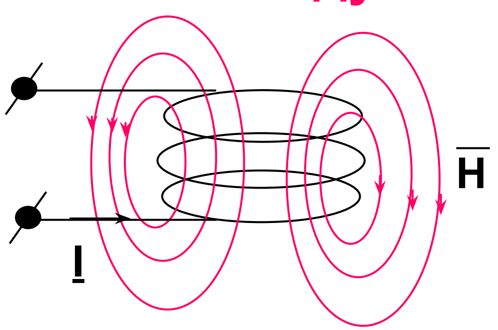
$u(t) = U_m \sin\omega t$



На активном сопротивлении ток и напряжение совпадают по фазе

2.Синусоидальный ток в индуктивности

2.1 Индуктивность



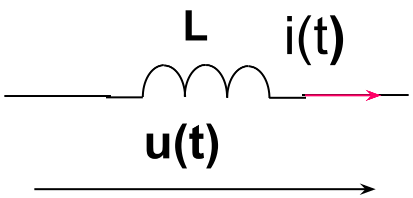
$\overline{H}$-напряженность магнитного поля [А/м]

$\overline{B} = \mu\overline{H}$ -индукция магнитного поля [Гс]

$\Phi = \int_s \overline{B}\,\overline{ds}$ - магнитный поток [вб]

$\psi = w\Phi$ -потокосцепление. $L = \dfrac{\psi}{I}$, [Гн]

L- коэффициент пропорциональности между потокосцеплением и током



$$i(t) = I_m \sin\omega t \qquad (1)$$

$$u(t) = -e(t) = \frac{d\psi}{dt}$$

$$\psi(t) = Li(t) \qquad u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad (2)$$

подставим в (2) ток i(t), т.е. (1)

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}(I_m \sin \omega t) =$$

$$= L\omega I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Обозначим $\omega L I_m = U_m$, а $\omega L = x_L$

$X_L = \omega L$ –реактивное сопротивление индуктивности (индуктивное сопротивление)

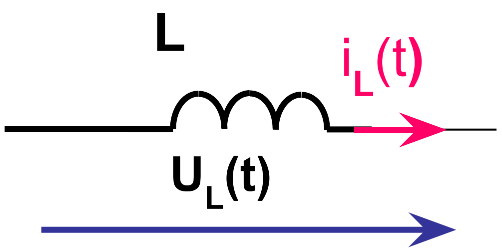
$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} x_L;$$

$$\boxed{U = I x_L}$$

$$\boxed{U_m = I_m x_L}$$

Закон Ома для действующих значений и амплитуд

Качественная векторная диаграмма

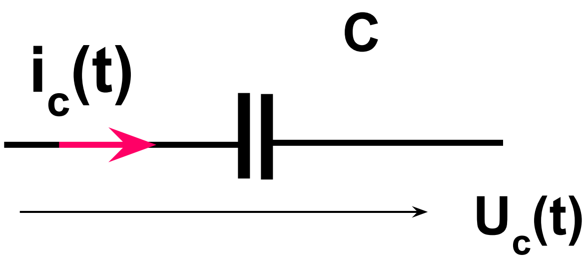


$$i_L(t) = I_m \sin\omega t$$

$$U_L(t) = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

В индуктивности напряжение опережает ток на угол 90 градусов.

3.Синусоидальный ток в емкости



$$u_c(t)=U_m\sin\omega t$$

$$q(t) = Cu(t) \qquad q(t)=C\,U_m\sin\omega t \qquad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$i_C(t)=C\omega U_m\cos\omega t=\omega C U_m\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_m &= \omega C U_m \\ I &= \omega C U \end{aligned}}$$

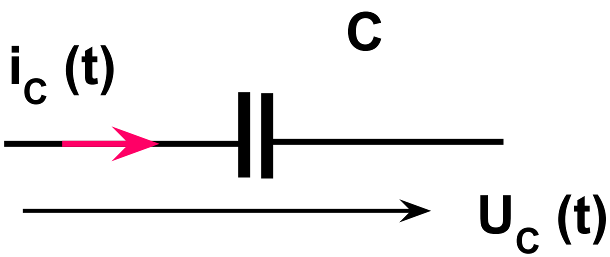
-Закон Ома для амплитудных и действующих значений на емкости

обозначим

$b_c = \omega C$- реактивная проводимость емкости

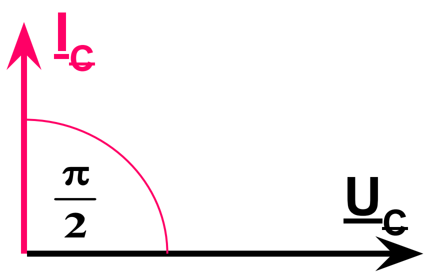
$$X_c = \frac{1}{b_c} = \frac{1}{\omega c}$$ -реактивное сопротивление емкости

Качественная векторная диаграмма



$$U_C\ (t)=U_m\sin\omega t$$

$$i_c(t)=I_m\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

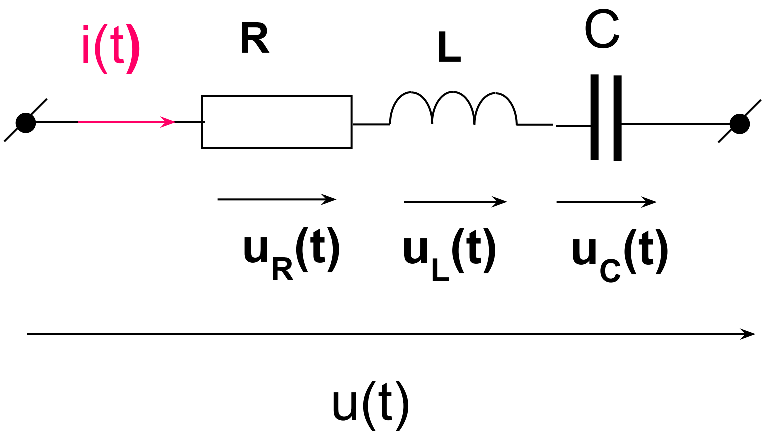


В емкости ток опережает приложенное к ней напряжение на 90 градусов.

$$X_L = \omega L$$ - индуктивное сопротивление

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$ - емкостное сопротивление

Ток при последовательном соединении R, L, C.



$$i(t)=I_m\sin\omega t \qquad (1)$$

$$u(t)=u_R(t)+u_L(t)+u_c(t) \qquad (2)$$

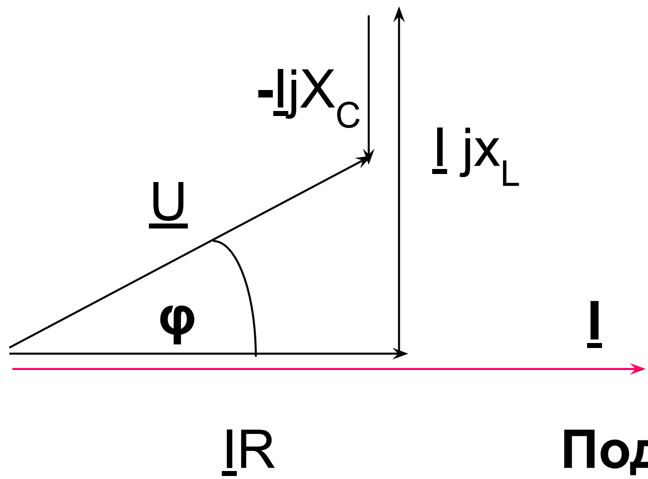
$$\underline{U}=\underline{U}_R+\underline{U}_L+\underline{U}_C \qquad (3)$$

В соответствии с (3) построим векторную диаграмму

напряжение $\underline{U}_R=\underline{I}R$ - совпадает по фазе с током $\underline{I}$

напряжение $\underline{U}_L=\underline{I}\ jx_L$ - опережает по фазе ток $\underline{I}$ на 90^0

напряжение $\underline{U}_c=\underline{I}(-jx_c)$ – отстает по фазе от тока на 90^0



Из векторной диаграммы следует

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

Подставив значения напряжений, получим

$$U = \sqrt{I^2R^2 + I^2(X_L - X_C)^2} = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_c)^2}$$

Введем обозначения $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ $\quad X = X_L - X_C$

Z – полное сопротивление участка электрической цепи

X - полное реактивное сопротивление участка электрической цепи

Если электрическая цепь содержит ряд последовательно соединенных активных сопротивлений, то суммарное активное сопротивление равно их сумме

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots\ldots + R_n$$

Если электрическая цепь содержит ряд последовательно соединенных индуктивных сопротивлений, то суммарное индуктивное сопротивление равно их сумме

$$X_L = X_{L1} + X_{L2} + X_{L3} \ldots + X_{Ln}$$

Если электрическая цепь содержит ряд последовательно соединенных емкостных сопротивлений, то суммарное емкостное сопротивление равно их сумме

$$X_C = X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} \ldots + X_{Cn}$$

$X=X_L-X_C$ -суммарное реактивное сопротивление участка электрической цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

-полное сопротивление участка электрической цепи

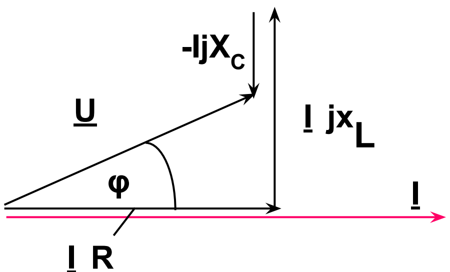


Рис1.

Если каждый вектор диаграммы рис1. разделить на ток, то получим вектора сопротивлений. (Рис2.)

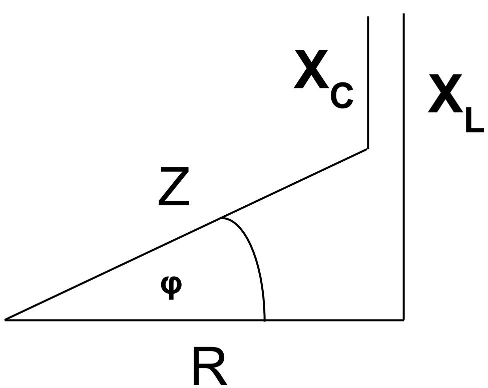


Рис2.

Некоторые формулы для сопротивлений.

$R=Z\cos\varphi$; $X= Z \sin\varphi$; $X=X_L-X_c$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{X}{R} = \operatorname{arctg}\frac{X_L - X_c}{R}$$

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} \rightarrow$$

Полное сопротивление участка электрической цепи – равно отношению амплитудных, либо действующих значений напряжения на концах участка к току в нем.

Полное сопротивление участка электрической цепи всегда положительно ($Z>0$).

Полное реактивное сопротивление участка электрической цепи (x) может быть как *положительным,* так и *отрицательным.*

Если $x>0$, то электрическая цепь носит индуктивный характер. В этом случае напряжение в цепи опережает ток и $\varphi>0$. (Рис.1).

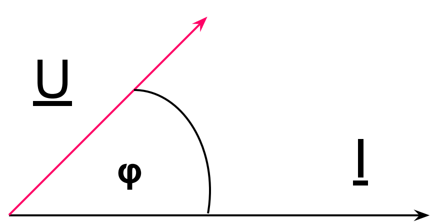


Рис.1

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{X_L - X_c}{R} > 0$$

Если **X<0, то $X_L<X_c$, электрическая цепь носит емкостной характер. В ней напряжение отстает от тока на некоторый угол φ.(Рис 2.)**

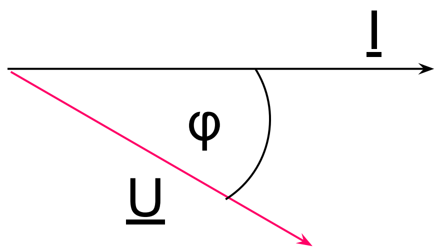


Рис.2

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{X_L - X_c}{R} < 0$$

Параллельное соединение R,L,C.

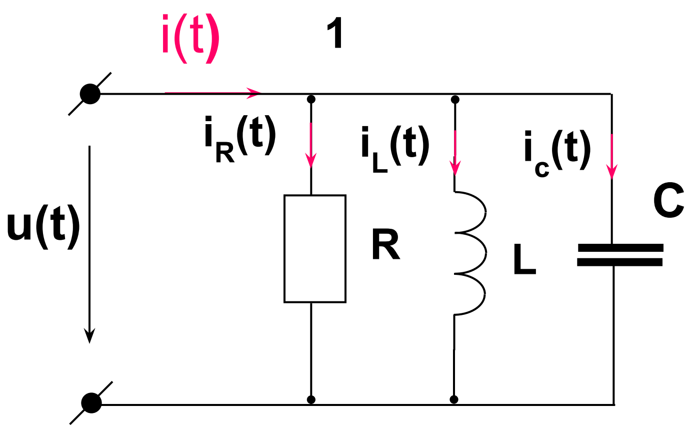


Рис 1.

Для мгновенных значений тока справедливы законы Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа для узла 1

$$i(t)=i_R(t)+ i_L(t)+i_c(t) \qquad (1)$$

Запишем 1 закон Кирхгофа в комплексной форме

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C \quad (2)$$

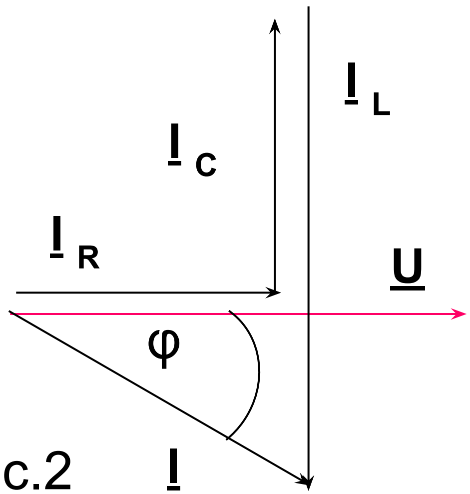


Рис.2

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} \qquad (3)$$

I, I_R, I_L, I_C- действующие значения

Введем понятия активной и реактивной проводимости

g- активная проводимость

$$b_L = \frac{1}{x_L}$$ - **реактивная проводимость индуктивности**

$$b_c = \frac{1}{x_c}$$ - **реактивная проводимость емкости**

$I_R=Ug$; $I_L=Ub_L$; $I_c=Ub_c$ Подставим эти выражения в (3)

$$I = U\sqrt{g^2 + (b_L - b_c)^2}$$

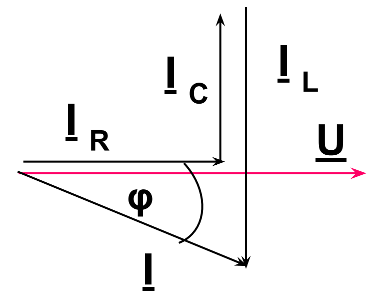
Подкоренное выражение имеет размерность проводимости, обозначим ее Y.

$$\boxed{Y = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2}}$$

Y-полная проводимость участка электрической цепи.

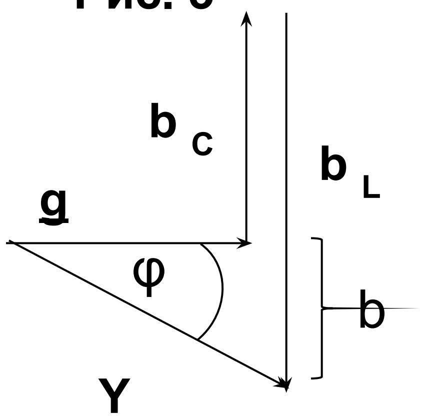
$b = (b_L - b_C)$ $\longrightarrow$ Полная реактивная проводимость участка электрической цепи.

Если $b_L > b_C$, цепь носит индуктивный характер, в цепи напряжение опережает ток.



Если векторную диаграмму токов (Рис.3) разделить на напряжение, получим диаграмму проводимостей. (Рис.4)

Рис. 3



$g = Y\cos\varphi$

$b = Y\sin\varphi$

$$Y = \sqrt{g^2 + b^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{g} = \operatorname{arctg}\frac{b_L}{b_C}$$

Рис.4

Эквивалентные зависимости, связывающие полные, активные и реактивные сопротивления и проводимости

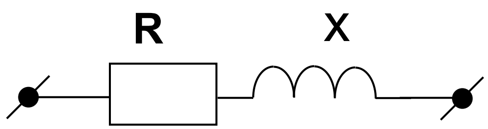


Рис.5

$$\cos\varphi = \frac{r}{z} \qquad \sin\varphi = \frac{x}{z} \qquad Z = \frac{1}{Y} \qquad (1)$$

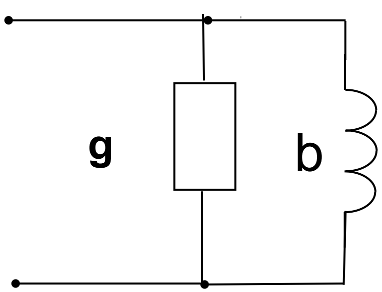


Рис.6

$$\cos\varphi = \frac{g}{Y} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{Y} \qquad Y = \frac{1}{Z} \qquad (2)$$

Z - полное сопротивление цепи

Переменный ток

Приравняем тригонометрические функции в формулах (1) и (2)

$$\frac{r}{z} = \frac{g}{Y} \quad \textbf{(3)} \qquad \frac{x}{z} = \frac{b}{Y} \quad \textbf{(4)}$$

Из (3) и (4) найдем $\mathbf{g}$ и b.

$$\boxed{g = \frac{rY}{Z} = \frac{r}{Z^2} = \frac{r}{r^2 + x^2}} \quad (5)$$

По формулам 5 и 6 производится пересчет сопротивлений последовательной схемы в параллельную

$$\boxed{b = \frac{xY}{Z} = \frac{x}{Z^2} = \frac{x}{r^2 + x^2}} \quad (6)$$

Если из уравнений (3) и (4) найти r и x, то получим формулы для пересчета сопротивлений параллельной схемы в последовательную

$$r = \frac{gZ}{Y} = \frac{g}{Y^2} = \frac{g}{g^2 + b^2}$$

$$x = \frac{bZ}{Y} = \frac{b}{Y^2} = \frac{b}{g^2 + b^2}$$

Мощность в цепи переменного тока

1. Активная мощность

$u(t)=U_m \sin \omega t$

$i(t)=I_m \sin(\omega t- \varphi)$

Введем понятие мгновенной мощности

$p = u(t)\, i(t)$ - **мгновенная мощность**

Активная мощность обозначается большой буквой P и равна среднему значению мгновенной мощности за период.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T (U_m \sin\frac{2\pi}{T}t)(I_m \sin\frac{2\pi}{T}t - \phi)dt =$$

$$= \frac{U_m I_m}{T}\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^T \cos\phi\, dt - \int_0^T \cos(2\frac{2\pi}{T}t - \phi)dt\right)\right] = t\frac{U_m I_m}{2T}\cos\phi \Big|_0^T =$$

$$= \frac{U_m I_m}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \cos\varphi = UI\cos\varphi$$

$$\boxed{P = UI\cos\varphi}$$

Другие формулы для расчета активной мощности

$\boxed{P = I^2 R}$ $\boxed{P = U_a R}$ $\boxed{P = UI_a}$ $\boxed{P = \frac{U^2}{R}}$

2.Реактивная мощность

$\boxed{Q = UI\sin\varphi}$ $\boxed{Q = U_p I}$ $\boxed{Q = UI_p}$

$\boxed{Q = I^2 X}$ $\boxed{Q = U^2 b}$ $\boxed{Q = \frac{U^2}{X}}$

U_p, I_p - реактивные составляющие напряжения и тока соответственно

3.Полная мощность

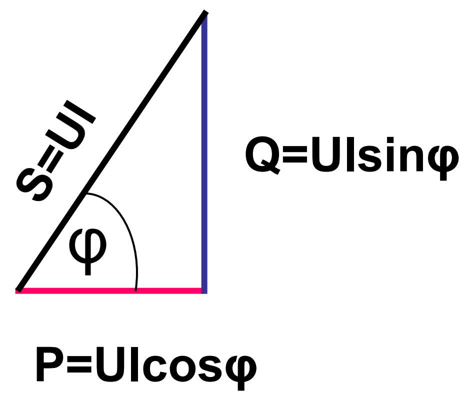
S=UI - полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{Q}{P}$$

cos φ – коэффициент мощности

Треугольник мощностей



Связь между активной, реактивной и полной мощностью

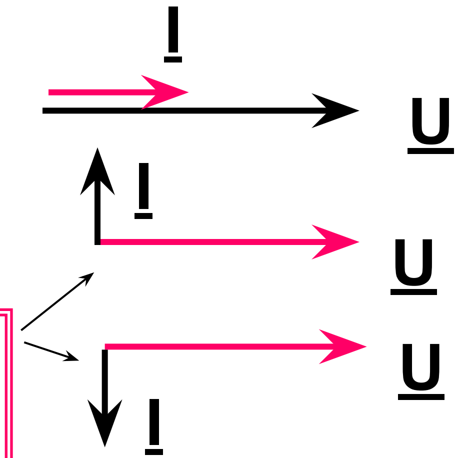
$$\boxed{P=S\cos\varphi}$$

$$\boxed{Q=S\sin\varphi}$$

Зависимость между активной мощностью и коэффициентом мощностью

$\cos\varphi = 1 \longrightarrow P = P_{max} \qquad \varphi = 0$

$\cos\varphi = 0 \longrightarrow P = 0 \qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

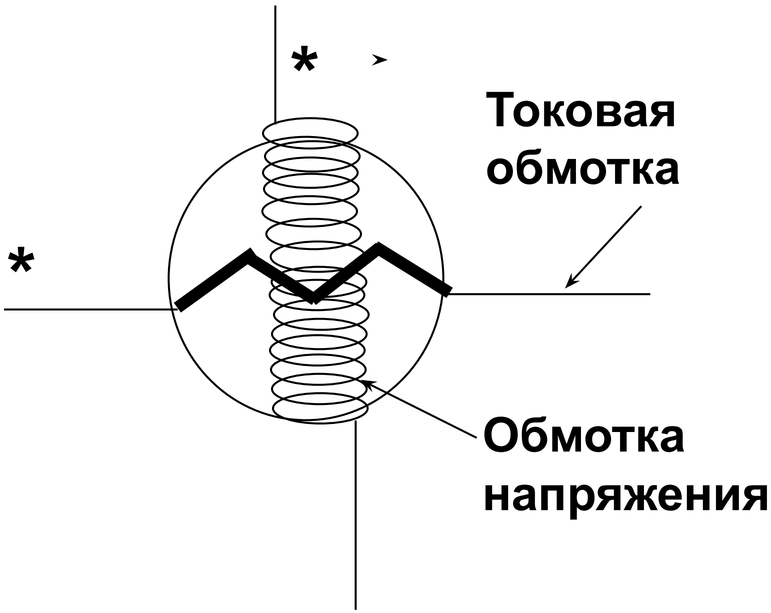


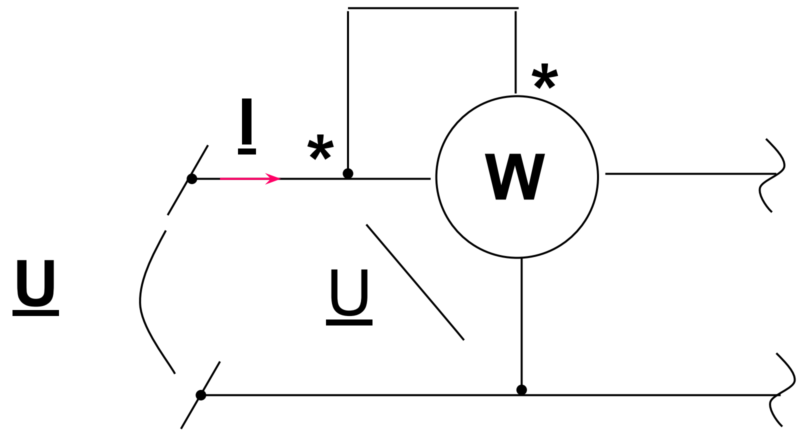
В реактивных сопротивлениях активная мощность *<u>отсутствует</u>*

<u>Измерение активной мощности</u>

Активная мощность в электрической цепи измеряется приборами, которые называются ваттметрами.

ВАТТМЕТР



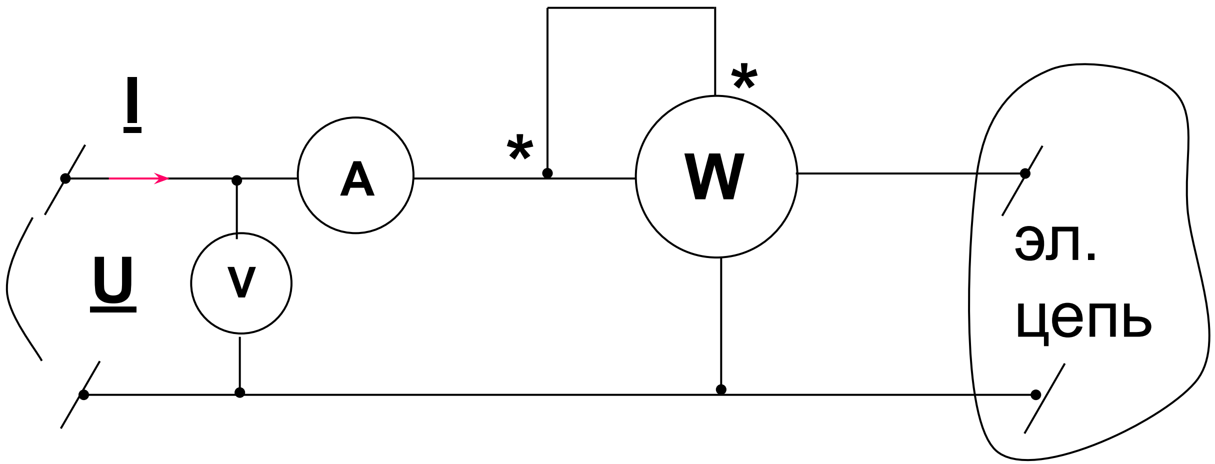


$$P = UI\cos\varphi$$

Сопротивление обмотки напряжения очень велико ($Z_U = \infty$)

Сопротивление токовой обмотки практически равно нулю ($Z_I = 0$)

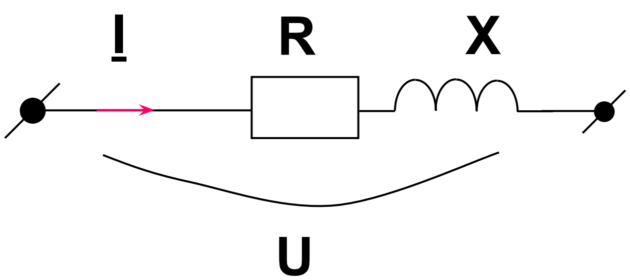
Экспериментальное определение параметров электрической цепи.



Необходимо определить параметры электрической цепи (Z,R,L,C,X) по результатам измерений включенных в цепь приборов.

При расчетах будем предполагать, что сопротивление амперметра и токовой обмотки ваттметра равны нулю, а вольтметра и обмотки напряжения ваттметра равны бесконечности.

Если считать схему замещения электрической цепи последовательным соединением активного и индуктивного сопротивлений ,то:



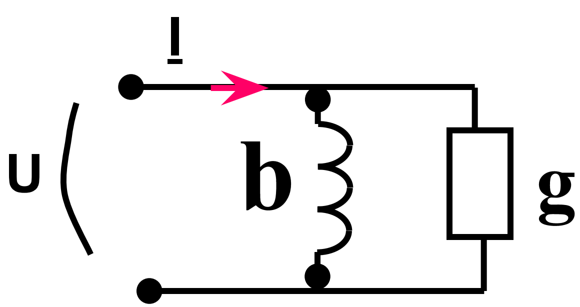
Известно: A → I

V → U

W → P

$$Z = \frac{U}{I} \qquad R = \frac{P}{I^2} \qquad X = \sqrt{Z^2 - R^2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{X}{R}$$

При параллельной схеме замещения

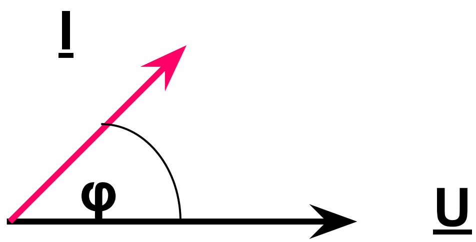


$$Y = \frac{I}{U} \qquad g = \frac{P}{U^2} \qquad b = \sqrt{Y^2 - g^2}$$

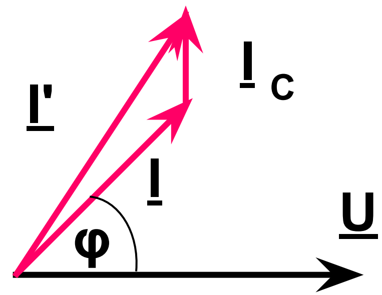
Для определения характера реактивного сопротивления подключают последовательно к исследуемой цепи емкостное сопротивление x_c~2x и вновь определяют полное реактивное сопротивление x'. Если x'>x, то цепь имеет емкостной характер и полное реактивное сопротивление - емкостное, если x'<x, то полное реактивное сопротивление индуктивное.

При параллельной схеме замещения к цепи подключают параллельно емкостное сопротивление $x_c \geq 2x$.Если при подключении емкости ток в цепи увеличивается, то характер цепи емкостной, если уменьшается , то индуктивный.

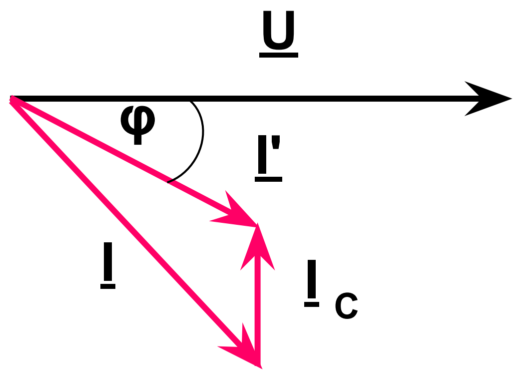
Построим для этих случаев векторные диаграммы.



φ<0



a)



Φ>0

b)