



Розділ 6

ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У РІЗНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Зміст

6.1

Хвильові рівняння

6.2

Поняття про однорідні плоскі електромагнітні хвилі

6.3

Хвильові рівняння однорідних плоских хвиль

6.4

Особливості поширення однорідних плоских хвиль у різних середовищах

6.4.1

Напівпровідне середовище (діелектрик із втратами)

6.4.2

Діелектрики та провідники

6.5

Поверхневий ефект у провідниках

6.6

Поляризація однорідних плоских хвиль

6.7

Висновки

6.8

Контрольні питання та завдання

Згадаємо, що є радіоканалом

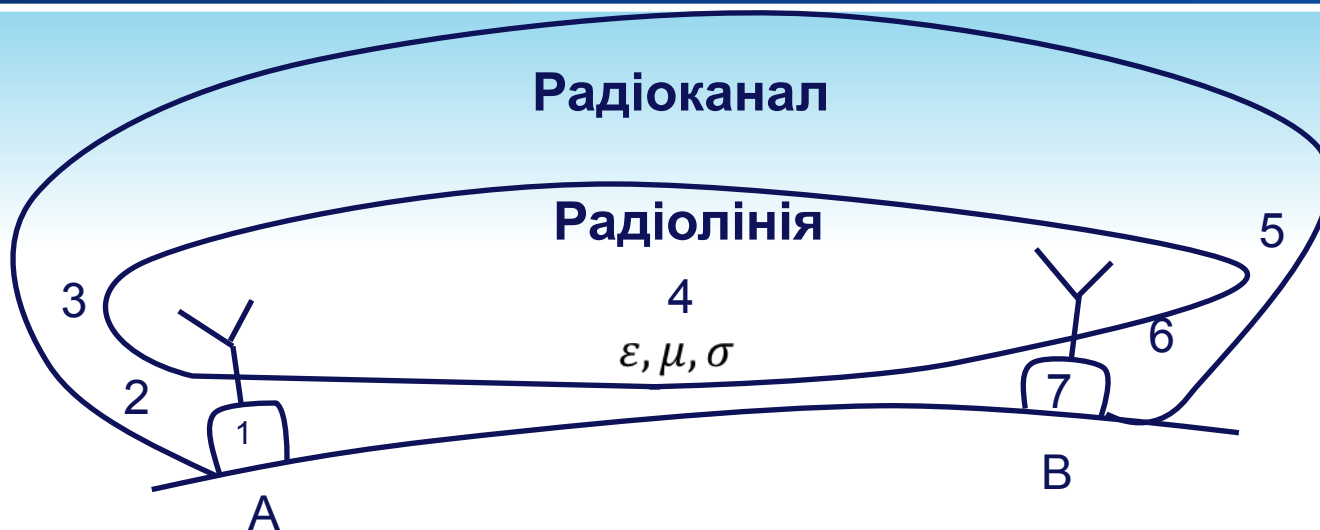


Рисунок 6.1 Спрощена схема організації радіозв'язку

Розглянемо типову для телекомунікації ситуацію. Є передавальна А та приймальна В радіостанції

Після відповідного формування сигналу, його підсилення та перетворення в комплексі 1, проходження через фідерний тракт 2 й випромінювання антеною 3, електромагнітна енергія поширюється в навколишньому середовищі 4 (з параметрами: діелектрична проникність ϵ , магнітна проникність μ , питома електропровідність σ) сприймається антеною 5, й через фідерний тракт 6 потрапляє до приймального пристрою 7, в якому обробляється та як інформація надається користувачу. Цей процес реалізовано радіоканалом.

6.1 Хвильові рівняння

Проаналізуємо електромагнітні процеси у навколишньому просторі із застосуванням рівнянь Максвелла . Скористаємось першим та другим рівняннями:

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Здійснимо операцію *rot* стосовно другого рівняння Максвелла та підстановку із першого, й отримаємо зі зміною порядку диференціювання:

$$\text{rot rot} \vec{E} = -\text{rot} \left(\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (6.1)$$

Представимо ліву частину (6.1) за відомою тотожністю векторного аналізу:

$$\text{rot rot} \vec{E} = \text{grad div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$$

отримаємо:

$$-\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} \quad (6.2)$$

На основі третього та п'ятого рівнянь Максвелла маємо:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

після перегрупування доданків (6.2) отримаємо рівняння:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.3)$$

відоме **як рівняння Гельмгольца**.

У цьому рівнянні є складники, які визначають процес у просторі й часі, а також є добуток $\epsilon\mu$, який пов'язаний із **швидкістю поширення** електромагнітних хвиль (), тобто рівняння (6.3) характеризує **хвильовий процес**.

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$$

Якщо аналогічно застосувати операцію *rot* до обох частин першого рівняння Максвелла, отримаємо хвильове рівняння для вектора напруженості магнітного поля:

$$\nabla^2 \vec{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.4)$$

Якщо аналогічно застосувати операцію *rot* до обох частин першого рівняння Максвелла, отримаємо хвильове рівняння для вектора напруженості магнітного поля:

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (6.4)$$

Для гармонічних процесів наведемо хвильові рівняння в комплексній формі. Отже, запишемо функцію, її першу та другу похідні:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(t) &= \vec{E}_m e^{j\omega t}, \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= j\omega \vec{E}_m e^{j\omega t}, \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \vec{E}_m e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Підставимо (6.5) в (6.3) з урахуванням комплексного представлення функції $\rho_m(t) = \rho_m e^{j\omega t}$ й після скорочення $e^{j\omega t}$ отримаємо:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + \omega^2 \mu \left(\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \dot{\vec{E}}_m = \text{grad} \frac{\dot{\rho}_m}{\varepsilon} \quad (6.6)$$

Формула в дужках (6.6) – **комплексна діелектрична проникність** $\dot{\varepsilon}$

З урахуванням цього, (6.6) матиме вигляд:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + \omega^2 \dot{\mu} \dot{\varepsilon} \dot{\vec{E}}_m = \text{grad} \frac{\dot{\rho}_m}{\varepsilon} \quad (6.6a)$$

Аналогічним чином можна отримати комплексну форму хвильового рівняння для вектора напруженості магнітного поля:

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + \omega^2 \dot{\mu} \dot{\varepsilon} \dot{\vec{H}}_m = 0 \quad (6.7)$$

У загальній формі хвильові рівняння є складними. Але практичні розрахунки виконують за конкретних обставин, коли можна прийняти деякі умови, що дозволяють спростити хвильові рівняння. Наприклад, в однорідному середовищі, на великій відстані від джерела електромагнітного поля кривизною фронту хвилі можна знехтувати й вважати розподіл амплітуд векторів напруженості електричного та магнітного складників електромагнітного поля рівномірним. Така хвиля має назву **однорідна пласка**, її застосовують для виконання практичних розрахунків.

6.2 Поняття про однорідні плоскі електромагнітні хвилі

Припустимо, що джерело електромагнітного поля розташоване в початку декартової системи координат, і хвиля поширюється в додатному напрямі осі z . Звернемося до сферичного фронту хвилі, фрагмент ΔS , який можна вважати плоским, поширюється вздовж осі z (на що вказує вектор Пойнтінга) (рис. 6.2). Хвиля, яка може бути представлена таким фронтом, має назву *поперечна* (плоска).

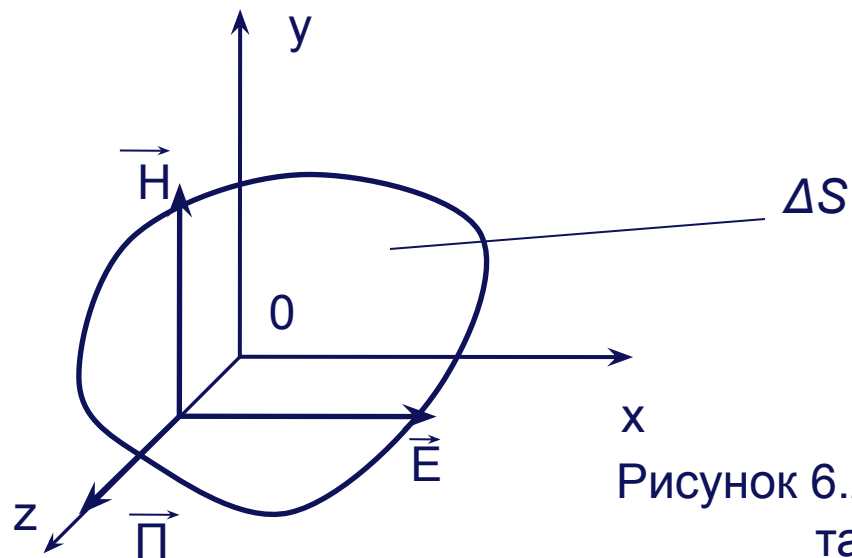


Рисунок 6.2 – Фрагмент фронту хвилі та вектор Пойнтінга

Відомо, що вектори \mathbf{E} та \mathbf{H} в просторі взаємно перпендикулярні, кожен з них має, в загальному випадку, три складники E_x, E_y, E_z та H_x, H_y, H_z , відповідно.

З'ясуємо три можливі ситуації:

1. Складники E_z та H_z відсутні, тобто $E_z = 0$ і $H_z = 0$. В цій ситуації є тільки складники E_x, E_y та H_x, H_y й така хвиля має назву **поперечна хвиля, або хвиля типу T** (від *transverse* – поперечний); в англійській літературі й літературі попередніх років її називають **хвиля типу TEM** – поперечна (T) електромагнітна (EM);
2. Складник E_z є, складник H_z відсутній, тобто $E_z \neq 0, H_z = 0$ й така хвиля має назву **поздовжня електрична хвиля типу E**; в англійській літературі й літературі попередніх років її називають **хвиля типу TM** – поперечна (T) магнітна (M);
3. Складник H_z є, складник E_z відсутній, тобто $E_z = 0, H_z \neq 0$ й така хвиля має назву **поздовжня електрична хвиля типу H**; в англійській літературі й літературі попередніх років її називають **хвиля типу TE** – поперечна (T) електрична (E).

Таким чином, за умови великої відстані від джерела, ділянку фронту хвилі ΔS можна вважати пласкою, для якої $E_z = 0$ і $H_z = 0$, тобто – це хвиля типу T , що має не шість, а тільки чотири проекції E_x, E_y та H_x, H_y . Таке припущення суттєво спрощує опис хвилі.

За умов однорідного й без втрат ($\sigma \Rightarrow 0$) середовища, тобто значення незмінні: $\varepsilon = \text{const}$ та $\mu = \text{const}$, вектори напруженості електричного та магнітного полів у всіх точках простору ділянки ΔS не змінюють значення та напрям. Тоді, відповідні частинні похідні дорівнюють нулю:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Стисло та наочно обґрунтування назв типів хвиль наведено в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 Основні типи електромагнітних хвиль

№ пп.	Складники поля		Тип хвилі		Назва
	E_z	H_z	Позначення	Попередня та англо- мовна літе- ратура	
1	$E_z = 0$	$H_z = 0$	T	TEM	Поперечна
2	$E_z \neq 0$	$H_z = 0$	E	TM	Поздовжня електрична (поперечна магнітна)
3	$E_z = 0$	$H_z \neq 0$	H	TE	Поздовжня магнітна (поперечна електрична)

З урахуванням прийнятих припущень для пласкої однорідної хвилі формули стають суттєво простішими, що полегшує розрахунки.

Пласка однорідна хвиля, за поширення якої напрям вектора – незмінний, має назву *лінійно-поляризована хвиля*. Поляризація електромагнітних хвиль має важливе практичне значення. Наприклад, від виду поляризації електромагнітної хвилі залежить взаємне розташування приймальної та передавальної антен, що є важливим в організації зв'язку та забезпеченні електромагнітної сумісності.

6.3 Хвильові рівняння однорідних плоских хвиль

Проаналізуємо ситуації, якщо в просторі заряд відсутній. Тоді хвильове рівняння (6.6a) електричного поля матиме вигляд:

$$\nabla^2 \vec{E}_m + \omega^2 \epsilon \mu \vec{E}_m = 0 \quad (6.9)$$

Вектор визначають трьома проекціями:

$$\vec{E}_m = iE_{mx} + jE_{my} + kE_{mz} \quad (6.10)$$

Рівнянню (6.9) з урахуванням (6.10) задовольняє система трьох рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 E_{mx} + \omega^2 \epsilon \mu E_{mx} &= 0, \\ \nabla^2 E_{my} + \omega^2 \epsilon \mu E_{my} &= 0, \\ \nabla^2 E_{mz} + \omega^2 \epsilon \mu E_{mz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Для однорідних плоских хвиль (див. умови (6.8)) з урахуванням того, що $E_z = 0$, $H_z = 0$ за визначенням плоскої (поперечної) хвилі, система (6.11) спрощується і має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbb{E}_{mx}}{\partial z^2} + \omega^2 \mathbb{\epsilon} \mu \mathbb{E}_{mx} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \mathbb{E}_{my}}{\partial z^2} + \omega^2 \mathbb{\epsilon} \mu \mathbb{E}_{my} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Аналогічний вигляд має система для напруженості магнітного поля:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbb{H}_{mx}}{\partial z^2} + \omega^2 \mathbb{\epsilon} \mu \mathbb{H}_{mx} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \mathbb{H}_{my}}{\partial z^2} + \omega^2 \mathbb{\epsilon} \mu \mathbb{H}_{my} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.12a)$$

Рівняння (6.12) та (6.12а) мають однакову структуру й, відповідно, аналогічний розв'язок. Це *однорідні диференціальні рівняння другого порядку*. Їх розв'язок має два доданки із показовими функціями, якщо коефіцієнт другого доданка є від'ємним, тобто:

$$\dot{k}^2 = -\omega^2 \varepsilon \mu \quad (6.13) \quad \text{або} \quad \dot{k} = j\omega \sqrt{\varepsilon \mu} \quad (6.13a)$$

Обґрунтування його назви - **коефіцієнт поширення хвилі** див. (6.19) та (6.20).

Перепишемо системи (6.12) і (6.12а) з урахуванням коефіцієнта k :

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{mx}}{\partial z^2} - \dot{k}^2 \dot{E}_{mx} = 0 \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{mx}}{\partial z^2} - \dot{k}^2 \dot{H}_{mx} = 0 \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{my}}{\partial z^2} - \dot{k}^2 \dot{E}_{my} = 0 \quad (6.14a)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{my}}{\partial z^2} - \dot{k}^2 \dot{H}_{my} = 0 \quad (6.15a)$$

Розв'язок цих рівнянь визначає проекції векторів \vec{H}_m та \vec{E}_m у будь-який момент часу t . В рівняннях (6.14) – (6.15а) є взаємно пов'язані пари, тому замість чотирьох рівнянь можна розв'язувати лише два.

Скористаємось першим рівнянням Максвелла, яке встановлює зв'язок між векторами напруженості електричного і магнітного полів:

$$\text{rot} \vec{H}_m = j\omega \varepsilon \vec{E}_m$$

Використаємо форму запису вектора через проекції та скористаємось визначенням операції *rotor*. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H}_m &= \vec{i} (j\omega \varepsilon E_{mx}) + \vec{j} (j\omega \varepsilon E_{my}) + \vec{k} (j\omega \varepsilon E_{mz}) = \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial H_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial H_{my}}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial H_{mz}}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial H_{my}}{\partial x} - \frac{\partial H_{mz}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Із урахування ознак однорідних плоских хвиль (6.8) отримаємо з (6.16):

$$-\frac{\partial H_{my}}{\partial z} = j\omega \epsilon E_{mx} \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial H_{mx}}{\partial z} = j\omega \epsilon E_{my} \quad (6.18)$$

Тобто проекція пов'язана з E_{mx} , а H_{my} пов'язана з E_{my} - ці пари створюють поперечну хвилю (типу T).

З'ясуємо, яким чином описують процес поширення електромагнітних хвиль в просторі та вплив на цей процес параметрів середовища.

6.4. Особливості поширення однорідних плоских хвиль у різних середовищах

6.4.1. Напівпровідникове середовище (діелектрик з втратами)

Задля отримання рівняння, що описує процес поширення електромагнітної хвилі, визначимо розв'язок одного з рівнянь – (6.14), відомий з курсу математики:

$$\dot{E}_{\text{mx}} = \dot{E}_{\text{mx}_1} e^{-kx} + \dot{E}_{\text{mx}_2} e^{kx} \quad (6.19)$$

Комплексний коефіцієнт, який має назву **коефіцієнт поширення**, запишемо у формі:

$$k = \alpha + j\beta, \quad (6.20)$$

де **α – коефіцієнт згасання**, **β – коефіцієнт фази**. Із урахуванням (6.20) формула (6.19) матиме вигляд:

$$\dot{E}_{\text{mx}} = \dot{E}_{\text{mx}_1} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \dot{E}_{\text{mx}_2} e^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad (6.21)$$

Миттєві значення, тобто як функція часу:

$$E_{\text{mx}} = E_{\text{mx}_1} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_1) + E_{\text{mx}_2} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_2) \quad (6.22)$$

- ❖ У рівняннях (6.21) та (6.22) перші доданки характеризують хвилю, що віддаляється від початку відліку (координат), тобто *пряму хвилю* або *хвилю, що падає*. Її амплітуда зменшується за законом , тому параметр має назву – **коефіцієнт згасання**. Параметр характеризує стан відставання за фазою залежно від тому він має назву – **коефіцієнт фази**. Таким чином, комплексний коефіцієнт має обґрунтовану назву – **коефіцієнт поширення** електромагнітних хвиль.

- ❖ У рівняннях (6.21) та (6.22) перші доданки характеризують хвилю, що віддаляється від початку відліку (координат), тобто *пряму хвилю* або *хвилю, що падає*. Її амплітуда зменшується за законом $e^{-\alpha z}$, тому параметр α має назву – **коефіцієнт згасання**. Параметр β характеризує стан відставання за фазою залежно від z тому він має назву – **коефіцієнт фази**. Таким чином, комплексний коефіцієнт має обґрунтовану назву – **коефіцієнт поширення** електромагнітних хвиль.

Другі доданки рівнянь (6.21) та (6.22) характеризують хвилю, що наближається до початку відліку – тобто **це зворотна, або відбита** хвиля. Обвідні таких хвиль наведено на рис. 6.3.

Для кращого сприйняття аргументу із двох змінних часу t і відстані z наведемо функцію $f_m = F_m \cos(\omega t - \beta z)$ (за умови, що початкові фази та коефіцієнт згасання дорівнюють нулю) і побудуємо відповідні залежності, з яких впливає взаємозв'язок функції f від t (рис. 6.4).

На рис. 6.4а представлено залежність від t функції виду $f_1 = F_m \cos \omega(t - \beta z / \omega)$ із зсувом фази $\beta z / \omega$, а на рис. 6.4б представлено залежність від $z - f_2 = F_m \cos \beta(\omega t / \beta - z)$ із зсувом фази $\omega t / \beta$.

Ще раз звертаємо увагу на сутність фази хвильового процесу $(\omega t - \beta z)$, яка має два доданка ωt , де $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, тобто характеризує відношення періодів: на тригонометричному колі – 2π , та в часі – період T ; й βz , де $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, тобто характеризує відношення періодів: а тригонометричному колі – 2π та за відстанню – довжина хвилі λ .

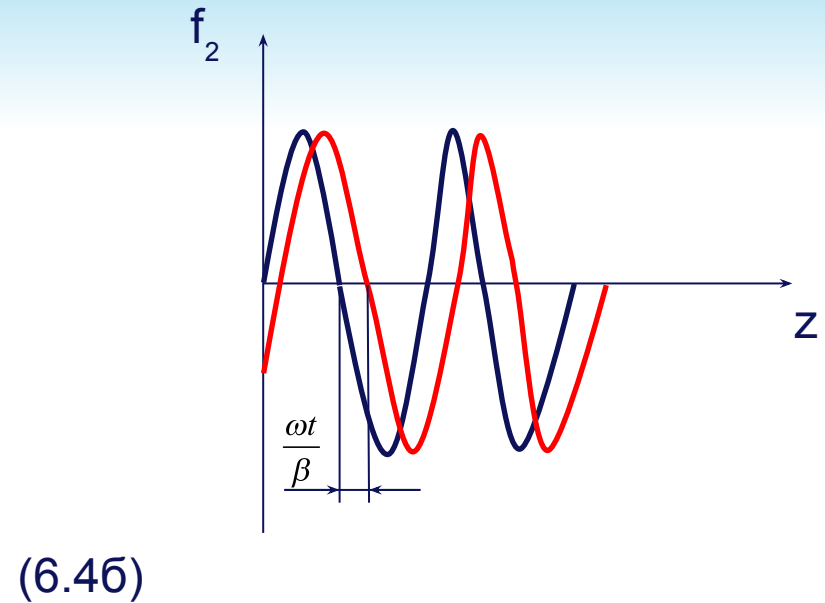
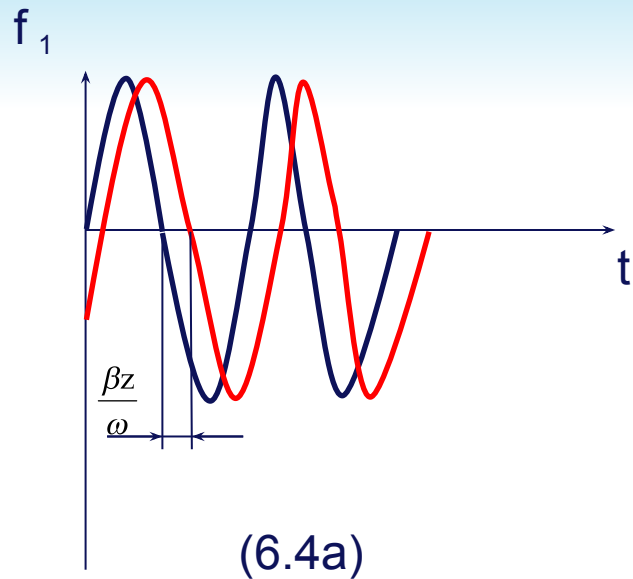


Рисунок 6.4. Фрагменти залежностей хвильового процесу: а – як функції часу, б – як функції відстані

Аналогічно для (6.15a) маємо:

$$H_{my} = H_{my_1} e^{-az} e^{-j\beta z} + H_{my_2} e^{az} e^{j\beta z} = H_{y_1} e^{-kz} + H_{y_2} e^{kz}$$

$$H_{my} = H_{my_1} e^{-az} \cos(\omega t - \beta z + \psi_1) + H_{my_2} e^{az} \cos(\omega t + \beta z + \psi_2) \quad (6.24)$$

- ❖ Встановимо зв'язок між складниками та . На підставі (6.17) після диференціювання (6.23) з урахуванням з (6.20) та перегрупування доданків маємо:

$$(KH_{my_1} - j\omega L_{mx_1}) e^{-kz} + (KH_{my_2} - j\omega L_{mx_2}) e^{kz} = 0. \quad (6.25)$$

- ❖ Рівняння (6.25) є правильним для будь яких значень , якщо обидві складника (у дужках) тотожно дорівнюють нулю, тобто із (6.25) маємо два рівняння:

$$KH_{my_1} - j\omega L_{mx_1} = 0, \quad (6.26) \quad KH_{my_2} + j\omega L_{mx_2} = 0. \quad (6.26a)$$

Із формул (6.26) та (6.26а) випливає, що між та існує взаємозв'язок. Цей взаємозв'язок визначають величиною:

$$Z_{w_1} = \frac{E_{mx_1}}{H_{my_1}} = \frac{k}{j\omega\varepsilon} \quad (6.27) \quad Z_{w_2} = \frac{E_{mx_2}}{H_{my_2}} = \frac{k}{j\omega\varepsilon} \quad (6.27a)$$

який має одиницю вимірювання [Ом] та відповідну назву – *хвильовий опір*, точніше – *імпеданс* – внаслідок комплексного характеру. З урахуванням (6.13а), (4.41):

$$Z_w = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}} \quad (6.28)$$

Хвильовий імпеданс можна представити в алгебраїчній формі:

$$Z_w = X_w + jY_w = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{j\omega\sqrt{\mu}}{j\omega\sqrt{\mu}} = \frac{j\omega\mu}{k} = \frac{\beta\omega\mu + j\alpha\omega\mu}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (6.29)$$

❖ де дійсний складник:

$$X_w = \frac{\beta\omega\mu}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (6.30)$$

❖ уявний складник:

$$Y_w = \frac{\alpha\omega\mu}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (6.31)$$

❖ В полярній системі координат

$$Z_w = \frac{E_{mx_1} e^{j\varphi_1}}{H_{my_1} e^{j\varphi_2}} = \frac{E_{mx_1}}{H_{my_1}} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = Z_w e^{j\phi} \quad (6.32)$$

❖ де модуль та фаза хвильового імпедансу, відповідно

$$Z_w = \sqrt{X_w^2 + Y_w^2} = \frac{\mu\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (6.33)$$

❖ Значення модуля характеризує співвідношення амплітуд напруженості електричного та магнітного полів, ϕ – зсув за фазою між миттєвими значеннями складників E та H .

$$\phi = \arctg \frac{Y_w}{X_w} = \arctg \frac{\alpha}{\beta} \quad (6.33a)$$

- ❖ Із (6.27) та (6.27а) маємо:

$$Z_{w_1} = -Z_{w_2} \quad (6.34)$$

- ❖ Таким чином, хвильові імпеданси для прямої та зворотної хвиль однакові за модулем, але відрізняються за фазою на кут .
- ❖ Тоді співвідношення (6.24) можна записати у вигляді:

$$H_y(t, z) = \frac{E_{mx_1} e^{-\alpha z}}{Z_w} \cos(\omega t - \beta z + \psi_1 - \varphi) + \frac{E_{my_2} e^{\alpha z}}{Z_w} \cos(\omega t - \beta z + \psi_2 - \varphi + \pi) \quad (6.35)$$

- ❖ Якщо вважати простір, в якому поширюється хвиля однорідним, то зворотної (відбитої, вторинної) хвилі не буде, тобто другий складник (доданок) правої частини (6.21), (6.22), (6.23), (6.24), (6.25), (6.35) відсутній.

Графіки миттєвих значень функцій $E_x(t,z)$ та $H_y(t,z)$ прямої хвилі представлено на рис. 6.5 в момент , коли фаза хвилі в будь-якій точці простору відстає за фазою на значення , амплітуда менша в раз. В наступний момент фаза хвилі у всіх фіксованих точках буде зміненою на значення , а амплітуда буде незмінною, тобто маємо *рухому хвилю* з вектором Пойнтінга вздовж осі .

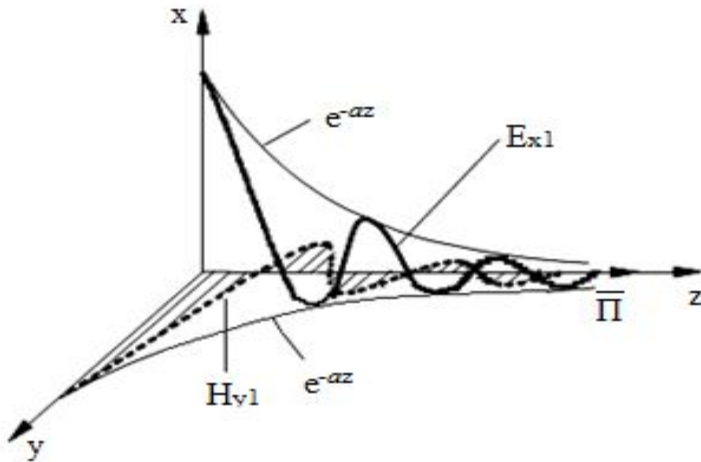


Рисунок 6.5 - Залежності $E_{x_1}(z)$ та $H_{y_1}(z)$

Хвильове рівняння визначає процес поширення у просторі та за часом електромагнітних хвиль, тобто процес, який поширюється з певною швидкістю. Визначимо швидкість поширення хвилі. Для цього наведемо приклад повної фази θ у прямій хвилі в момент t_1 на відстані z_1 та визначимо момент t_2 ($t_2 > t_1$), для якого у точці z_2 повна фаза також дорівнює θ , тобто:

$$\theta = \omega t_1 - \beta z_1 + \varphi,$$

$$\theta = \omega t_2 - \beta z_2 + \varphi.$$

$$(6.36)$$

❖ Тоді
$$t_2 = t_1 + \frac{\beta(z_2 - z_1)}{\omega} \quad (6.37)$$

❖ Звідси швидкість поширення хвилі або фазова швидкість дорівнює:

$$v = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi}{\beta T}, \quad -\omega^2 \mu = \alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2. \quad (6.38)$$

❖ де величину T називають *періодом* хвилі.

❖ Визначимо *довжину* хвилі, що поширюється. Нехай $t_2 - t_1 = T$ період гармонічної функції. Тоді довжина хвилі

$$\lambda = z_2 - z_1 = vT = \frac{\omega T}{\beta} = \frac{2\pi f T}{\beta} = \frac{2\pi}{\beta} \quad (6.39)$$

❖ Таким чином, досліджено закономірності, за які описують процес поширення електромагнітних хвиль. Визначимо розрахункові формули для коефіцієнтів α і β .

❖ Піднесемо до квадрату формули (6.13а) та (6.20) й отримаємо рівняння:

$$-\omega^2 \mu = \alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2. \quad (6.40)$$

❖ З урахуванням (4.41), де $\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon$

❖ Маємо
$$-\omega^2 \varepsilon \mu + j \omega \mu \sigma = \alpha^2 - \beta^2 + j 2 \alpha \beta \quad (6.40a)$$

❖ Окремо для дійсної частини та уявної частини відповідно є:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= -\omega^2 \varepsilon \mu, \\ 2\alpha\beta &= \omega \mu \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

Розв'язок системи (6.41) з урахуванням того, що α – додатна дійсна величина:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right]} \quad (6.42)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} + 1 \right]} \quad (6.43)$$

Із урахуванням тангенса кута втрат (4.39) маємо:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2} \left[\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1 \right]} \quad (6.42a)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2} \left[\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1 \right]} \quad (6.43a)$$

На практиці, зазвичай маємо середовища, в яких або $I_{\text{пр}} \gg I_{\text{зм}}$ (провідники), або $I_{\text{пр}} \ll I_{\text{зм}}$ (діелектрики). Для цих випадків співвідношення можна спростити.

6.4.2. Діелектрики та провідники

У пункті 6.4.1 наведено формули, які характеризують процес поширення електромагнітних хвиль в напівпровідному середовищі (діелектрик з втратами). Ознакою діелектрика або провідника є співвідношення між густиною струму провідності та зміщення, або значення тангенса кута втрат $tg\delta \ll 1$ – діелектрик, $\alpha=0$; $tg\delta > 1$ – провідник.

Величини, що характеризують процес поширення електромагнітних хвиль в різних середовищах, для зручності застосування зведено в таблицю 6.2.

Таблиця 6.2 - Величини, які характеризують процес поширення електромагнітних хвиль в різних середовищах

Параметр		Середовище		
Символ	Назва	Напівпровідне (діелектрик з втратами)	Діелектричне	Провідне
α	Коефіцієнт згасання	$\omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]}$	0	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
β	Коефіцієнт фази	$\omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]}$	$\frac{2\pi}{\lambda}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
$ Z_w $	Модуль хвильового імпедансу	$\frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$
φ	Фаза хвильового імпедансу	$\arctg \frac{\alpha}{\beta}$	0	$\frac{\pi}{4}$
X	Дійсна частина хвильового імпедансу	$\frac{\beta\omega\mu}{\alpha^2 + \beta^2}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$
Y	Уявна частина хвильового імпедансу	$\frac{\alpha\omega\mu}{\alpha^2 + \beta^2}$	0	$\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$
v	Швидкість поширення	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$
λ	Довжина хвилі	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{v}{f}$	$2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$ 32

На підставі співвідношень наведених в табл. 6.2 можна сформулювати такі висновки:

- в *діелектричному середовищі* хвиля поширюється *без втрат*, фаза хвильового опору дорівнює нулю;
- в *провідному середовищі* втрати *пропорційні* $\sqrt{\sigma}$, фаза хвильового опору незмінна, довжина хвилі залежить від параметрів середовища й частоти.

Таким чином, найбільш сприятливим для поширення електромагнітних хвиль є діелектричне середовище. В реальних провідниках електромагнітне поле швидко згасає, що призвело до поширеного поняття “витискання” (що не є коректним) поля змінного струму до його поверхні, тобто в провіднику має місце, так званий, *поверхневий ефект (skin-effect)*.

6.5. Поверхневий ефект у провідниках

Визначимо, яким чином розподілено поле у напівобмеженому пласкому провіднику, в якому протікає змінний струм $i(t) = I_m \sin \alpha t$ (рис. 6.4). Навколо провідника створюється магнітне поле, вектор \vec{H} скеруємо вздовж осі y , тобто $\vec{H} = \vec{j}H_y$.

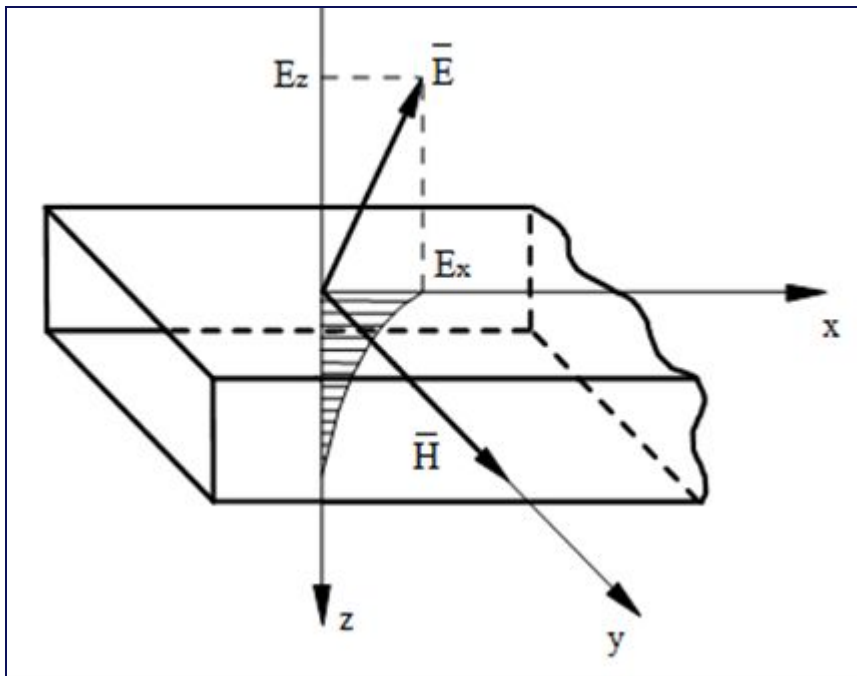


Рисунок 6.5. Процес проникнення електромагнітного поля в провідник

Якщо провідник ідеальний – вектор \vec{E} скеровано перпендикулярно провіднику. Проте, в реальному провіднику на будь-якому відрізку провідника різниця потенціалів не дорівнює нулю, тому є складник E_x (рис. 6.4), й фактичний вектор \vec{E} зорієнтовано із нахилом до верхньої поверхні провідника. Як відомо, вектори \vec{E} та \vec{H} зорієнтовані взаємно перпендикулярно. Тому вектор Пойнтинга (5.5) $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$ має складники:

$$\left. \begin{aligned} \vec{i}\Pi_x &= -\vec{k}E_z \times \vec{j}H_y, \\ \vec{k}\Pi_z &= \vec{i}E_x \times \vec{j}H_y. \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

Складник $\vec{k}\Pi_z$ характеризує поле в напрямі осі z , тобто всередину провідника. Амплітуда модуля напруженості електричного поля:

$$E(z) = E(0)e^{-\alpha z} \quad (6.45)$$

зменшується за експоненціальним законом.

Співвідношення (6.45) помножимо на σ й отримаємо формулу для модуля густини струму:

Співвідношення (6.45) помножимо на σ й отримаємо формулу для модуля густини струму:

$$J(z) = J(0)e^{-\alpha z}, \quad (6.45a)$$

значення якого також стає меншою за експоненціальним законом. Визначимо відстань, за якої поле стане менше в e раз. Скористаємось співвідношенням:

$$\frac{E(z)}{E(0)} = \frac{J(z)}{J(0)} = e^{-\alpha z}, \quad (6.46)$$

із співвідношення (6.46) маємо $e^{-1} = e^{-\alpha\delta}$, де параметр δ називають – *глибина проникнення поля й струму в провіднику (skin depth)*:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}. \quad (6.47)$$

З (6.47) випливає, що глибина проникнення стає меншою із зростанням питомої електропровідності, магнітної проникності та частоти. Для немагнітних провідників магнітна проникність $\mu \approx \mu_0$, частоту визначає реальний процес, тому на значення δ суттєво впливає значення σ , та частоти.

Ефект згасання поля (й струму) в провіднику має назву *поверхневий ефект (skin-effect)*, який полягає в тому, що струм протікає в деякому поверхневому шарі провідника. Інколи кажуть, що струм «витискується» на поверхню – це не є коректно, бо фактично значення сили струму *стає меншим в напрямі до центру провідника* внаслідок згасання. Тому для застосування провідників на радіочастотах використовують провідники із нанесенням на їх поверхню найкращого провідника – срібла ($\sigma_{\text{сріб}} = 1,05$) або за умови $d \gg \delta$, де d – діаметр провідника застосовують багатожильний провідник – так званий, *літцендрат*.

У зв'язку із зменшенням перерізу протікання струму на високих частотах активний опір провідника стає більшим.

Його значення, за умови $d \gg \delta$, дорівнює:

$$R_f = \frac{l}{\pi d \sigma \delta}, \quad (6.48)$$

Для постійного струму значення активного опору:

$$R_0 = \frac{4l}{\pi d^2 \sigma}. \quad (6.49)$$

Для практичного застосування є корисна формула:

$$R_f = \frac{1}{4} R_0 \left(1 + 3 \sqrt{\frac{f}{f_{\text{гр}}}} \right), \quad (6.50)$$

де $f_{\text{гр}}$ – значення частоти, від якого слід враховувати поверхневий ефект:

$$f_{\text{гр}} = \frac{9}{\pi d^2 \mu \sigma}. \quad (6.51)$$

6.6. Поляризація однорідних плоских хвиль

Поляризація – це явище, що характеризує орієнтацію векторів напруженості електричного та/або магнітного поля.

Назву виду поляризації визначає геометрична фігура, яку описує край вектора \vec{E} . Припустимо, що фронт однорідної плоскої хвилі розташовано в площині xOy (рис. 6.5). Кут нахилу вектора напруженості електричного поля \vec{E} з віссю $Ox - \theta$ має назву *кут поляризації*. Площина, в якій розташовано вектори напруженості електричного поля \vec{E} та Пойнтінга $\vec{\Pi}$, має назву *площина поляризації* (рис. 6.5).|

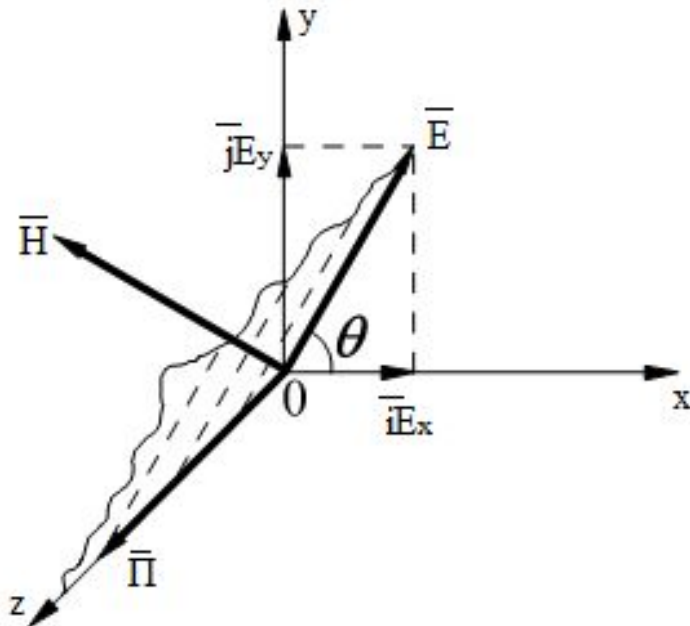


Рисунок 6.5. Площина поляризації однорідної плоскої хвилі

Для хвилі, яку можна описати гармонічним процесом:

$$\vec{E}(t) = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y = \vec{i}E_{mx} \cos(\omega t + \varphi_1) + \vec{j}E_{my} \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (6.52)$$

де E_{mx} , E_{my} – амплітудні значення E_x та E_y ; φ_1 , φ_2 – початкові фази.

Наведемо можливі ситуації.

1. *Початкові фази однакові*, тобто $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Тоді модуль вектора $|\vec{E}|$:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{mx}^2 + E_{my}^2} \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.53)$$

є функцією часу.

Кут поляризації від часу є незалежним :

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{E_{my}}{E_{mx}} \right). \quad (6.54)$$

Така поляризація має назву – лінійна поляризація – вертикальна або горизонтальна.

2. Нехай різниця фаз $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}$, $E_{mx} = E_{my} = E$. Тоді

$$\vec{E} = E_m (\vec{i} \cos \omega t + \vec{j} \sin \omega t) . \quad (6.55)$$

Значення модуля вектора є незмінним:

$$E_{mx} = E_{my} = E = \text{const} . \quad (6.56)$$

Значення кута поляризації є функцією часу:

$$\theta = \text{arctg}(\text{tg} \omega t) = \omega t . \quad (6.57)$$

Тобто у цьому випадку довжина вектора незмінна, й він описує коло. Така поляризація має назву – *колова поляризація – лівостороння або правостороння* (стосовно приймача).

3. Нехай *амплітуди* мають *різні значення* $E_{mx} \neq E_{my}$, $0 < \varphi_1 - \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$.

За цих умов модуль $|E|$ та кут поляризації є величинами, що змінюються, край вектора описує *еліпс*. Така поляризація має назву ***еліптична поляризація – лівостороння або правостороння***.

Таким чином, назву поляризації визначає геометрична фігура, яку описує за часом вектор у відповідній площині.

Електромагнітні хвилі поширюються в конкретному середовищі. В підрозділі 4.6 показано, що характер середовища (провідне; напівпровідне, або діелектрик з втратами; діелектричне) визначають не лише електродинамічними параметрами (діелектрична проникність, магнітна проникність, питома електропровідність σ), й частота. Тобто одне й те саме середовище може бути ***провідником, напівпровідником (діелектрик з втратами), діелектриком*** – з урахуванням значення частоти електромагнітного поля.

6.7. Висновки

1. На підставі першого та другого рівнянь Максвелла отримано хвильові рівняння, в яких вектори поля пов'язані з *простором, часом* та величиною, яка визначає *швидкість поширення хвилі*.
2. З метою спрощення розв'язання хвильового рівняння та з урахуванням практичної можливості – доцільно вважати на великій відстані від джерела випромінювання в однорідному середовищі фронт хвилі *пласким*, тобто аналізувати однорідні пласкі хвилі.
3. За класифікацією електромагнітних хвиль розрізняють: *поперечні хвилі* типу Т (ТЕМ), *поздовжні електричні хвилі* типу Е (ТМ), *поздовжні магнітні хвилі* типу Н (ТЕ).
4. Із розв'язання хвильового рівняння випливає, що існує два процеси – *прямий* (хвиля, що падає) та *зворотний* (відбита, вторинна хвиля).
5. Параметр, який характеризує процес поширення хвилі – *коефіцієнт поширення* де $-\alpha$ *коефіцієнт згасання*, β – *коефіцієнт фази*.

$$\dot{k} = \alpha + j\beta$$

6. Як впливає з розв'язання хвильового рівняння, між значеннями напруженості електричного та магнітного полів існує *взаємозв'язок*, визначений величиною, яка має одиницю вимірювання [ом], й тому має назву – *хвильовий імпеданс*, яка є коректна для дальнього поля, бо хвильовий процес є в дальньому полі (див. розд. 7) й залежить від параметрів середовища.

$$Z_w = \frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}}$$

7. Електромагнітні хвилі поширюються в різних середовищах. Ознакою діелектрика або провідника є співвідношення між густиною струму та зміщення, або значення тангенса кута втрат $\operatorname{tg}\delta$

8. В *діелектричному середовищі* хвиля поширюється без втрат, фаза хвильового опору дорівнює нулю.

9. В *провідному середовищі* втрати пропорційні , фаза хвильового опору незмінна, довжина хвилі залежить від параметрів середовища й частоти.

10. Найбільш *сприятливим* для поширення електромагнітних хвиль є діелектричне середовище.

11. У реальних провідниках в напрямі до центра електромагнітне поле швидко згасає, що призвело до поширеного поняття, «витискання поля змінного струму до його поверхні», яке не є коректним, тому його не слід застосовувати.

12. Ефект згасання поля (й струму) в провіднику має назву поверхневий (*skin-effect*), який полягає в тому, що струм протікає в деякому поверхневому шарі на поверхні провідника, тобто значення сили струму в напрямі до центру провідника стає меншим.

13. Із формули $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ випливає, що глибина проникнення поля у провідник стає меншою із зростанням питомої електропровідності, магнітної проникності та частоти.

14. У зв'язку із зменшенням перерізу протікання струму на високих частотах *активний опір провідника стає більшим*.

15. Значення частоти, за якого слід враховувати поверхневий ефект, залежить зокрема від діаметра провідника, тому доцільно застосовувати багатожильні провідники, в яких провідники мають менший діаметр.

16. Поширення електромагнітних хвиль обумовлено процесом поляризації: *лінійна, колова й еліптична* (правостороння та лівостороння).

6.8. Контрольні питання та завдання

1. Обґрунтуйте підхід до виведення *рівняння Гельмгольца та виведіть його.*
2. Охарактеризуйте *компоненти рівняння Гельмгольца.*
3. Обґрунтуйте доцільність та наведіть *рівняння Гельмгольца в комплексній формі.*
4. Охарактеризуйте *типи електромагнітних хвиль.*
5. Охарактеризуйте *пласкі однорідні хвилі.*
6. Наведіть *хвильові рівняння однорідних плоских хвиль.*
7. Наведіть розв'язок *хвильових рівнянь плоских хвиль. Поясніть сутність коефіцієнтів: поширення, згасання та фази електромагнітних хвиль.*
8. Обґрунтуйте виведення коефіцієнтів пропорційності між *напруженостями електричного та магнітного полів.*
9. Визначте *швидкість поширення фронту електромагнітної хвилі.*
10. Виведіть формулу для *коефіцієнта згасання.*
11. Виведіть формулу для *коефіцієнта фази.*
12. Поясніть особливість визначення *коефіцієнтів згасання та фази для ідеального діелектрика.*
13. Поясніть особливість визначення *коефіцієнтів згасання та фази для ідеального провідника.*
14. Поясніть сутність *поверхневого ефекту у провідниках.*
15. Поясніть сутність величини *глибина проникнення.*
16. Поясніть *залежність активного опору провідника від частоти.*
17. Обґрунтуйте значення *граничної частоти, від якої треба враховувати поверхневий ефект.*
18. Поясніть сутність та практичне значення *поляризації електромагнітних хвиль.*