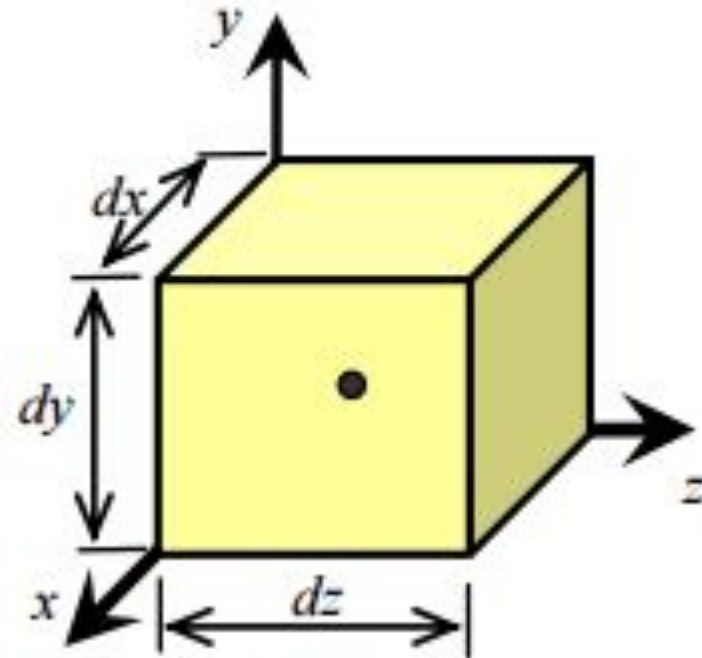
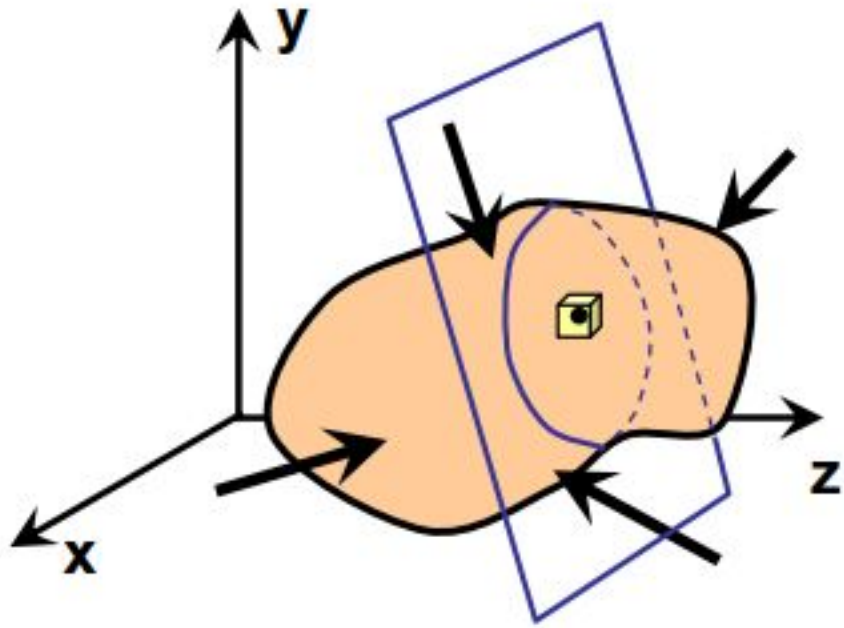


ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Напряженное состояние в точке – совокупность напряжений, действующих во множестве площадок, проходящих через данную точку.

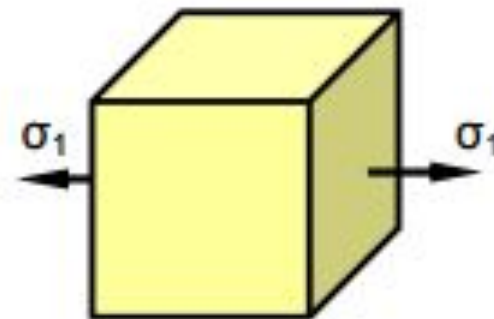


Главные напряжения – нормальные напряжения, действующие по главным площадкам.

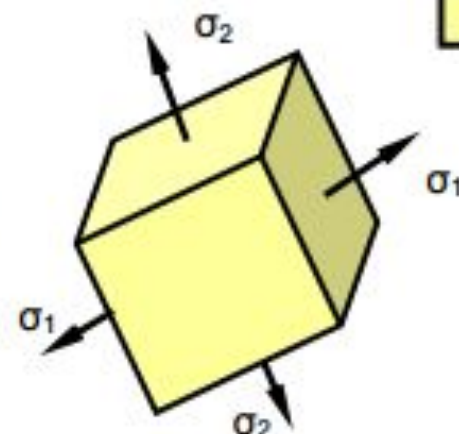
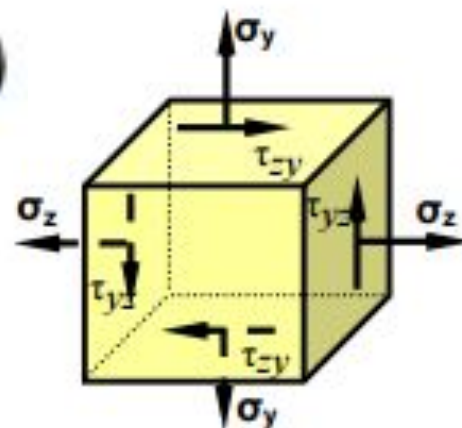
На главных площадках нормальные напряжения принимают свои экстремальные значения $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Виды напряженного состояния

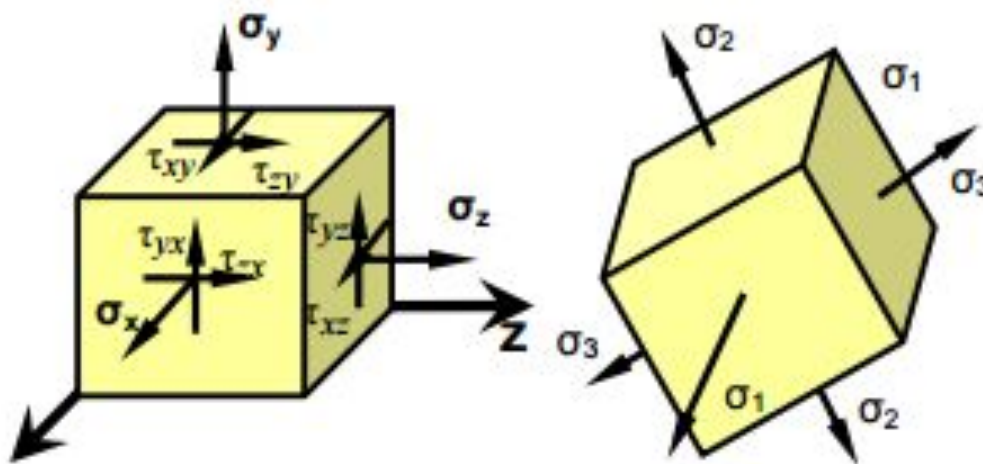
Линейное (одноосное)



Плоское (двухосное)

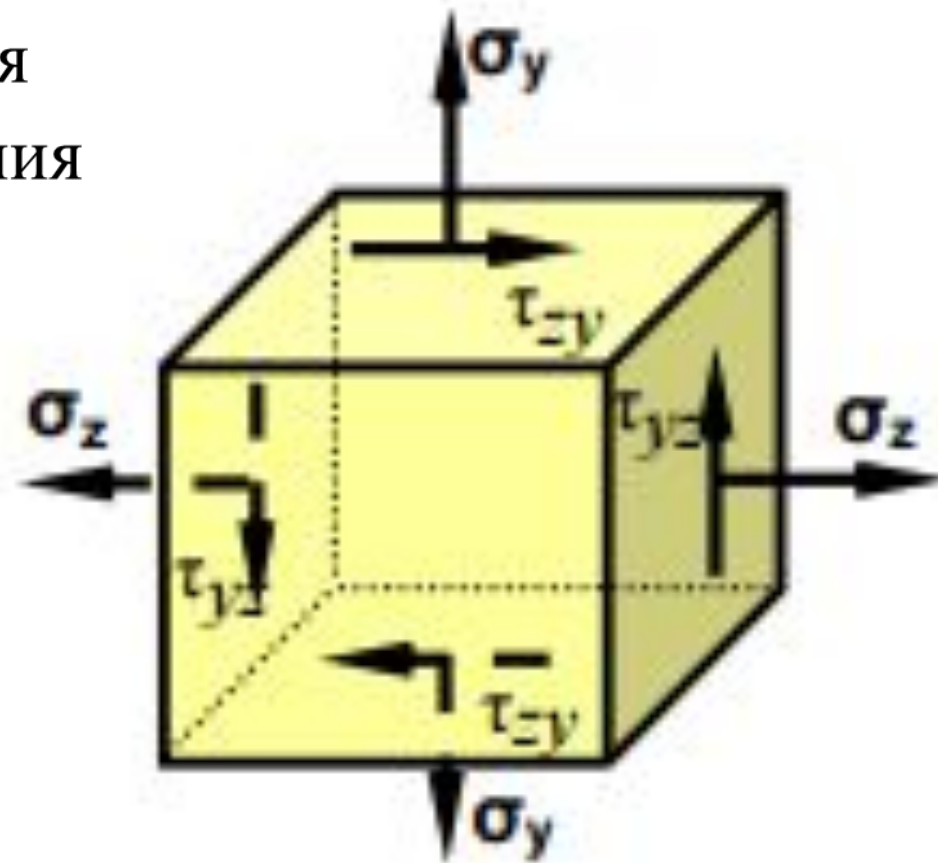


Объемное (трехосное)



$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения

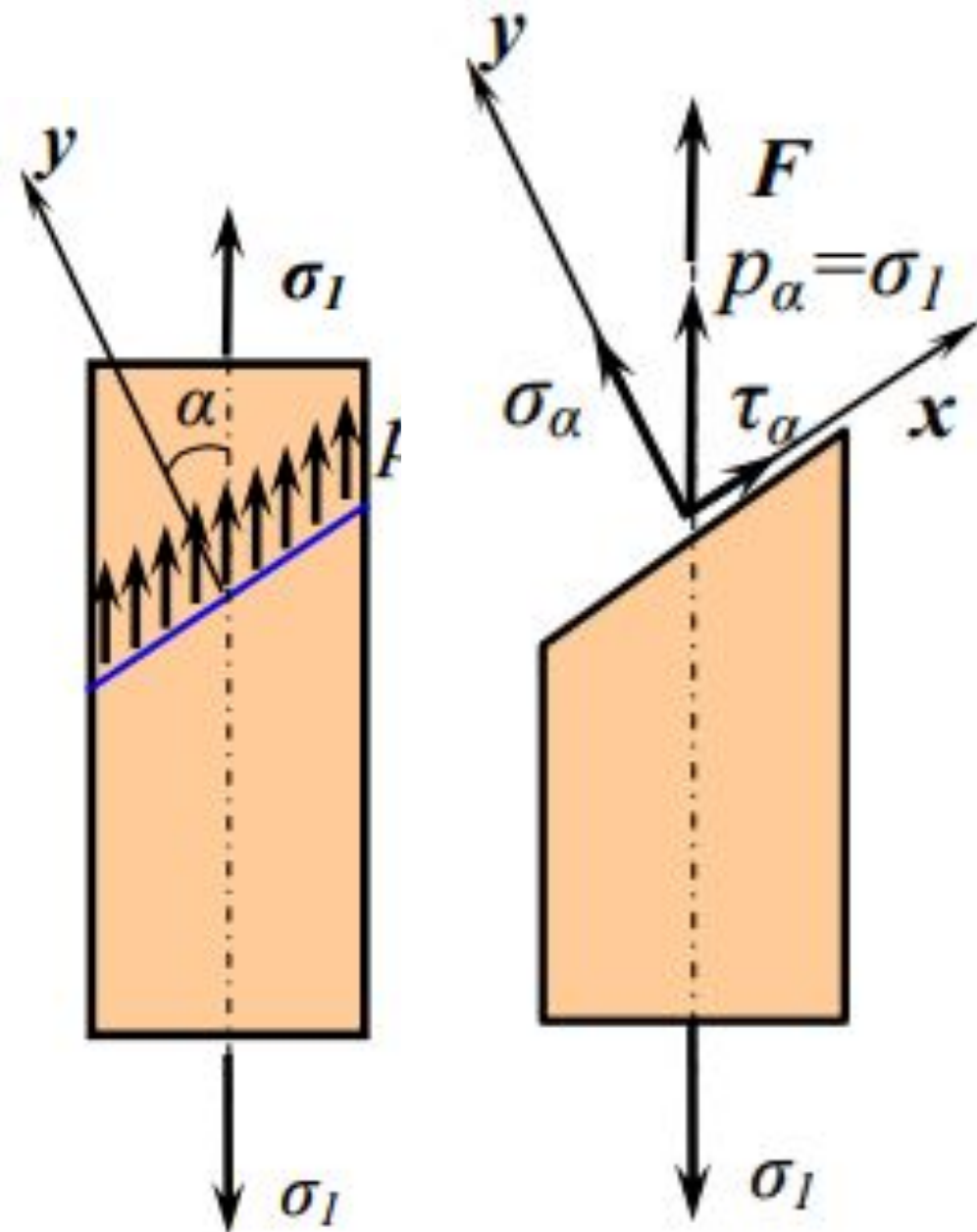
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – касательные напряжения



Закон парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Напряжения на наклонных площадках при линейном напряженном состоянии



$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha} \text{ - площадь наклонной площадки}$$

$$\sum y = 0 \quad \sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \cos \alpha = 0$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 A \cos \alpha}{A_\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha$$

$$\sum x = 0 \quad \tau_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \sin \alpha = 0$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 A \sin \alpha}{A_\alpha} = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha$$

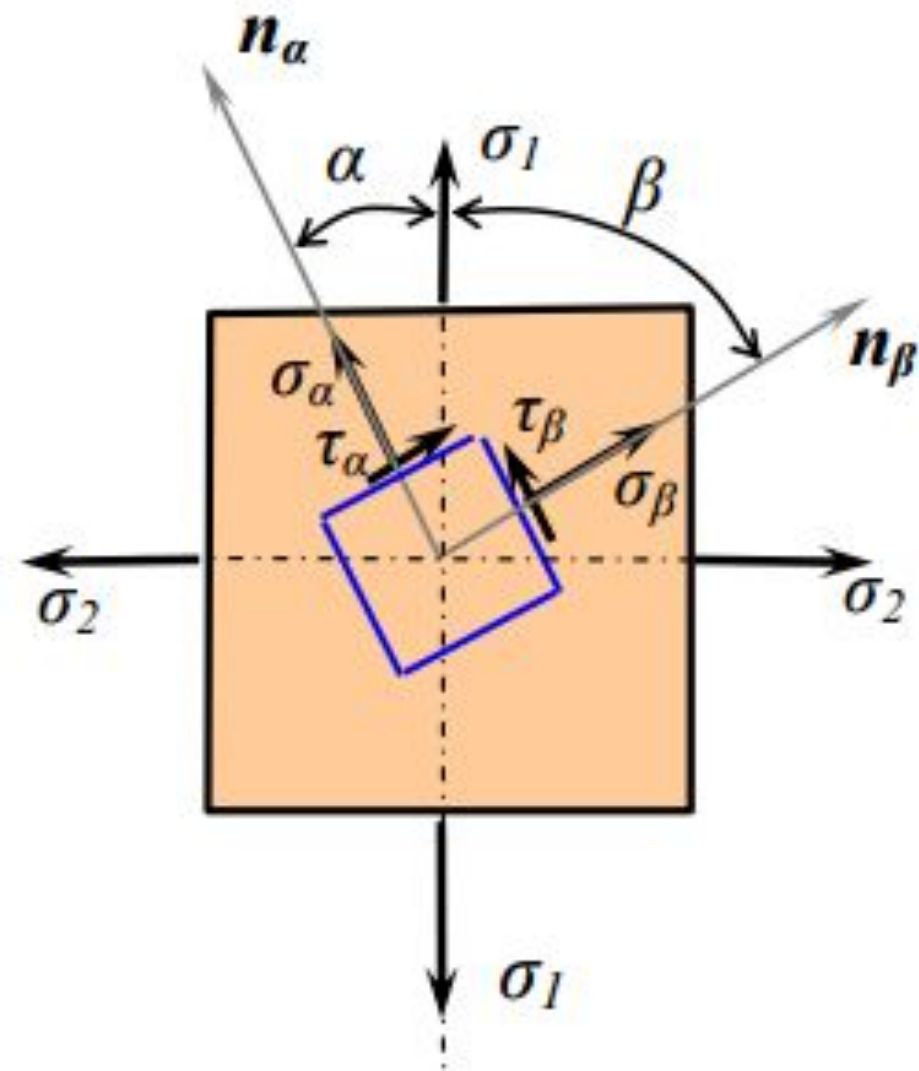
1) при $\alpha=0$ в поперечных сечениях стержня $\tau_{\alpha}=0$, $\sigma_{\alpha}=\sigma$ ($\sigma_1=\sigma$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=0$);

2) при $\alpha=\pi/2$ в поперечных сечениях стержня $\tau_{\alpha}=0$, $\sigma_{\alpha}=0$;

3) при $\alpha=\pm\pi/4$ в сечениях стержня возникают максимальные касательные напряжения $\tau_{\alpha} =$

$\tau_{\max} = \sigma/2$ (нормальные напряжения $\sigma_{\alpha} = \sigma/2$).

Напряжения на наклонных площадках при плоском напряженном состоянии



$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha - \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

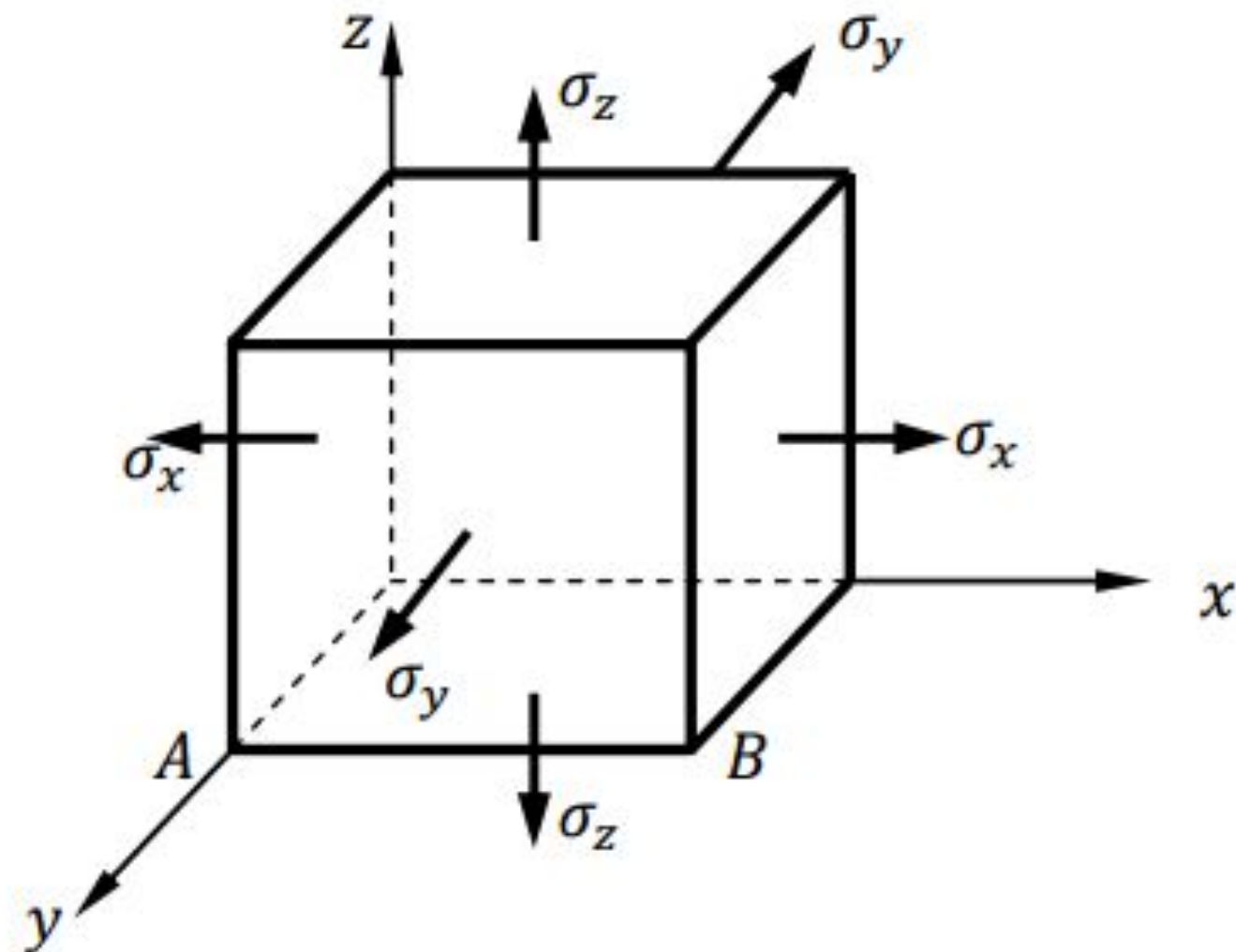
$$\tau_\alpha^{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\sigma_{\max \min} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}$$

Обобщенный закон Гука.

Выражение деформаций через напряжения



$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}.$$

$$\varepsilon''_x = -\frac{\sigma_y}{E} \nu,$$

$$\varepsilon'''_x = -\frac{\sigma_z}{E} \nu.$$

$$\varepsilon = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases}$$

Теории прочности

Эквивалентное напряжение ($\sigma_{\text{ЭКВ}}$) – напряжение, под действием которого материал в условиях простого растяжения-сжатия оказывается в равноопасном состоянии с рассматриваемым сложным напряженным состоянием.



Первая теория прочности (критерий наибольших нормальных напряжений)

$$\sigma^I_{\text{экв}} = |\sigma|_{\text{max}} \leq \sigma_{adm}.$$

Вторая теория прочности (критерий наибольших линейных деформаций)

$$|\varepsilon|_{\text{max}} \leq \varepsilon_{adm} \qquad \sigma^II_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 - \sigma_3) \leq \sigma_{adm}$$

Третья теория прочности (критерий наибольших касательных напряжений)

$$\tau_{\text{max}} \leq \tau_{adm} \qquad \sigma^III_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm} \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + 4\tau_{yz}^2}$$

Для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = \sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{yz} = \tau$):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}$$

Четвертая теория прочности (критерий удельной потенциальной энергии формоизменения)

$$\sigma_{\text{экс}}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_{adm}$$

Для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = \sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{yz} = \tau$):

$$\sigma_{\text{экс}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm}$$

Теория Мора

Условие прочности:

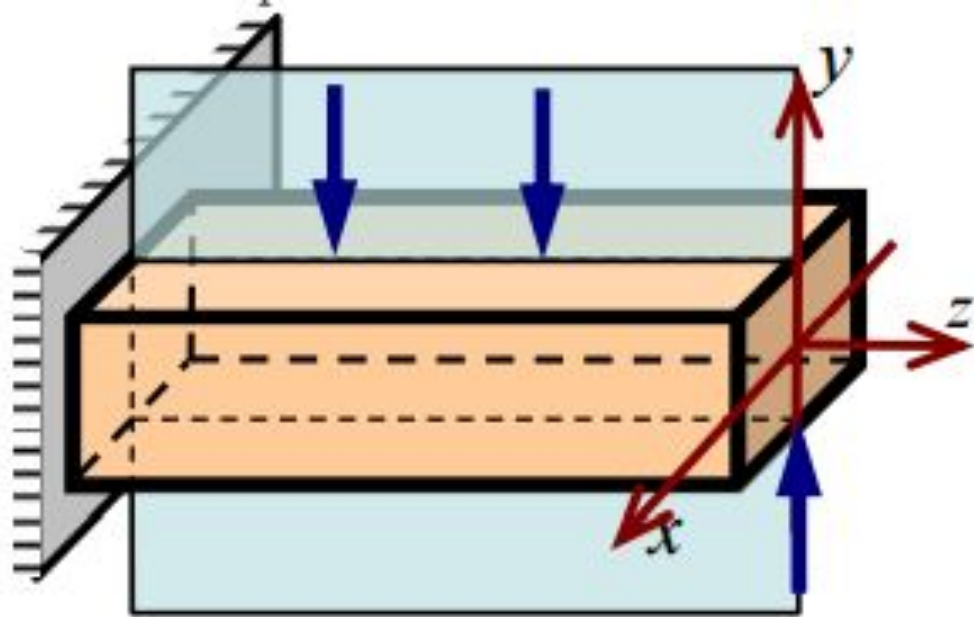
$$\sigma_{\text{экс}}^M = \sigma_1 - k\sigma_2 \leq \sigma_{adm}^t$$

$k = \frac{\sigma_{adm}^t}{\sigma_{adm}^c}$ - коэффициент, учитывающий различное сопротивление

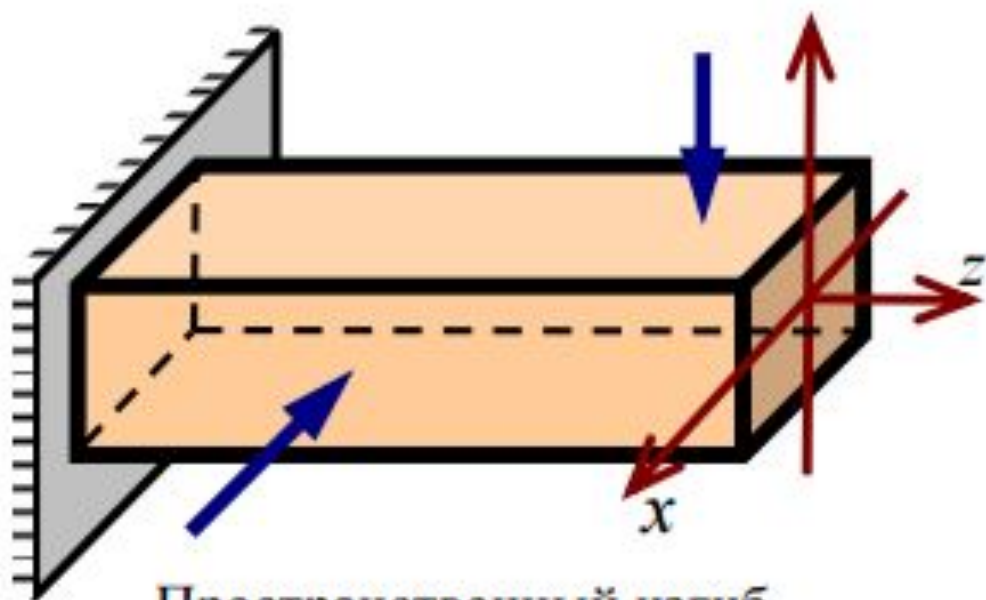
материала растяжению и сжатию

Для плоского напряженного состояния:

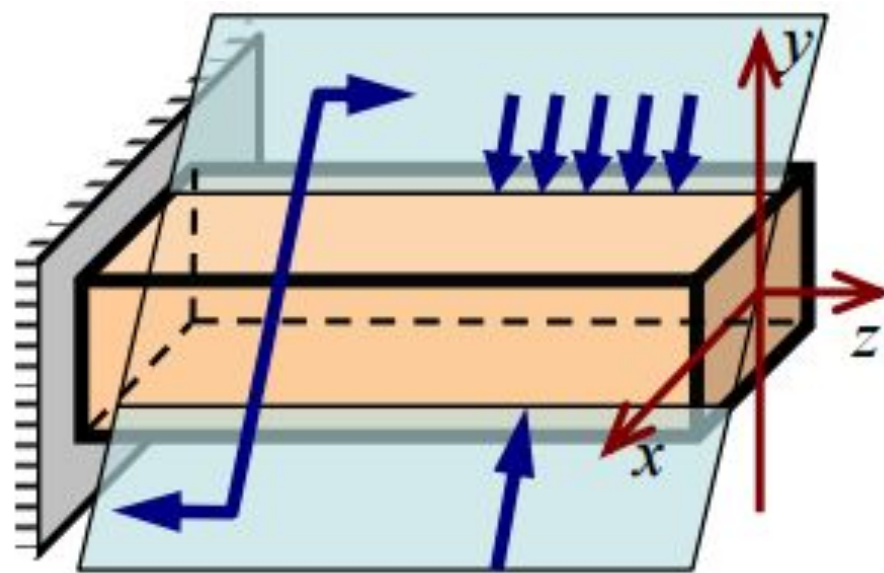
$$\sigma_{\text{экс}} = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}$$



Плоский прямой изгиб

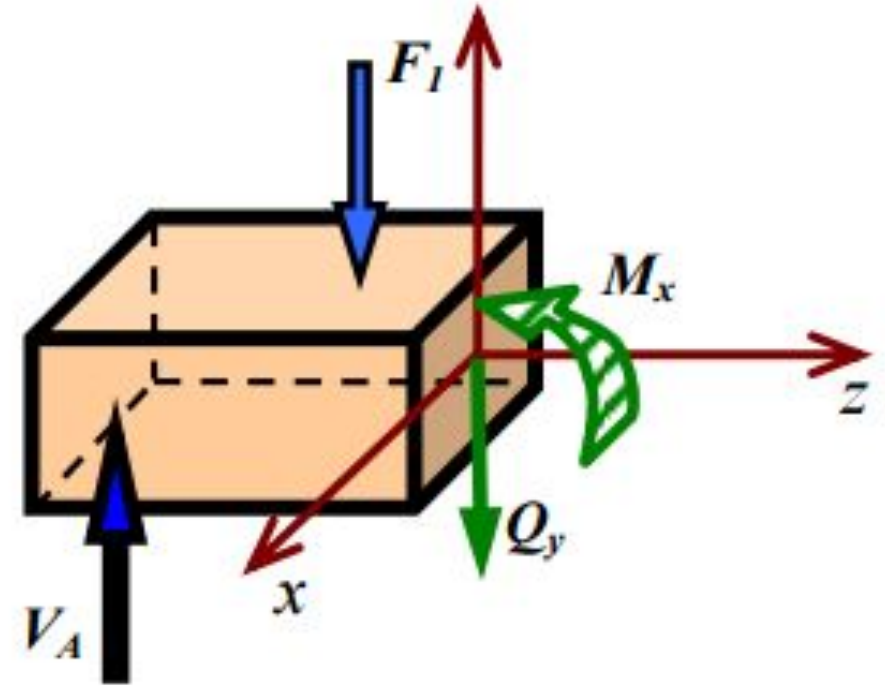
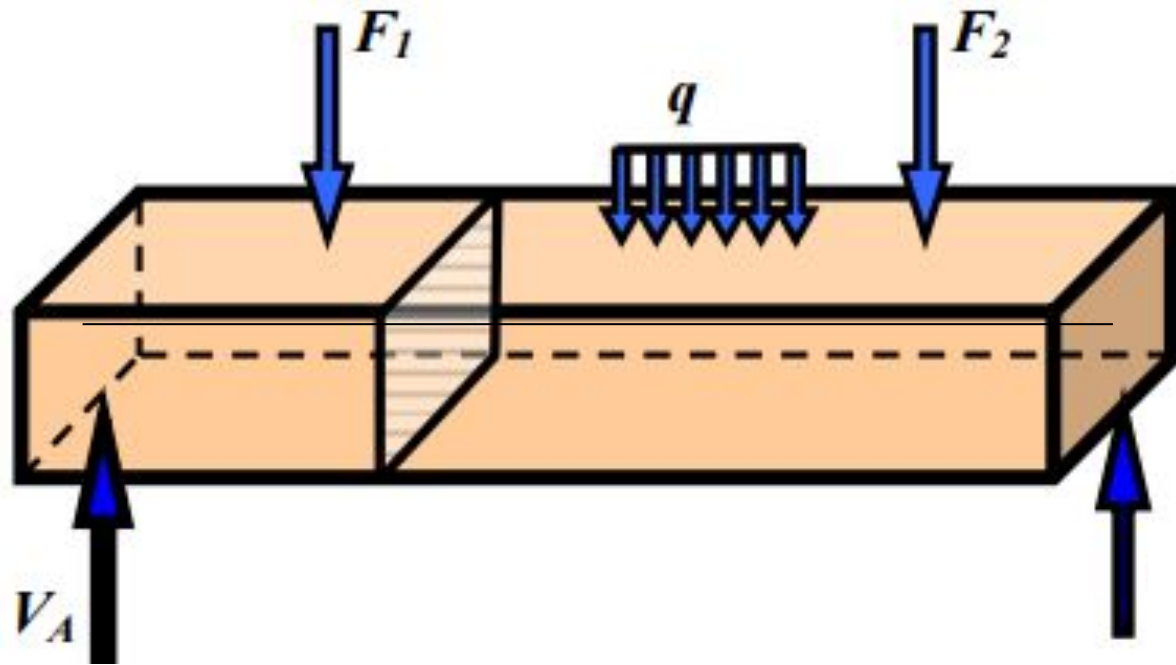


Пространственный изгиб

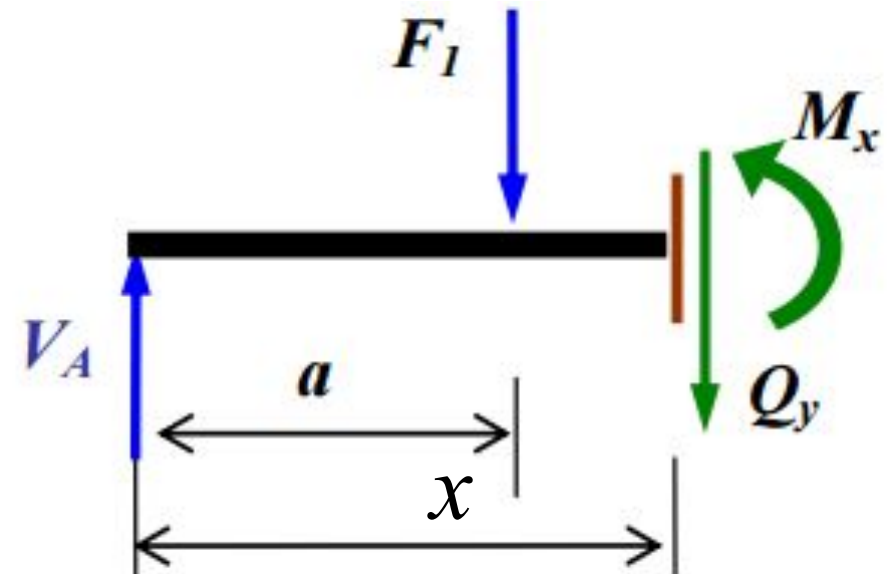


Плоский косой изгиб

Внутренние усилия при изгибе



$$\begin{aligned} \sum y = 0 \quad & -V_A + F_1 + Q_y = 0 \\ & Q_y = -F_1 + V_A \\ \sum M_o = 0 \quad & -V_A x + F_1(x - a) + M_x = 0 \\ & M_x = V_A x - F_1(x - a) \end{aligned}$$

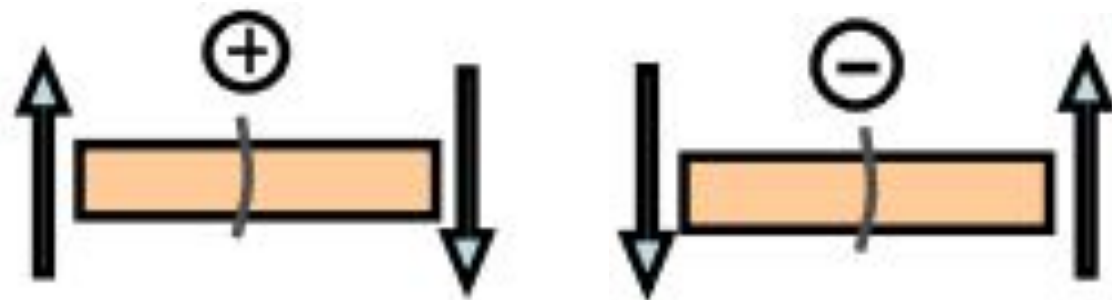


Правило знаков для внутренних усилий

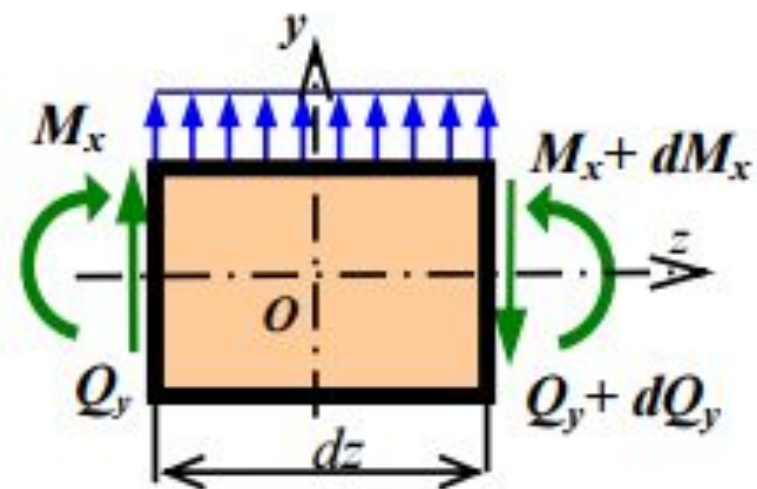
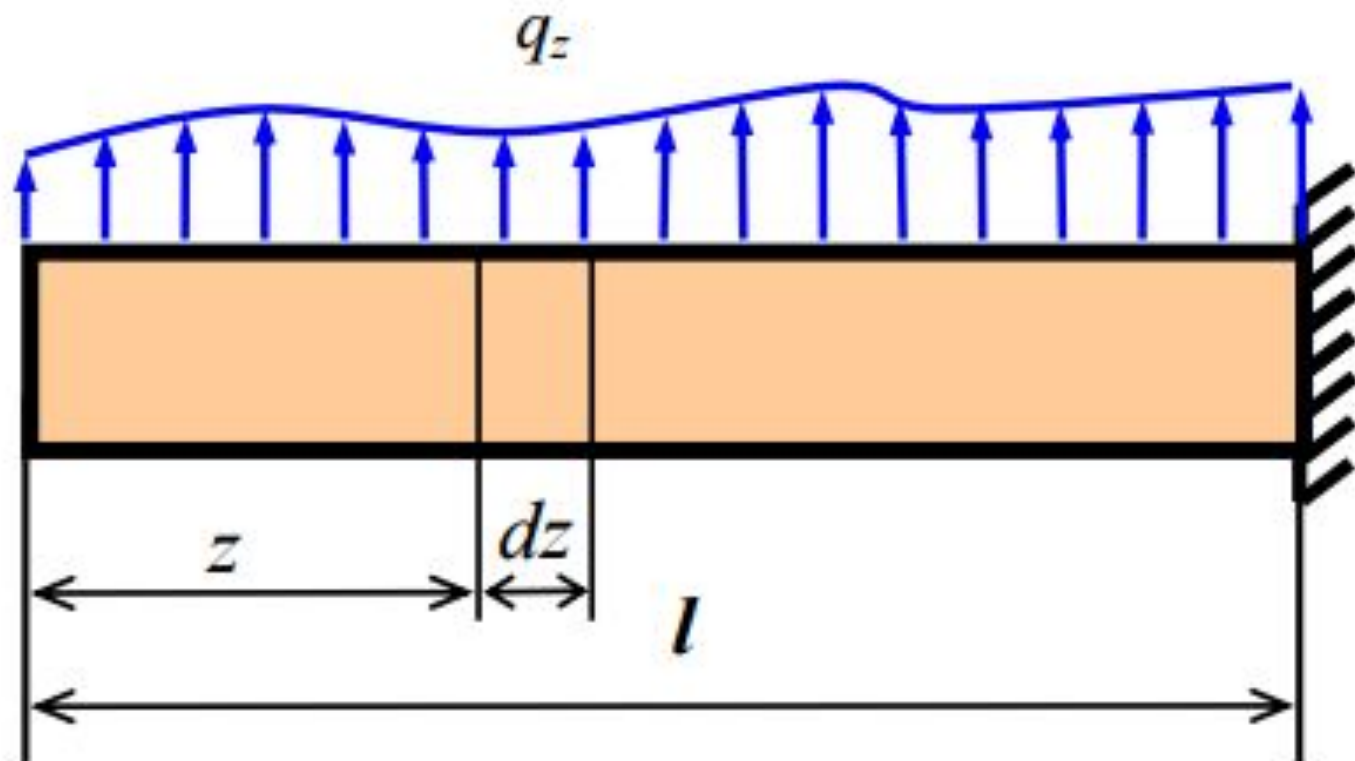
M_x



Q_y



Дифференциальные зависимости между M_x , Q_y и q



$$\sum M_c = 0 \quad -M_x + M_x + dM_x - Q_y \frac{dz}{2} - (Q_y + dQ_y) \frac{dz}{2} = 0$$

$$dM_x - Q_y dz - dQ_y \frac{dz}{2} = 0$$

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

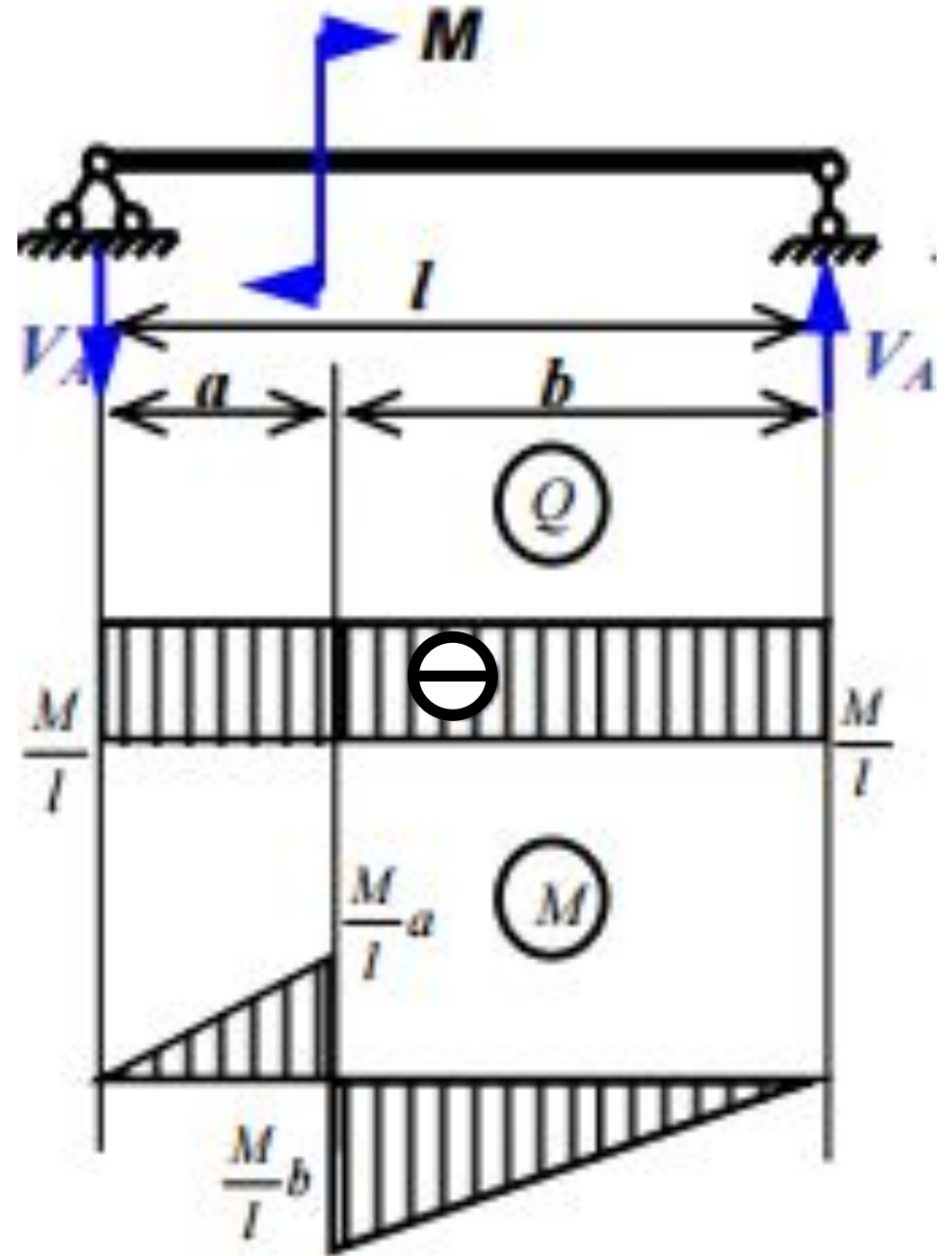
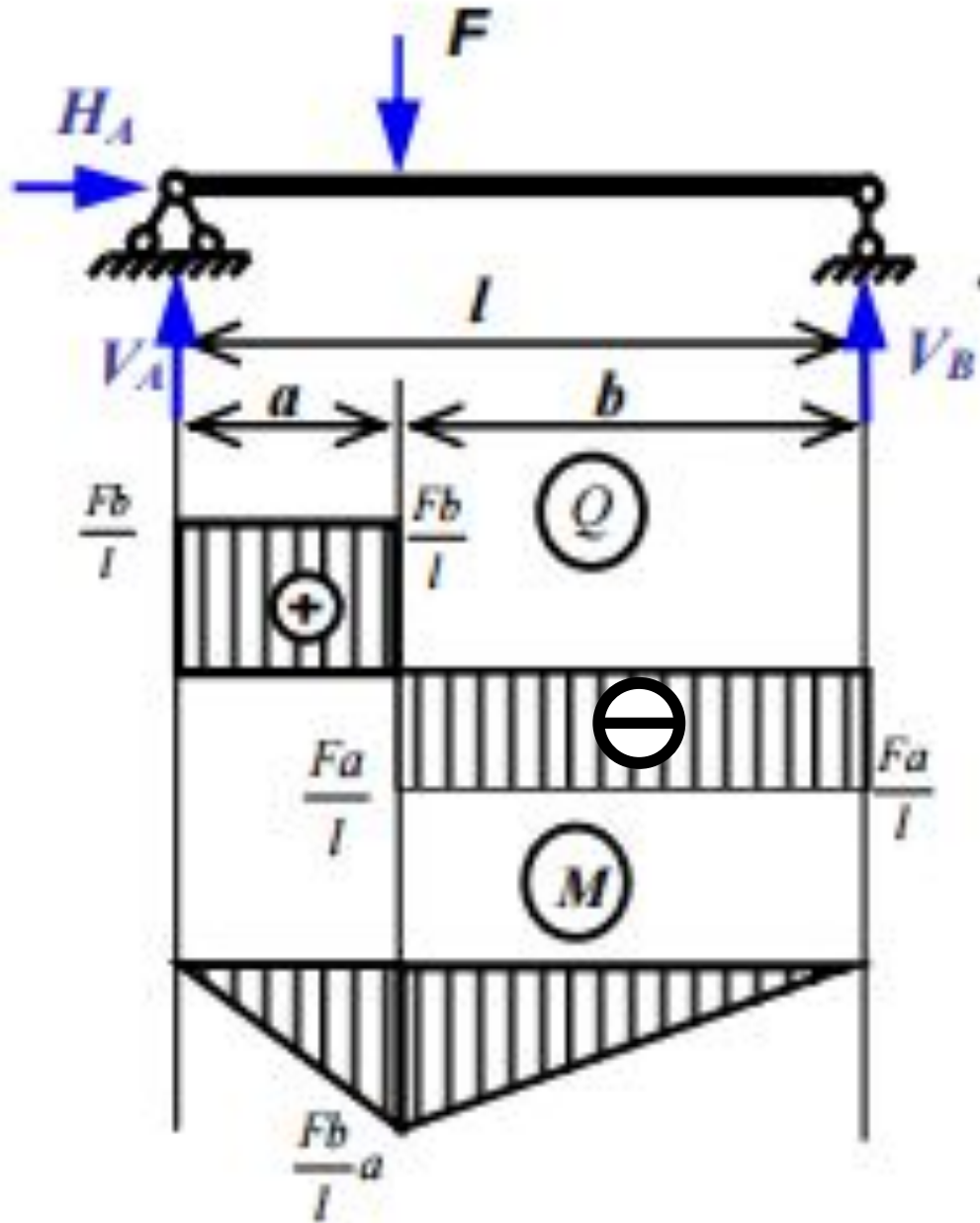
$$q = \frac{d^2 M_x}{dz^2}$$

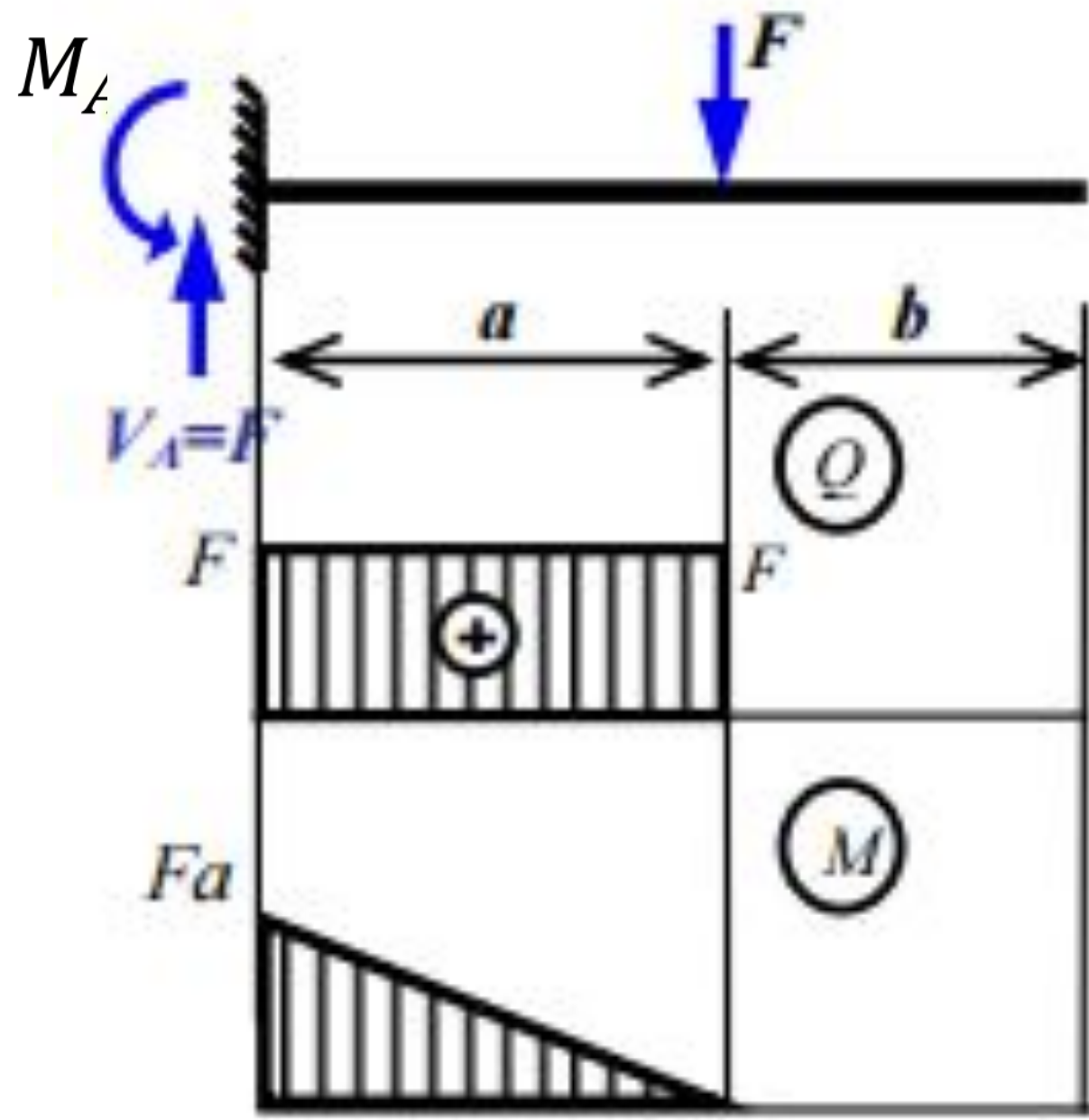
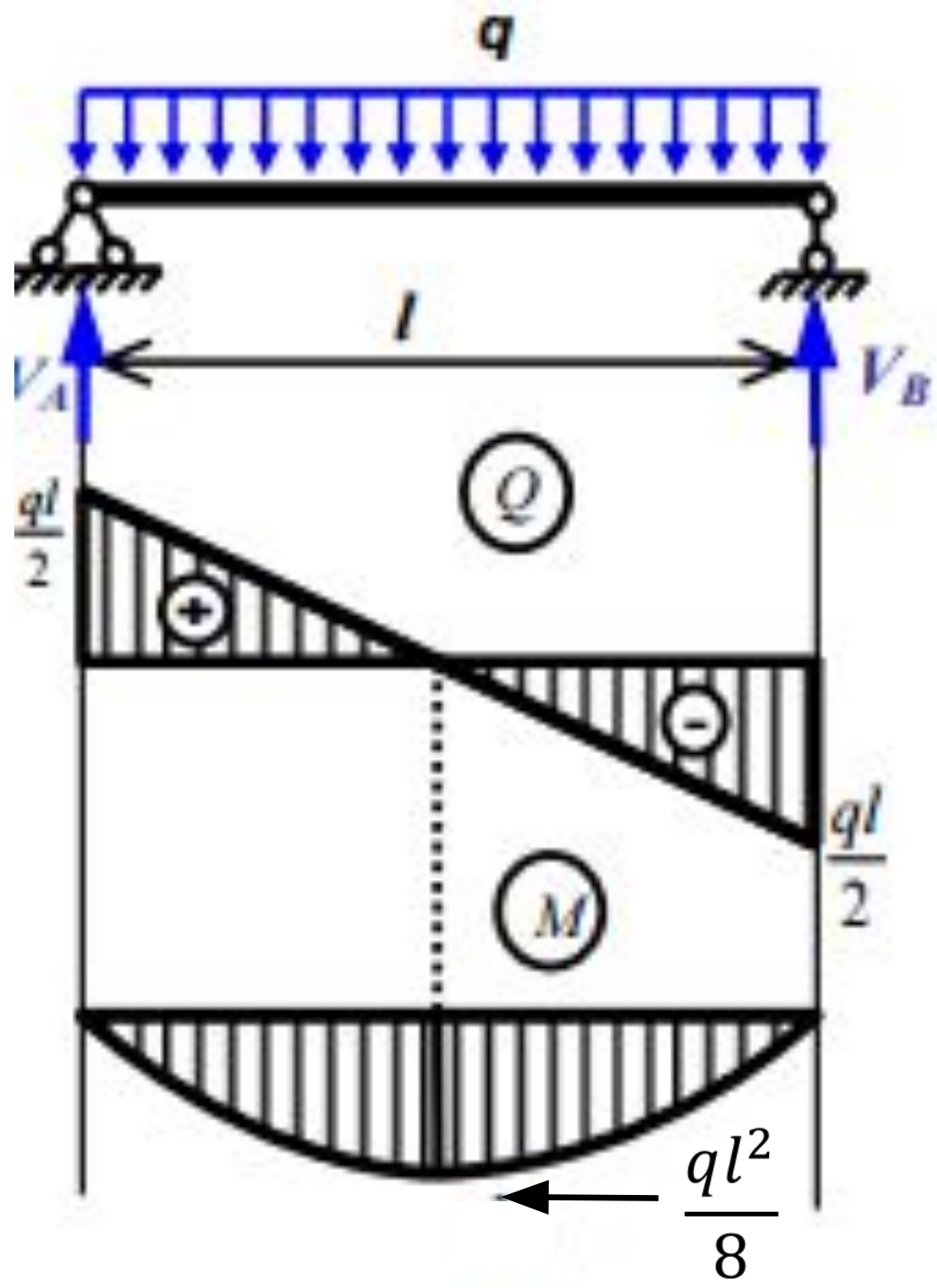
$$\sum y = 0 \quad Q_y + q dz - (Q_y + dQ_y) = 0$$

$$q dz - dQ_y = 0$$

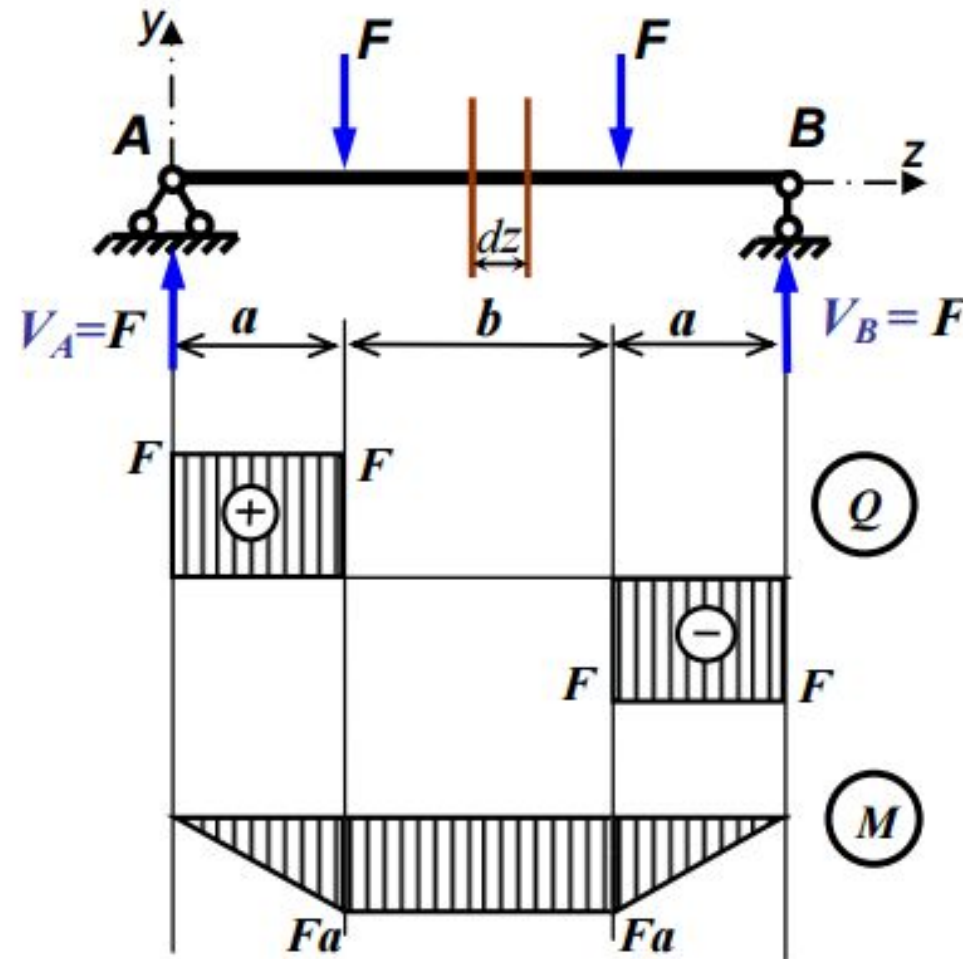
$$\frac{dQ_y}{dz} = q;$$

Построение эпюр внутренних усилий

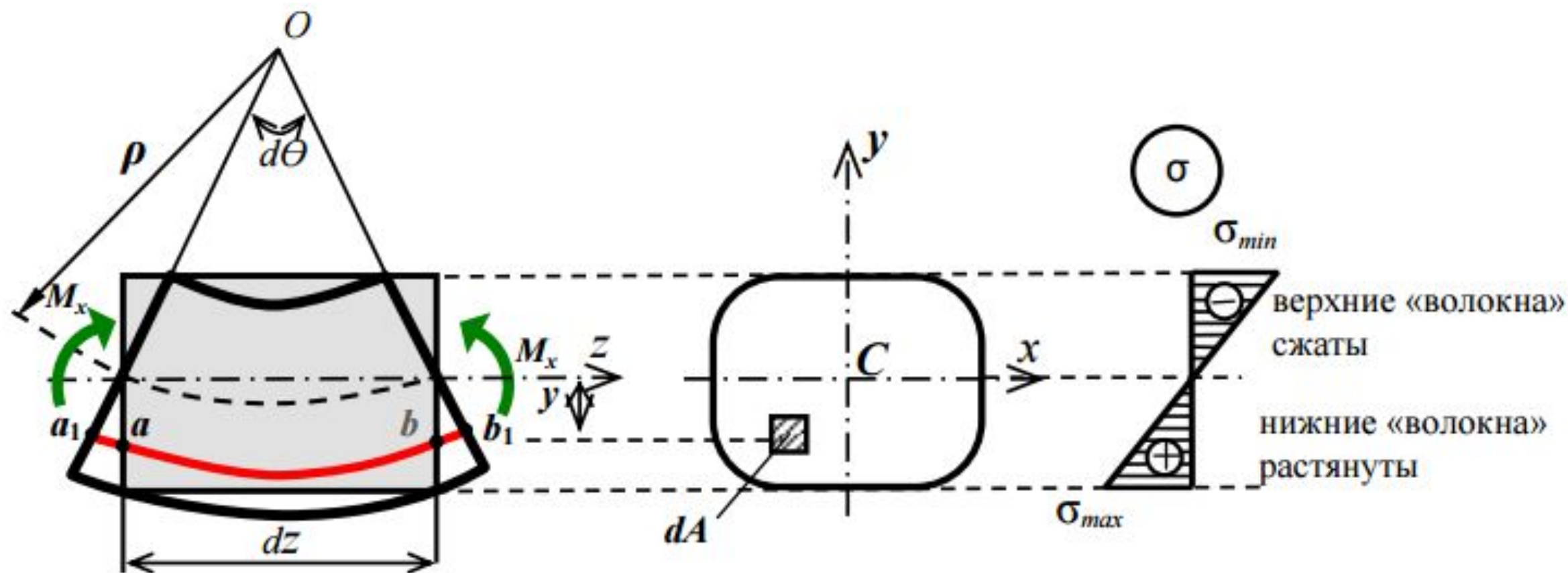




Нормальные напряжения при изгибе



Нейтральная линия – это геометрическое место точек, в которых нормальные напряжения равны нулю.



Рассмотрим произвольное волокно на расстоянии y от нейтральной оси.

Полное изменение длины: $\Delta dz = aa_1 + bb_1 = 2y \frac{d\theta}{2} = yd\theta$.

Относительная деформация волокон: $\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{yd\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\rho} y$,

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{E}{\rho} y$$

$$N = \int_A \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$

$$M_x = \int_A \sigma y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA,$$

$$I_x = \int_A y^2 dA \text{ - момент инерции сечения относительно оси } x.$$

$$M_x = \frac{E}{\rho} I_x, \text{ откуда } \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}.$$

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$$

Проверка прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma^{max} \leq \sigma_{adm},$$

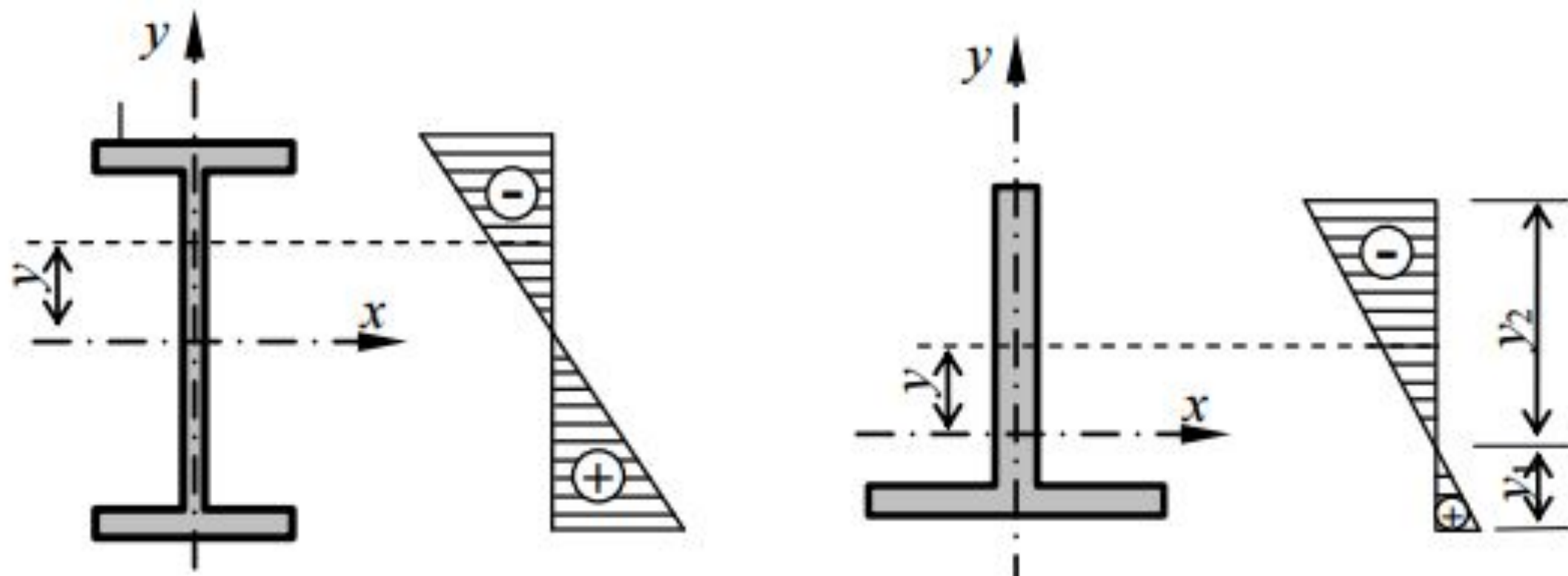
$$\sigma^{max} = \frac{M_x^{max}}{J_x} y^{max}$$

$$\sigma^{max} = \left| \frac{M_x^{max}}{W_x} \right|,$$

где $W_x = \frac{J_x}{y^{max}}$ - момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси,

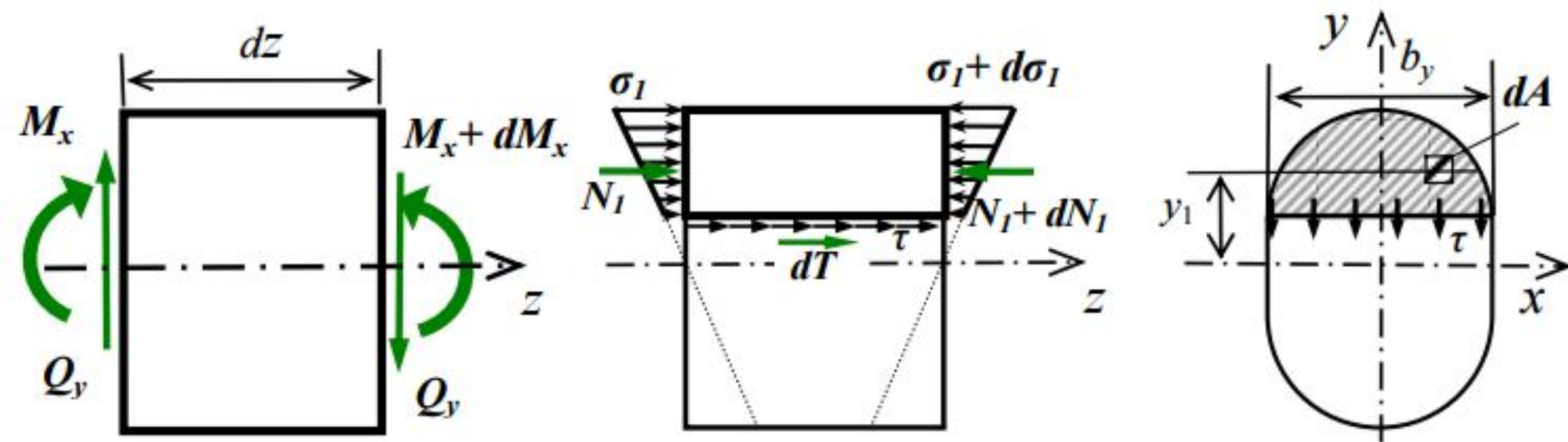
$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y,$$

где y - расстояние от нейтральной оси до рассматриваемой точки.



Эпюры нормальных напряжений для двутаврового и таврового профилей.
Знак плюс на эпюрах соответствует растянутым волокнам, минус - сжатым

Касательные напряжения при изгибе



$$\sigma_1 = \frac{M_x}{I_x} y_1.$$

$$d\sigma_1 = \frac{dM_x}{I_x} y_1$$

$$dN = \int_{A_{omc}} d\sigma_1 dA = \int_{A_{omc}} \frac{dM_x}{I_x} y_1 dA = \frac{dM_x}{I_x} \int_{A_{omc}} y_1 dA = \frac{dM_x}{I_x} S_x^{omc}$$

где $S_x^{omc} = A_{omc} y_c$ - статический момент отсеченной площади относительно нейтральной оси.

$$\sum z = 0 \quad N + dT - (N + dN) = 0 \quad dT = dN = \frac{dM_x}{I_x} S_x^{omc}$$

$$dT = \tau dz b_y = \frac{dM_x}{I_x} S_x^{omc}$$

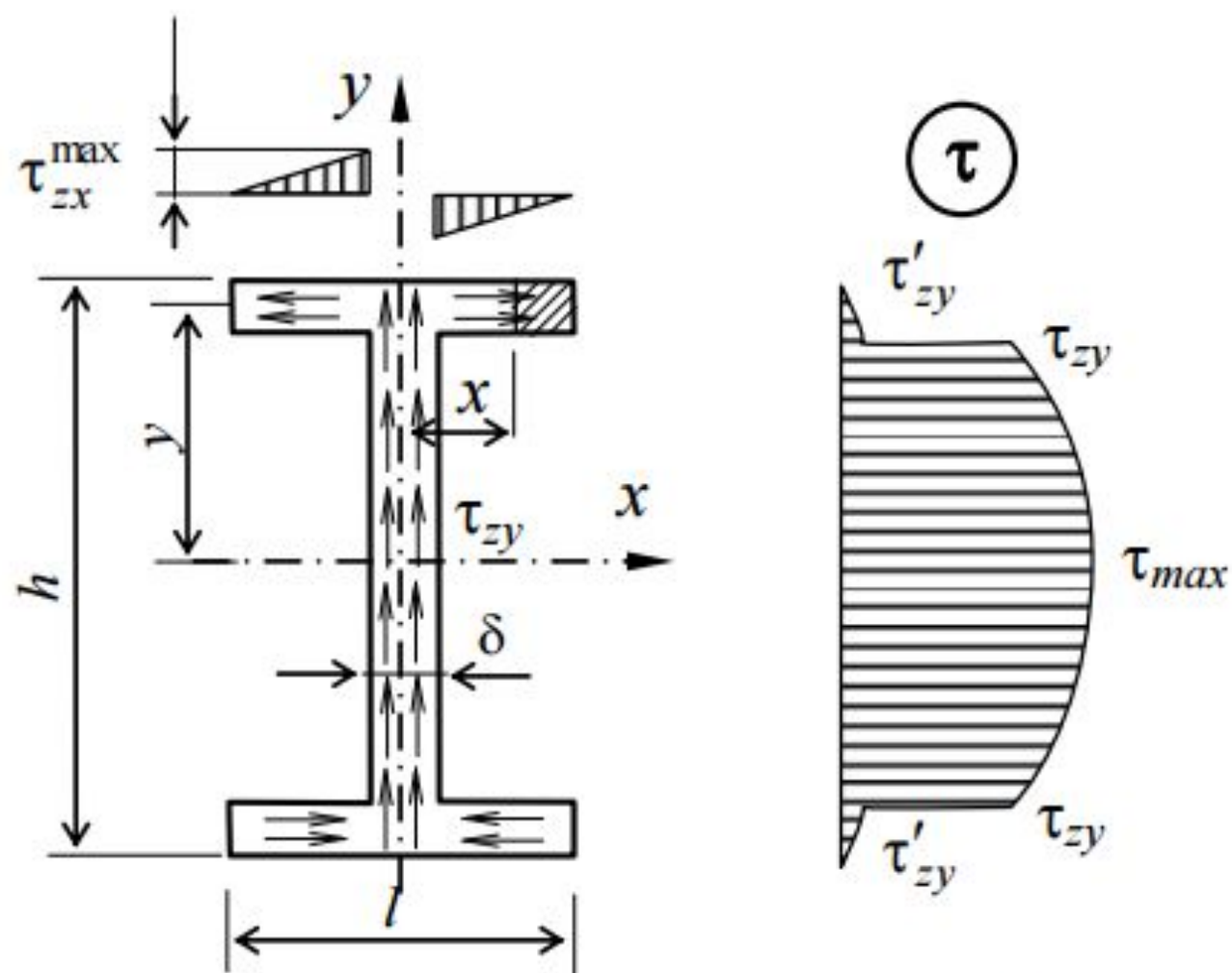
$$\tau = \frac{dM_x}{b_y dz I_x} S_x^{omc}$$

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{omc}}{I_x b_y} - \text{формула Журавского.}$$

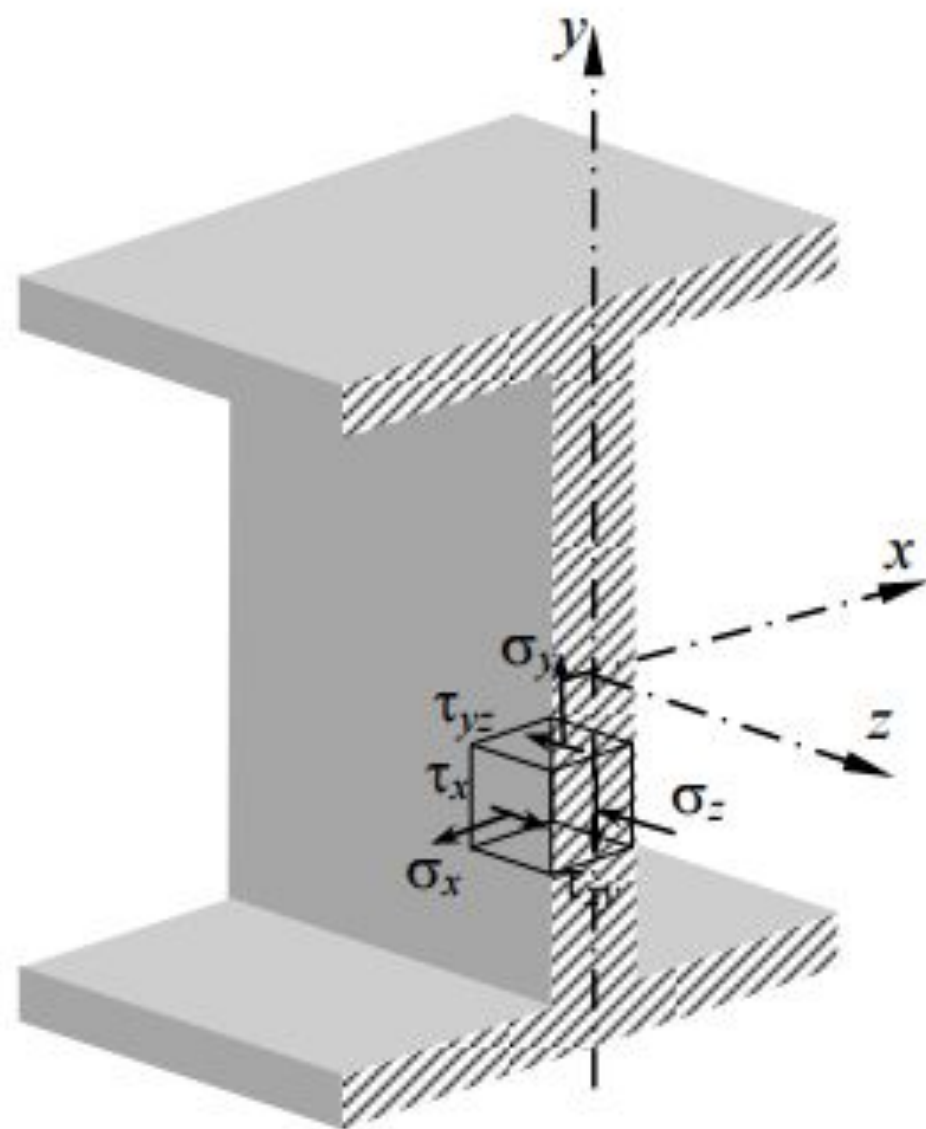
$$\tau = \frac{Q_y^{\max} S_x^o}{b_{(y)} I_x},$$

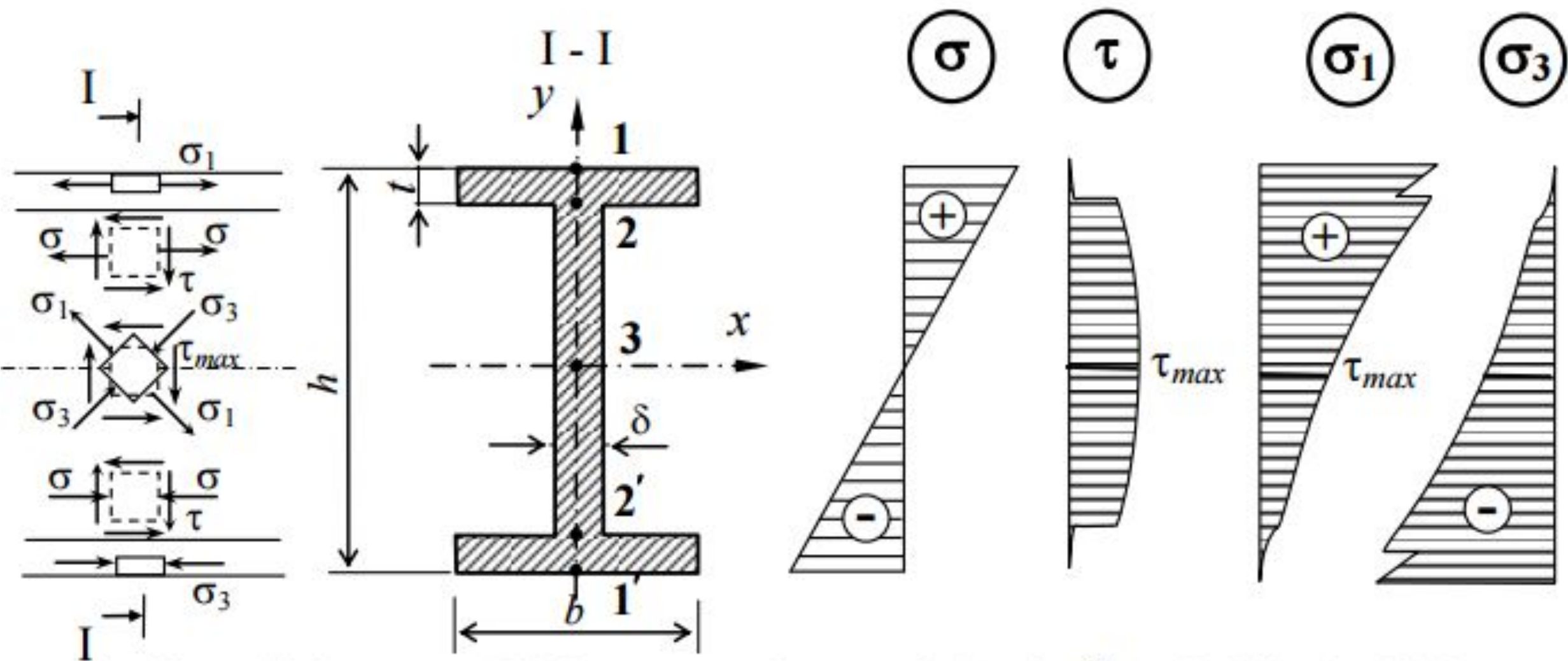
- где
- $Q_y^{\max}$ - наибольшая по абсолютной величине поперечная сила;
 - S_x^o - статический момент площади сечения, расположенной от уровня y , на котором определяются напряжения, до края балки относительно нейтральной оси;
 - $b_{(y)}$ - ширина сечения на уровне y ;
 - I_x - момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси.



Распределение касательных напряжений по поперечному сечению балки двутаврового сечения

ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ПО ГЛАВНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ





эпюры нормальных, касательных и главных напряжений в поперечном сечении балки двутаврового профиля.

Для стальных балок в общем случае

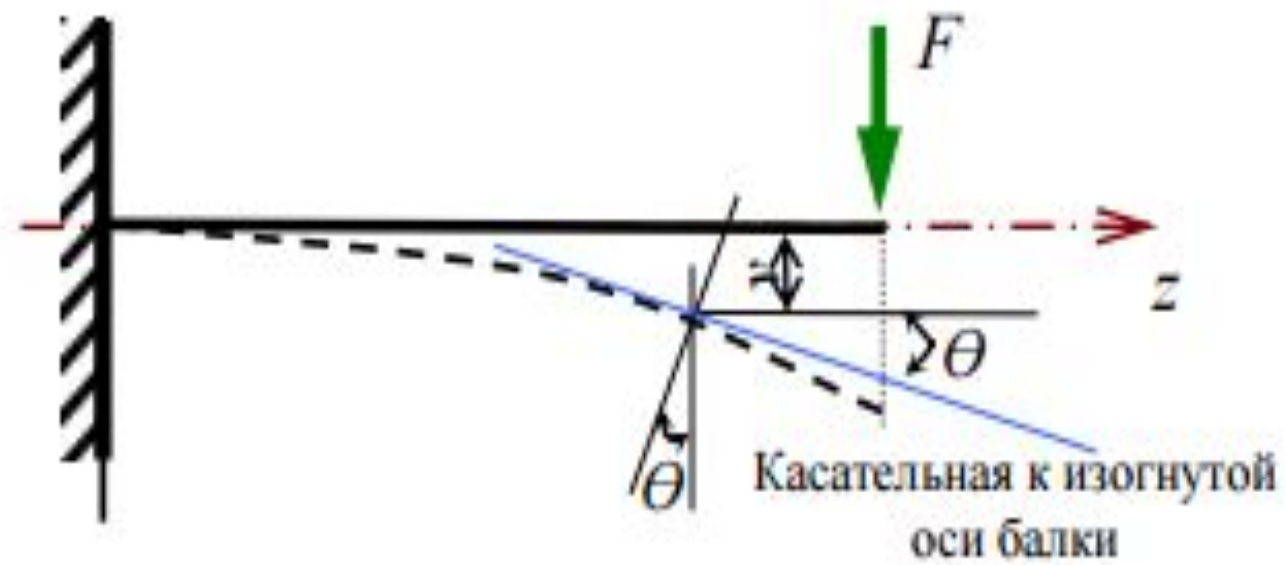
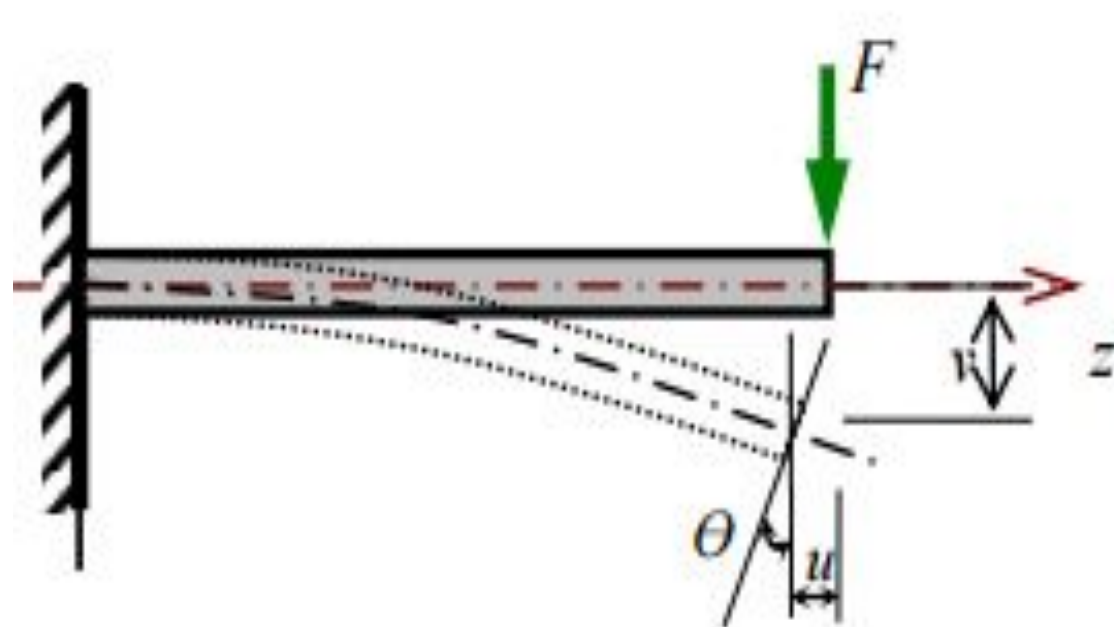
$$\sigma^{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x} \leq \sigma_{adm};$$

$$\tau^{max} = \frac{Q_y^{max} S_x^{max}}{\delta J_x} \leq \tau_{adm};$$

по III теории прочности $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}$

или по IV теории прочности $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ



Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

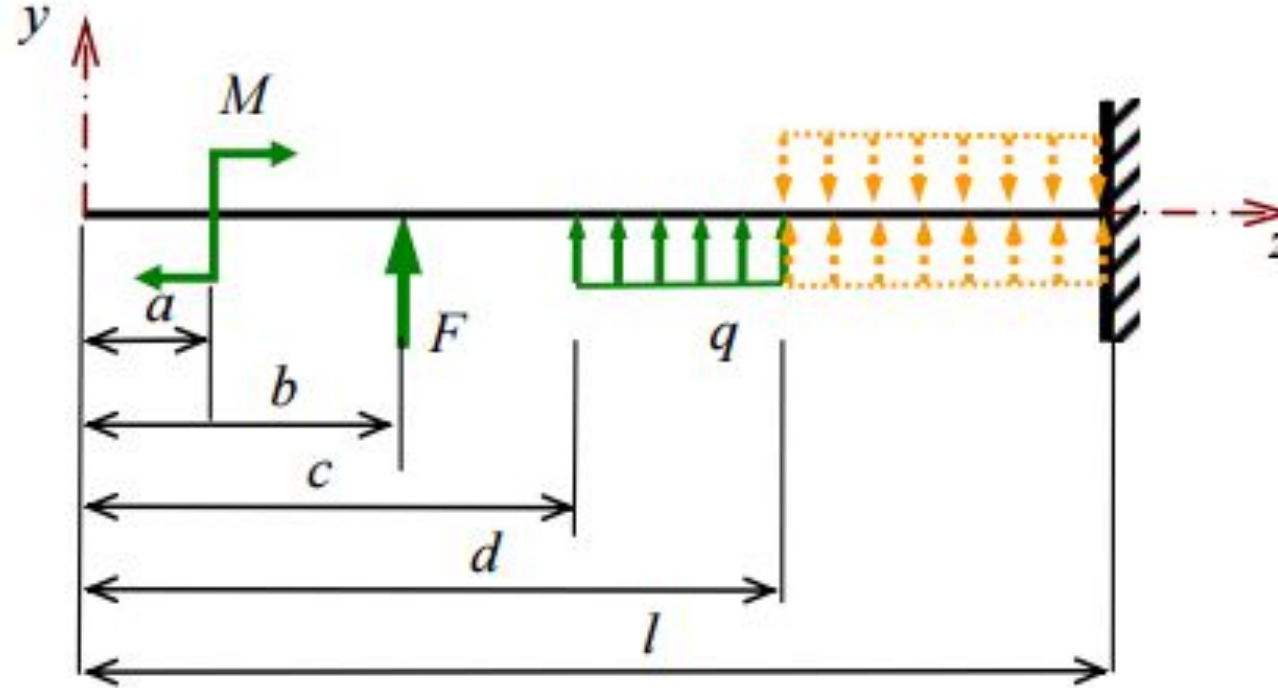
Закон Гука при изгибе: $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot J_x}$, $\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^3}} = \frac{M(x)}{EJ}$

$$\pm EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) .$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ} \int M(x) dx + C$$

$$y = \frac{1}{EJ} \iint M(x) dx dx + Cx + D$$

Метод начальных параметров



$$M_{(z)} = M(z-a)^0 + F(z-b)^1 + \frac{q(z-c)^2}{2} - \frac{q(z-d)^2}{2}.$$

$$EI_x y'' = M(z-a)^0 + \frac{F(z-b)^1}{1} + \frac{q(z-c)^2}{1 \cdot 2} - \frac{q(z-d)^2}{1 \cdot 2}.$$

Дважды интегрируем и получаем:

$$EI_x y' = \frac{M(z-a)^1}{1} + \frac{F(z-b)^2}{1 \cdot 2} + \frac{q(z-c)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{q(z-d)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + C$$

$$EI_x y = \frac{M(z-a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{F(z-b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{q(z-c)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{q(z-d)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + Cz + D.$$

при $z = l$ угол поворота $y'(l) = 0$ и прогиб $y(l) = 0$,

$$C = EI_x \theta_0 \quad D = EI_x y_0,$$

где θ_0 и y_0 - угол поворота и прогиб в начале координат – **начальные параметры**.

Окончательно получаем уравнение углов поворота в общем виде:

$$EI_x y' = EI_x \theta_0 + \frac{\sum M_i (z-a_i)^1}{1!} + \frac{\sum F_i (z-b_i)^2}{2!} + \frac{\sum q_i (z-c_i)^3}{3!} - \frac{\sum q_i (z-d_i)^3}{3!},$$

Уравнение прогибов:

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z + \frac{\sum M_i (z-a_i)^2}{2!} + \frac{\sum F_i (z-b_i)^3}{3!} + \frac{\sum q_i (z-c_i)^4}{4!} - \frac{\sum q_i (z-d_i)^4}{4!}$$

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

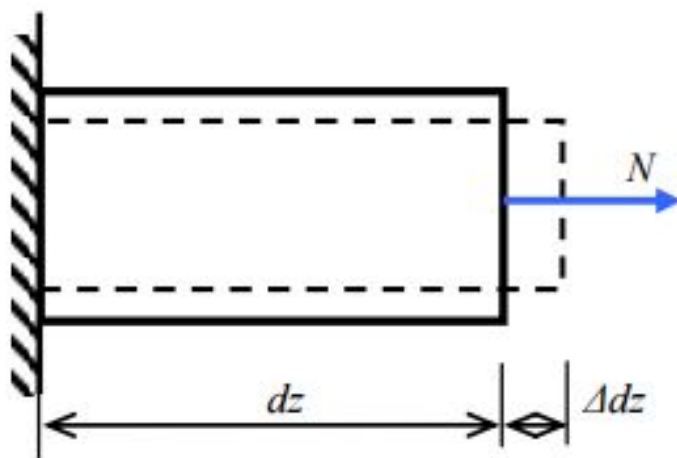
$$dW = dU$$

Осевое растяжение – сжатие

$$dW = \frac{1}{2} N \cdot \Delta dz$$

По закону Гука $\Delta z = \frac{N \cdot dz}{EA}$

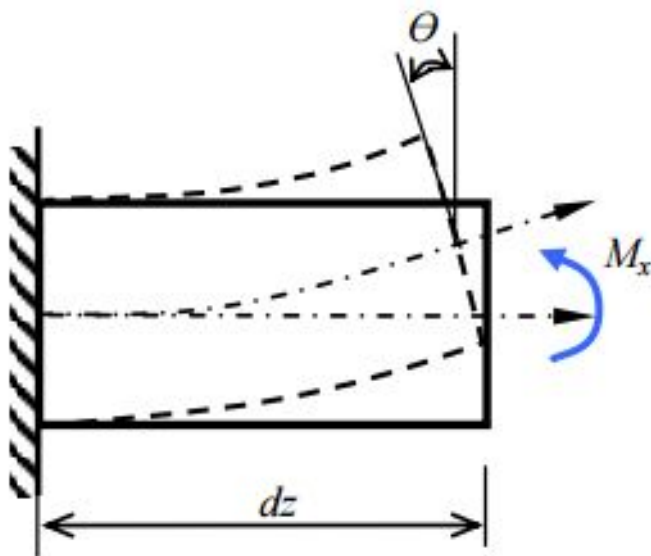
$$dW = \frac{N^2}{2EA} dz = dU$$



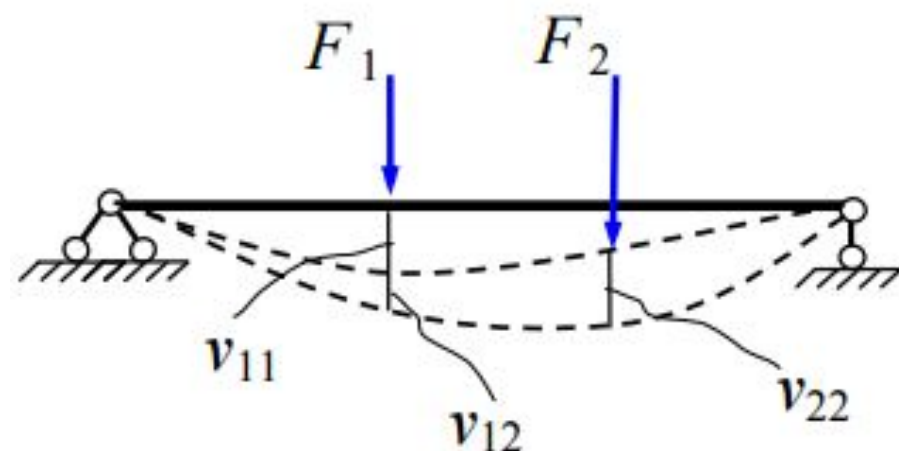
Чистый изгиб

$$dW = \frac{1}{2} M_x \cdot \theta, \quad \theta = \frac{M_x \cdot dz}{EI_x}$$

$$dW = \frac{M_x^2}{2EI_x} dz = dU$$



Теорема о равенстве работ (теорема Бетти)



1) Сначала прикладываем к балке силу

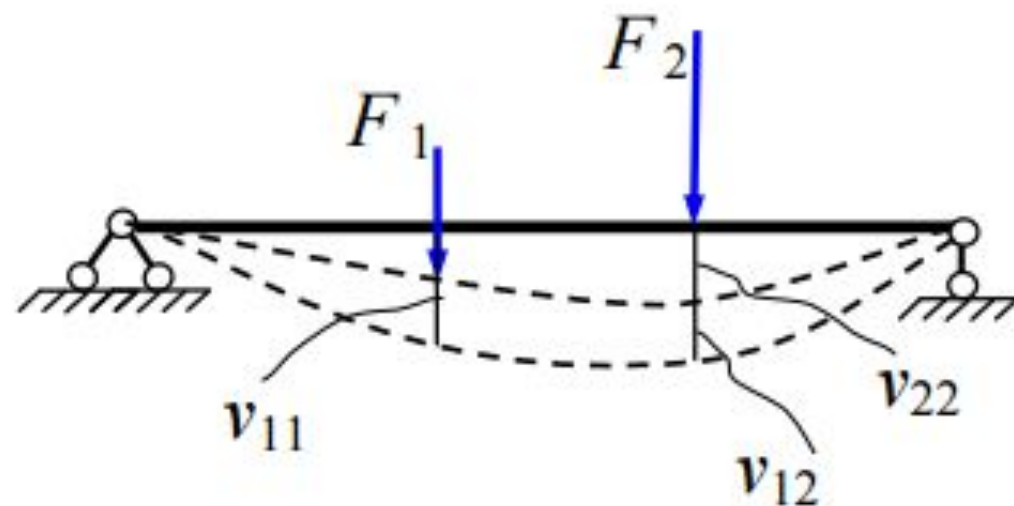
F_1 , затем F_2

Работа сил F_1 и F_2 :

$$W = W_{11} + W_{12} + W_{22} = \frac{1}{2}F_1v_{11} + F_1v_{12} + \frac{1}{2}F_2v_{22}$$

2) изменим последовательность нагружения.

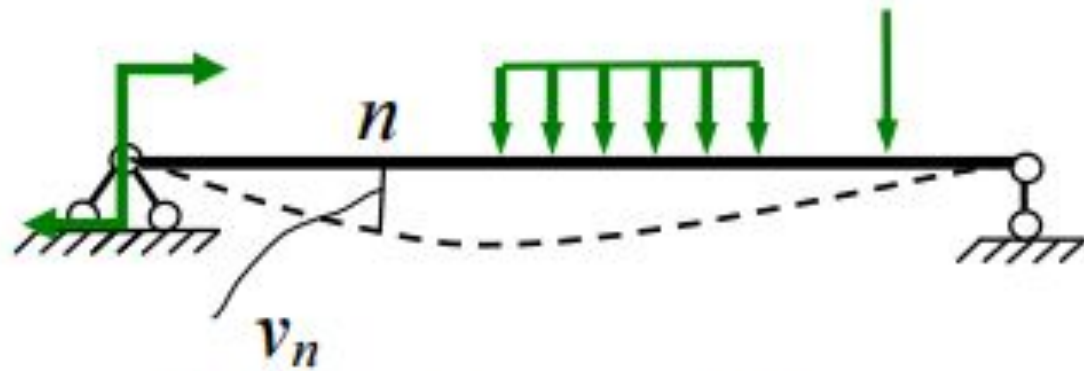
$$W = W_{11} + W_{21} + W_{22} = \frac{1}{2}F_1v_{11} + F_2v_{21} + \frac{1}{2}F_2v_{22}.$$



$$F_1v_{12} = F_2v_{21}$$

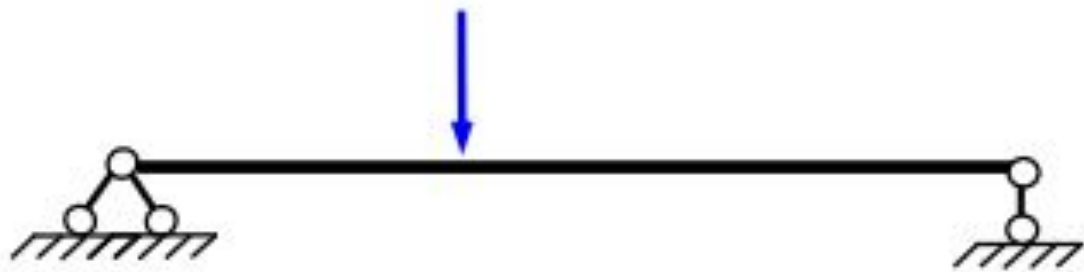
Интеграл О.Мора.

Грузовое состояние



Фиктивное состояние

$F = 1$



$$W_{21} = F \cdot v_n = 1 \cdot v_n = v_n$$

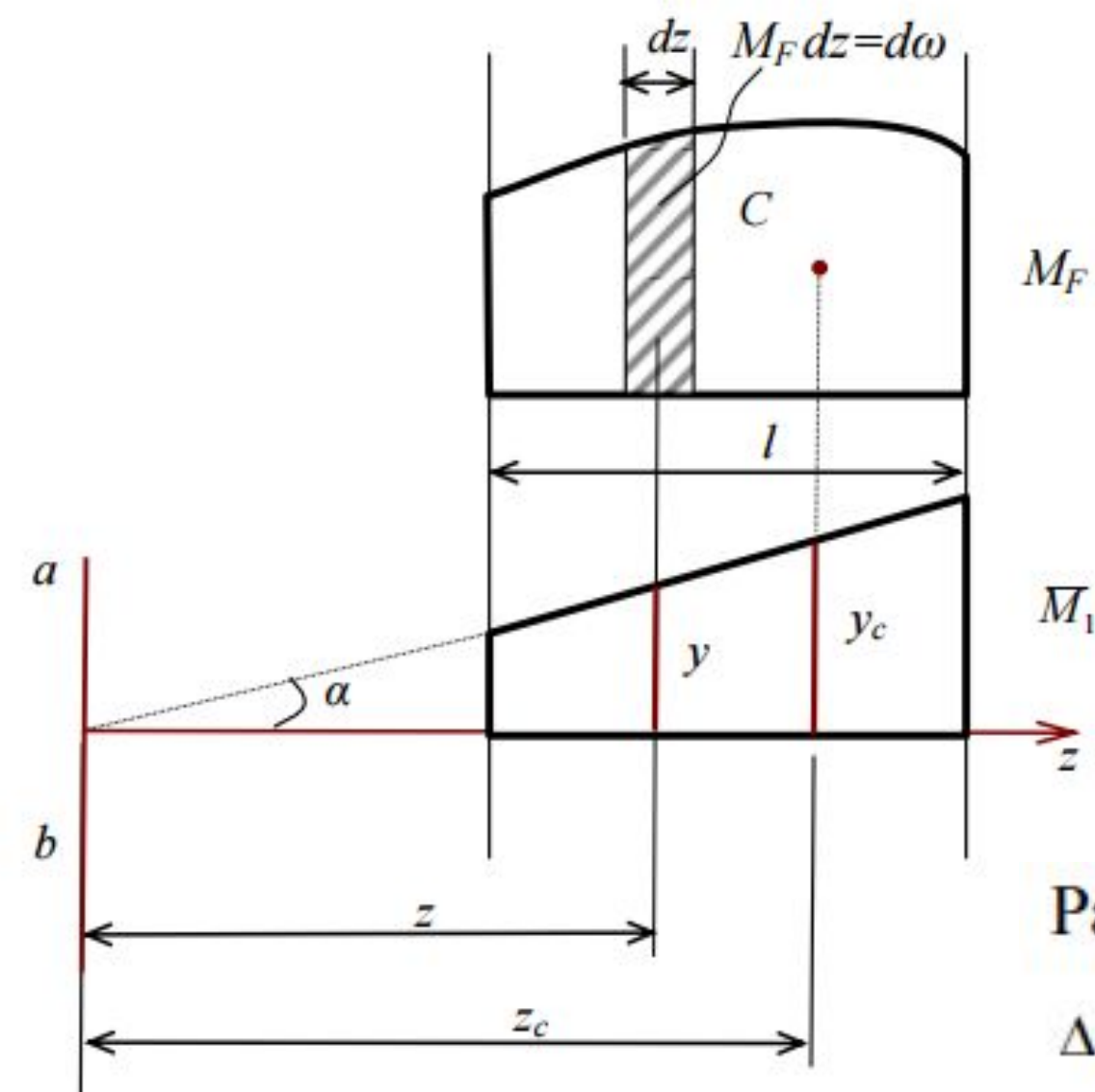
$$W_{12} = \sum \int_l \frac{M_x^2}{EI_x} dz$$

$$W_{12} = W_{21}$$

$$v_n = \sum \int_l \frac{M_F M}{EI_x} dz$$

$$\Delta = \sum \int_l \frac{M_F M}{EI_x} dz$$

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА МАКСВЕЛЛА-МОРА



$$\Delta = \int \frac{M_F \bar{M}}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \int \bar{M} M_F dz = \frac{1}{EI_x} \int y d\omega =$$

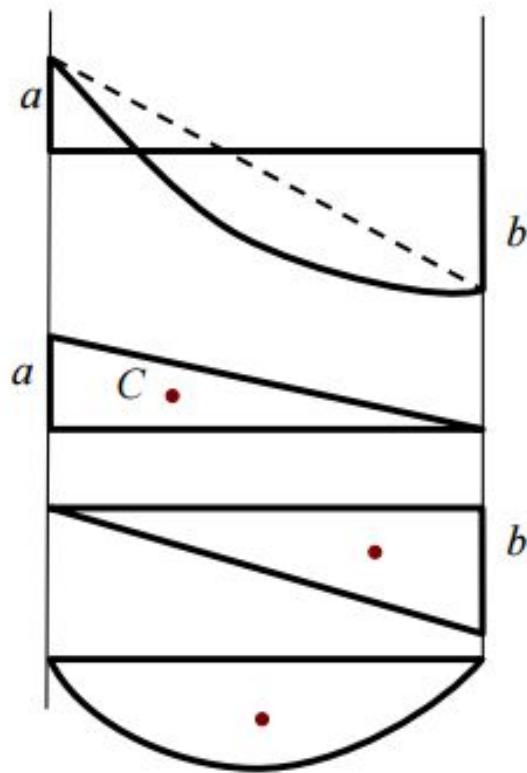
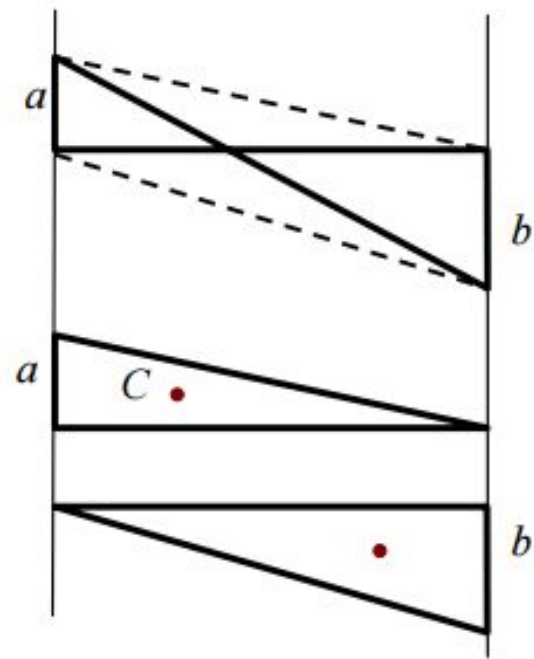
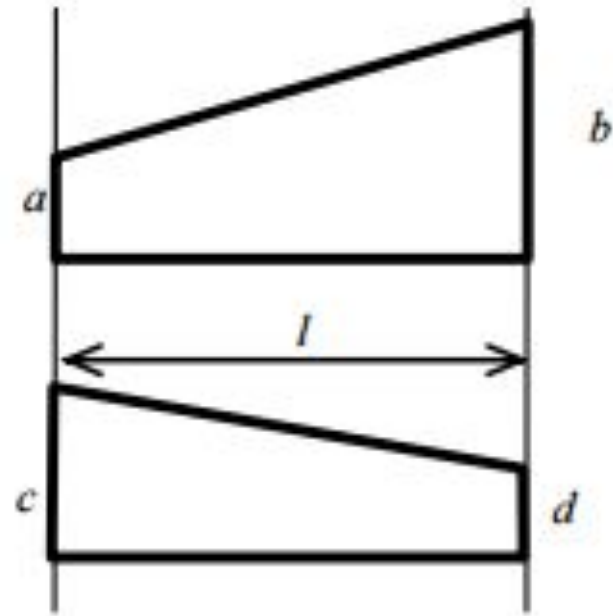
$$= \frac{1}{EI_x} \int z \cdot \operatorname{tg} \alpha d\omega = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EI_x} \int z d\omega = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EI_x} \omega \cdot z_c = \frac{1}{EI_x} \omega y_c$$

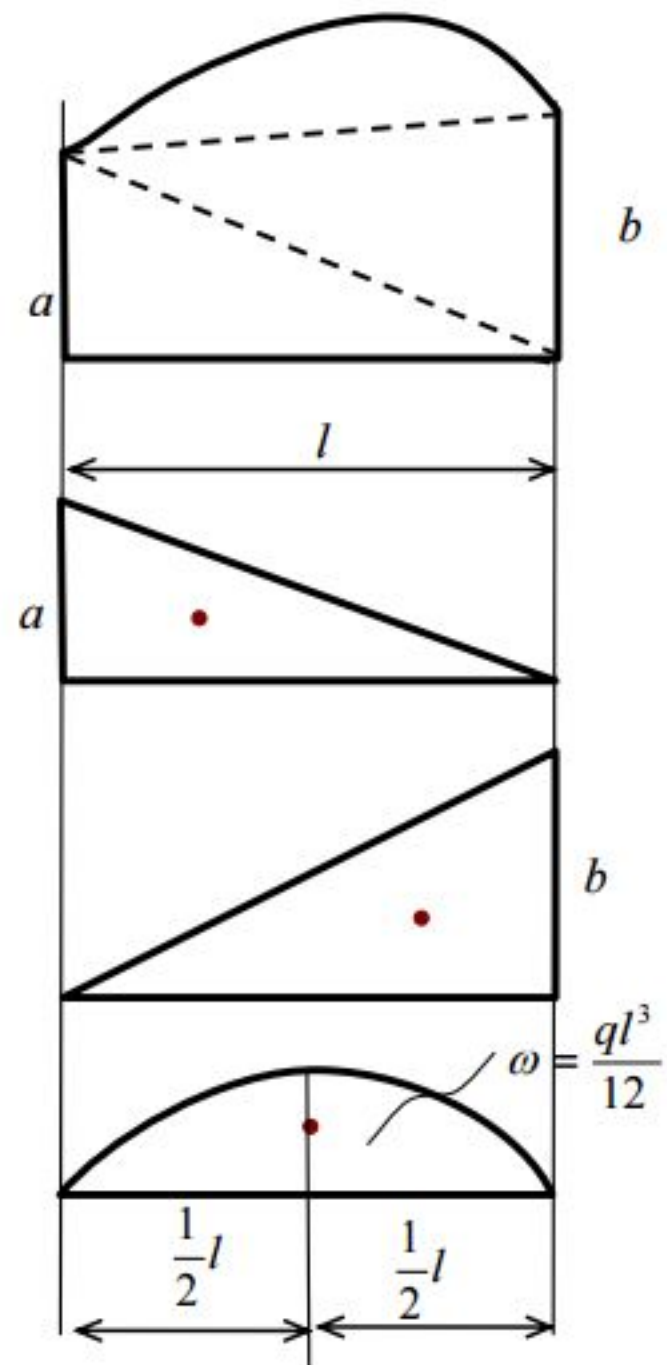
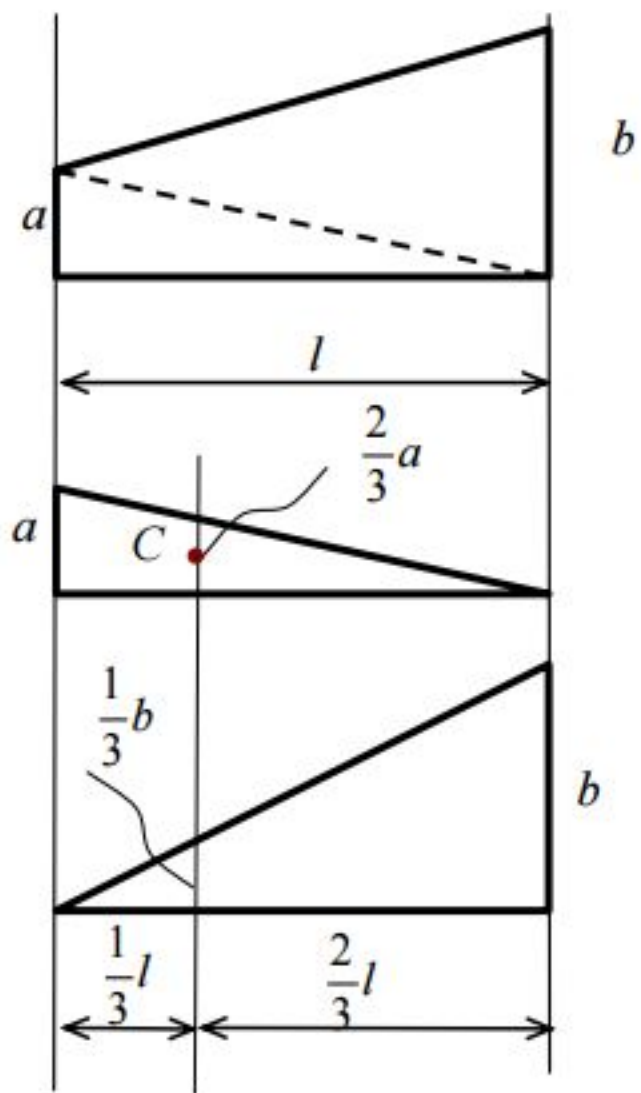
Распространив формулу на все участки балки,

$$\Delta = \sum \int_l \frac{M_F \bar{M}}{EI_x} dz = \sum \frac{1}{EI_x} \omega_l y_{c_l}$$

Формула перемножения трапеций:

$$\Delta = \frac{l}{6EI}(2ac + 2bd + ad + bc)$$



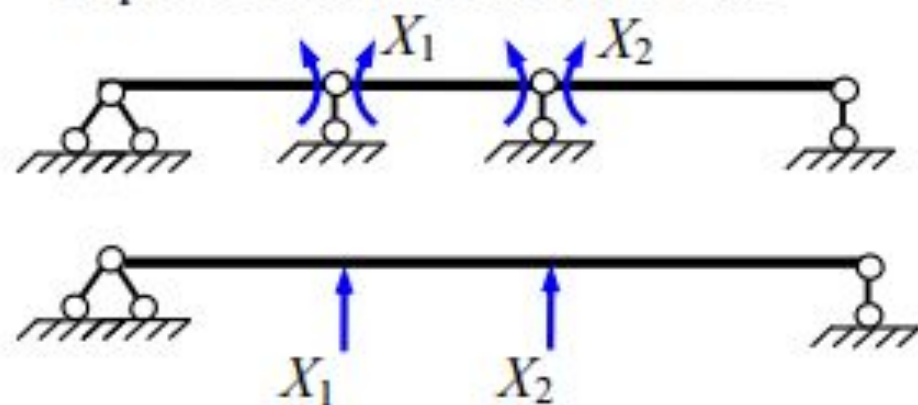


СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ.

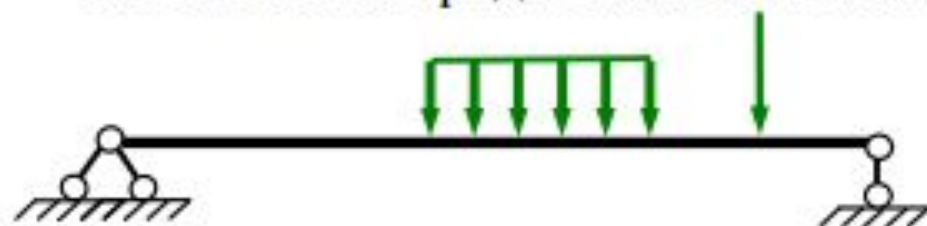
Геометрически изменяемая система – система, в которой перемещение точек или элементов могут происходить без деформации стержней

Геометрически неизменяемая система – система, в которой перемещение точек или элементов возможно только за счет деформации стержней.

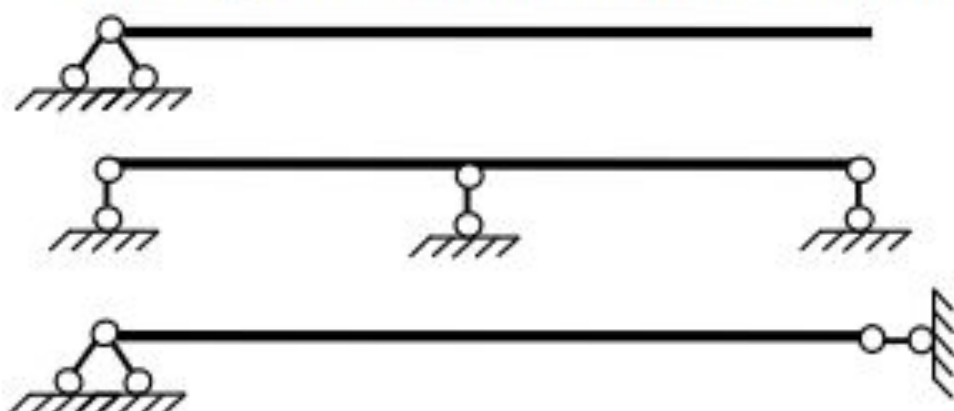
Варианты основной системы



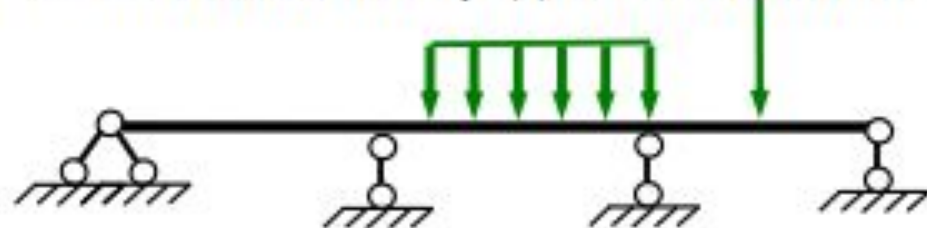
Статически определимая система



Геометрически изменяемые системы

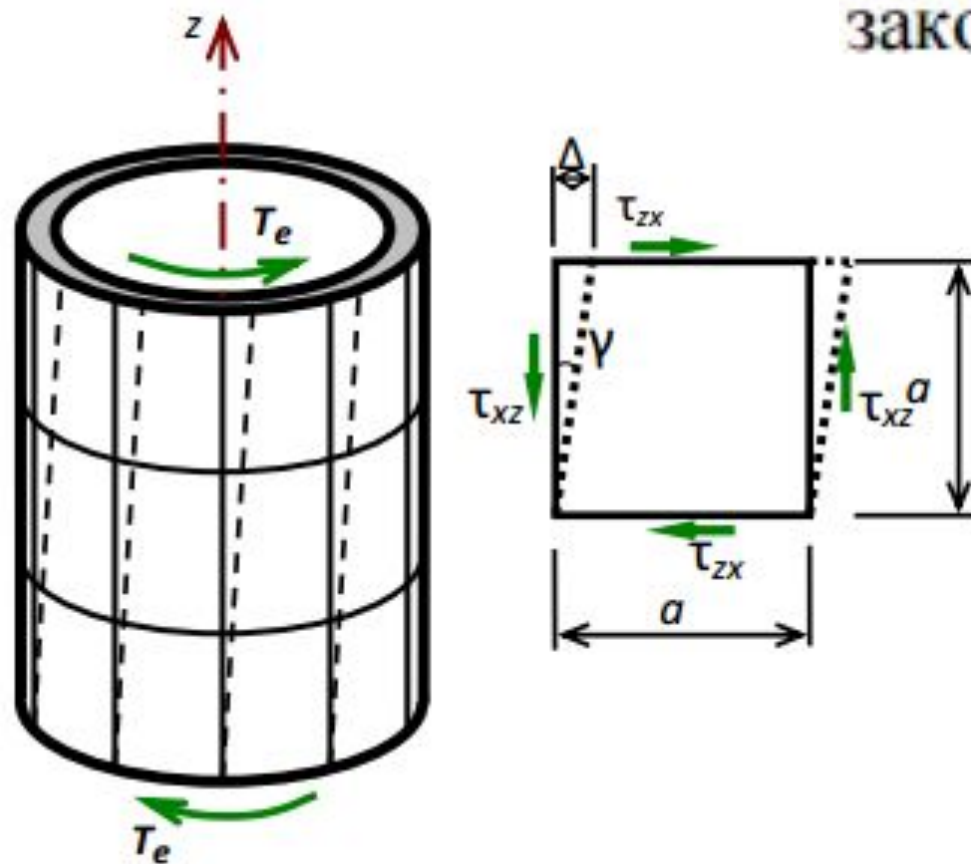


Статически неопределимая система



Чистый сдвиг

закон Гука при чистом сдвиге: $\tau = G\gamma$

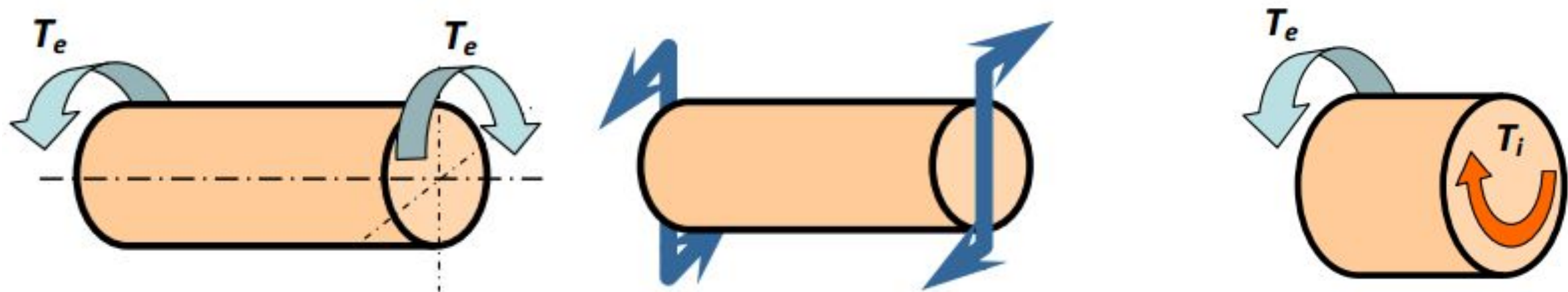


$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} - \text{модуль сдвига}$$

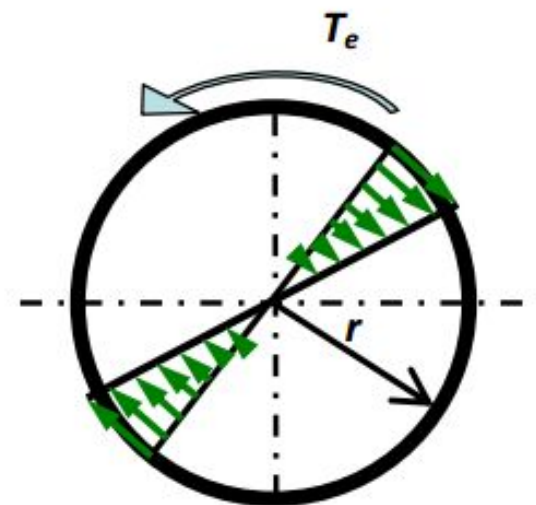
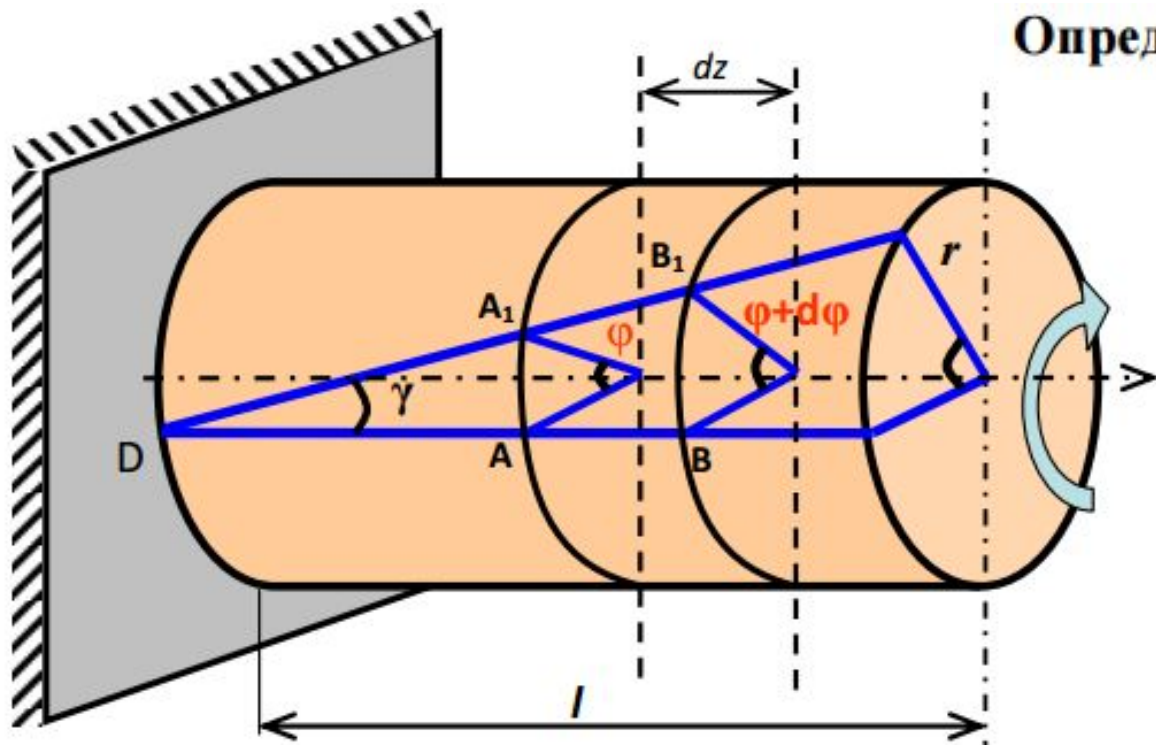
Для сталей среднее значение упругих постоянных:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \quad \mu = 0,3.$$

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ



Определение напряжений в поперечных сечениях стержней



Распределение касательных напряжений в сечении

Закон распределения касательных напряжений

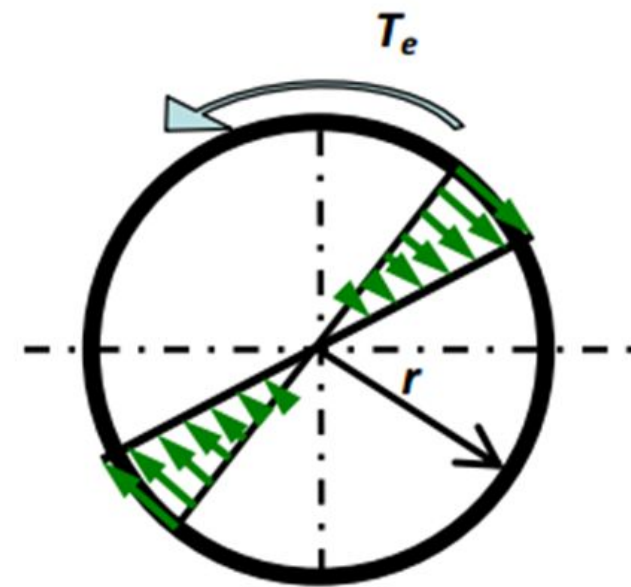
$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$$

Наибольшие касательные напряжения возникают на контуре сечения при $\rho = r$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

где $W = \frac{I_p}{r}$ – полярный момент сопротивления.

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$$



Распределение касательных напряжений в сечении

Условие прочности при кручении

$$\tau = \frac{T}{W_p} \leq \tau_{adm}$$

Определение перемещений при кручении

φ - угол взаимного поворота сечений, т.е. угол на который повернутся два каких-либо сечения друг относительно друга.

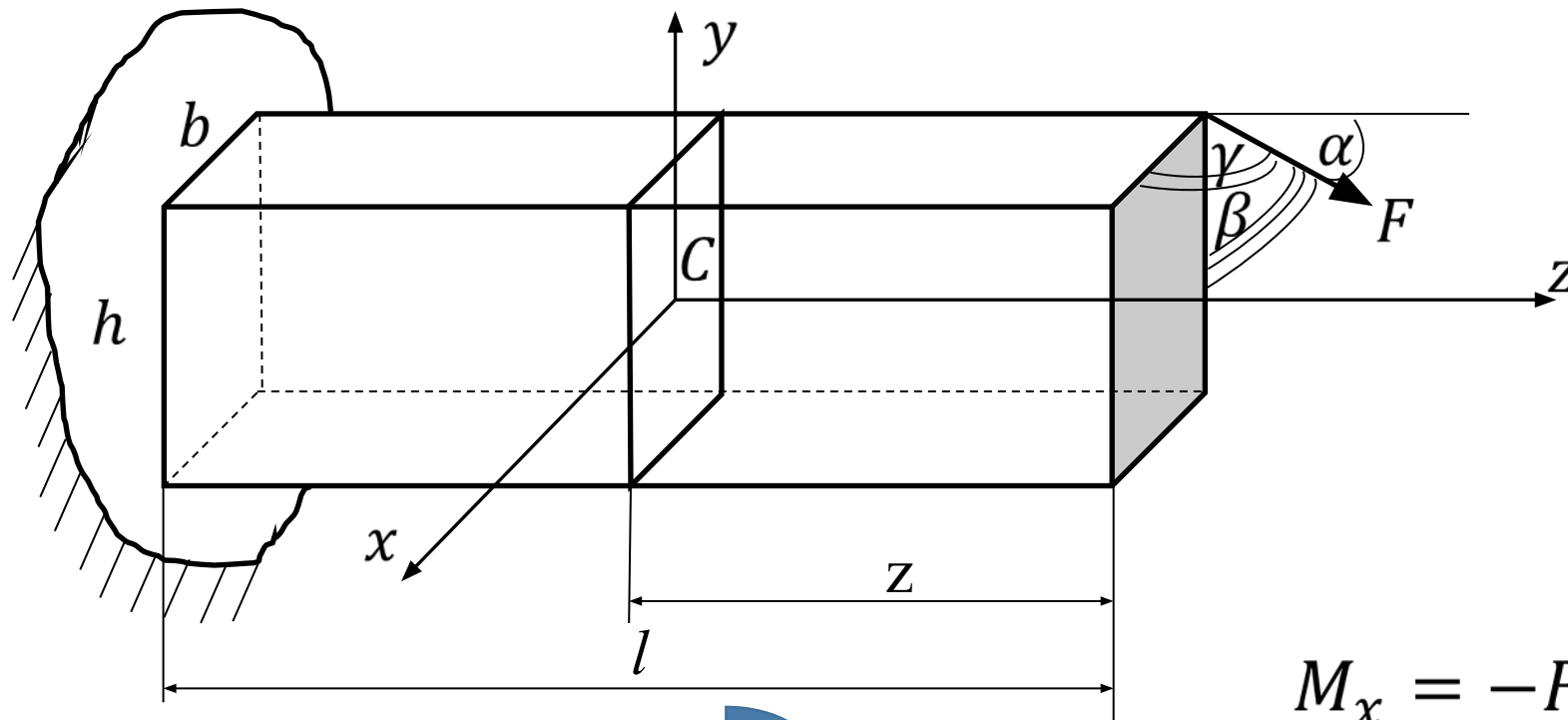
При $T = const$, $GI_p = const$:

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p}$$

Относительный угол закручивания, условие жесткости

$$\gamma = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{G \cdot I_p} \leq \gamma_{adm}$$

Сложное сопротивление



$$N = F \cdot \cos \alpha$$

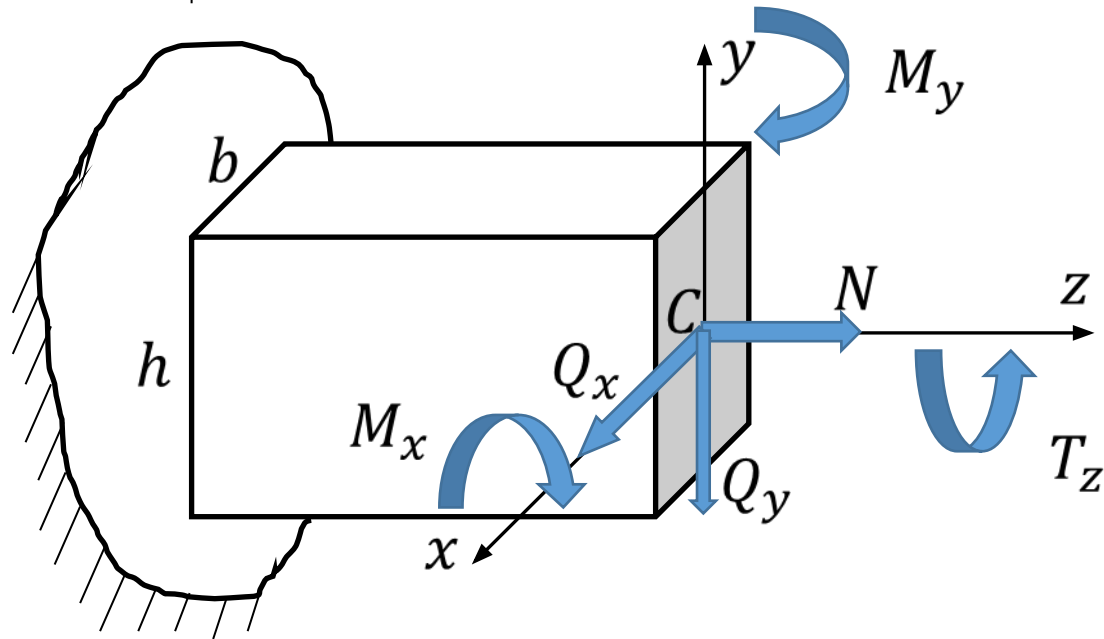
$$Q_x = F \cdot \cos \gamma$$

$$Q_y = F \cdot \cos \beta$$

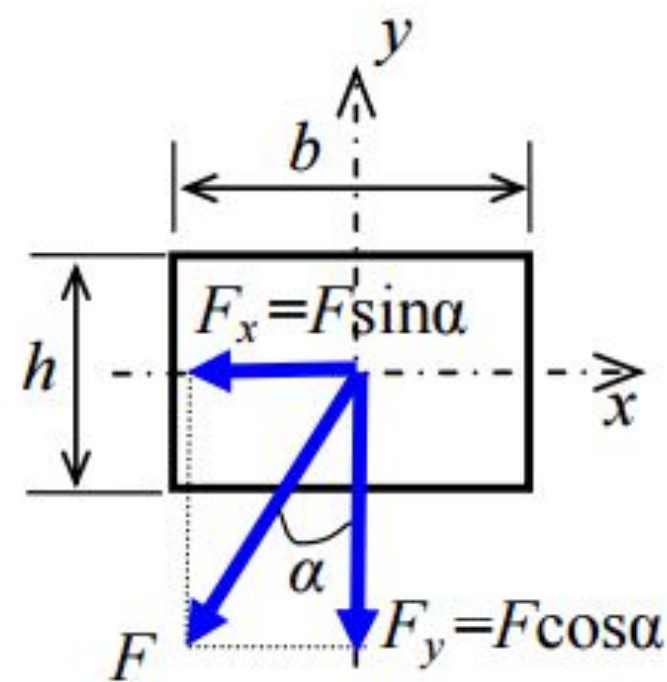
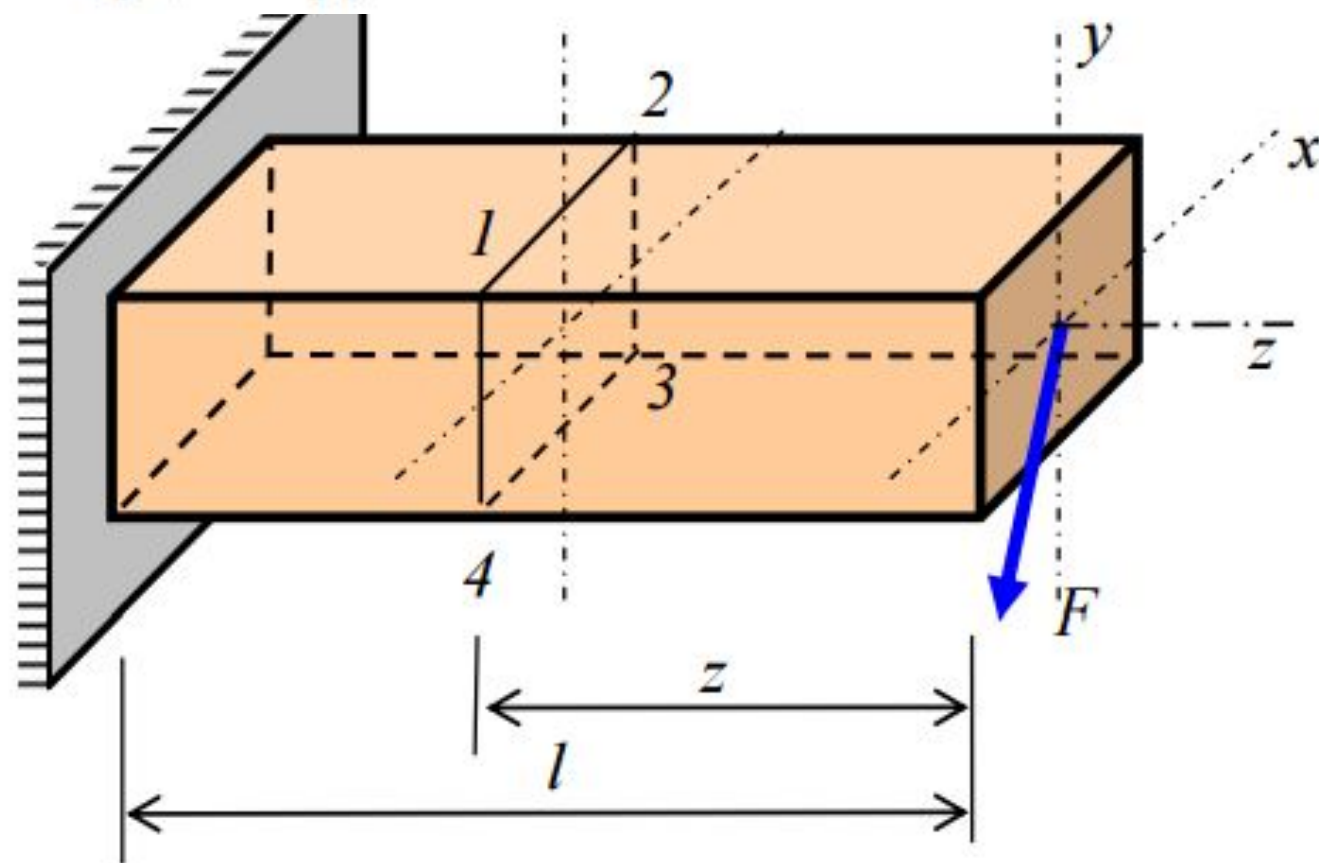
$$M_x = -F \cdot \cos \beta \cdot z - F \cdot \cos \alpha \cdot \frac{h}{2}$$

$$M_y = -F \cdot \cos \gamma \cdot z - F \cdot \cos \alpha \cdot \frac{b}{2}$$

$$T_z = F \cdot \cos \gamma \cdot \frac{h}{2} - F \cdot \cos \beta \cdot \frac{b}{2}$$



Косой изгиб – изгиб, при котором плоскость действия изгибающих моментов и поперечных сил не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции бруса.



$M_x = F_y z = F \cos \alpha \cdot z$ - в вертикальной плоскости

$M_y = F_x z = F \sin \alpha \cdot z$ - в горизонтальной плоскости.

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

от изгибающего момента M_x : $\sigma' = \pm \frac{M_x}{I_x} y$

от изгибающего момента M_y : $\sigma'' = \pm \frac{M_y}{I_y} x$

Полное напряжение в точке:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x,$$

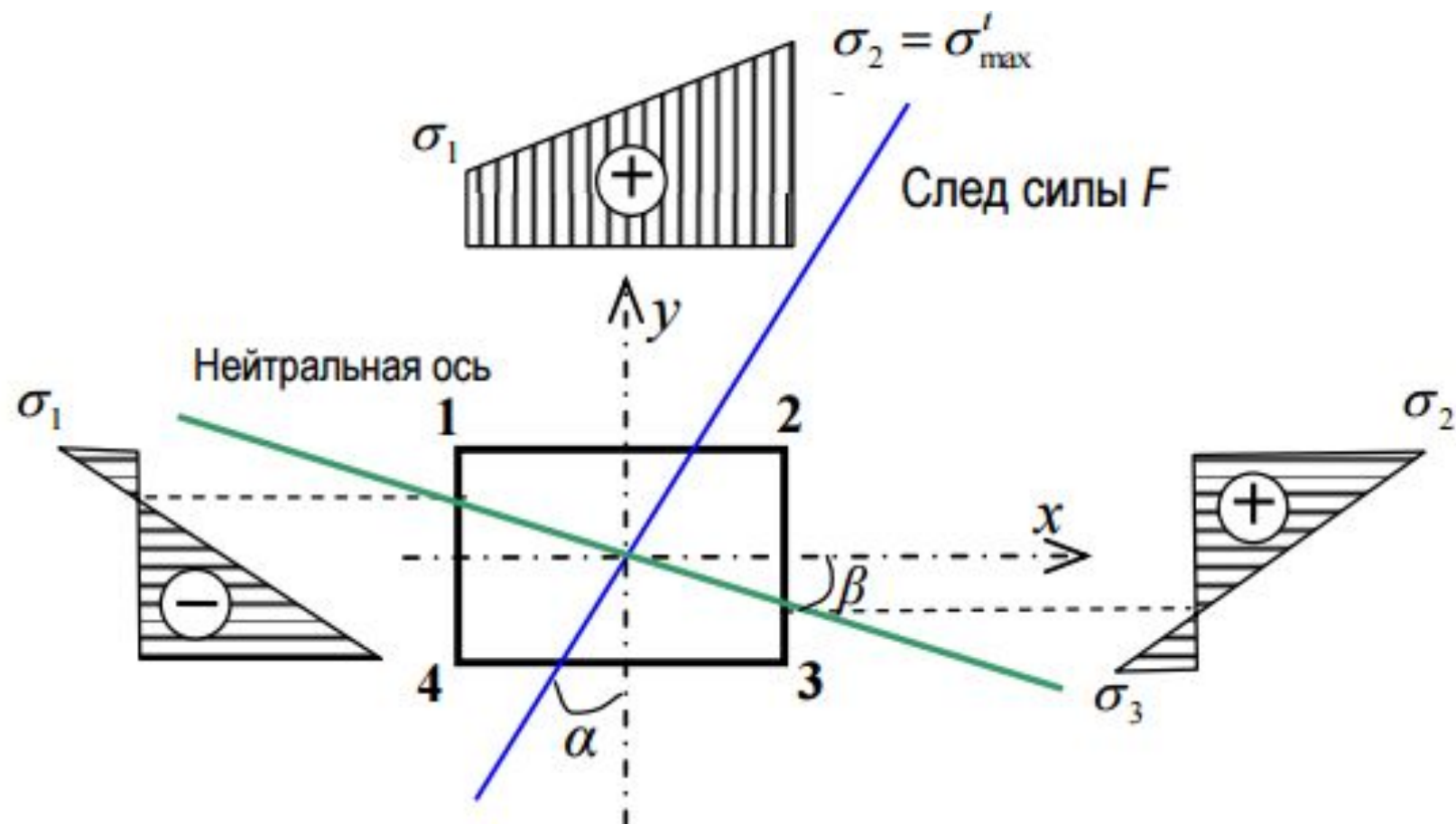
x, y – координаты точки

Условие прочности при косом изгибе

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq |\sigma_{adm}|$$

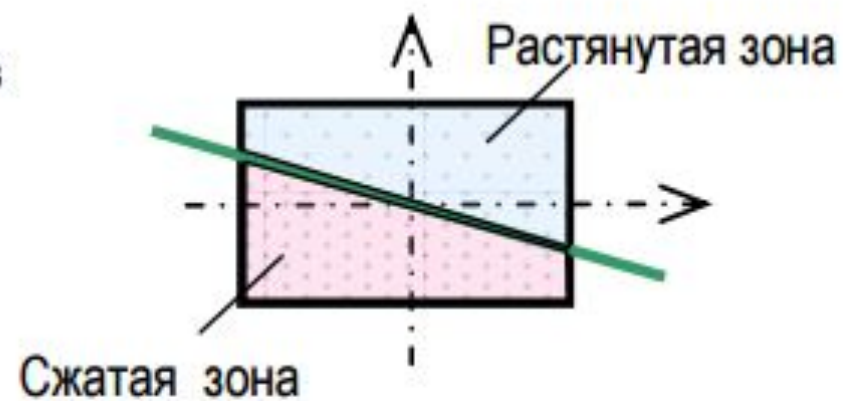
где $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$; $W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}$ –

моменты сопротивления сечения

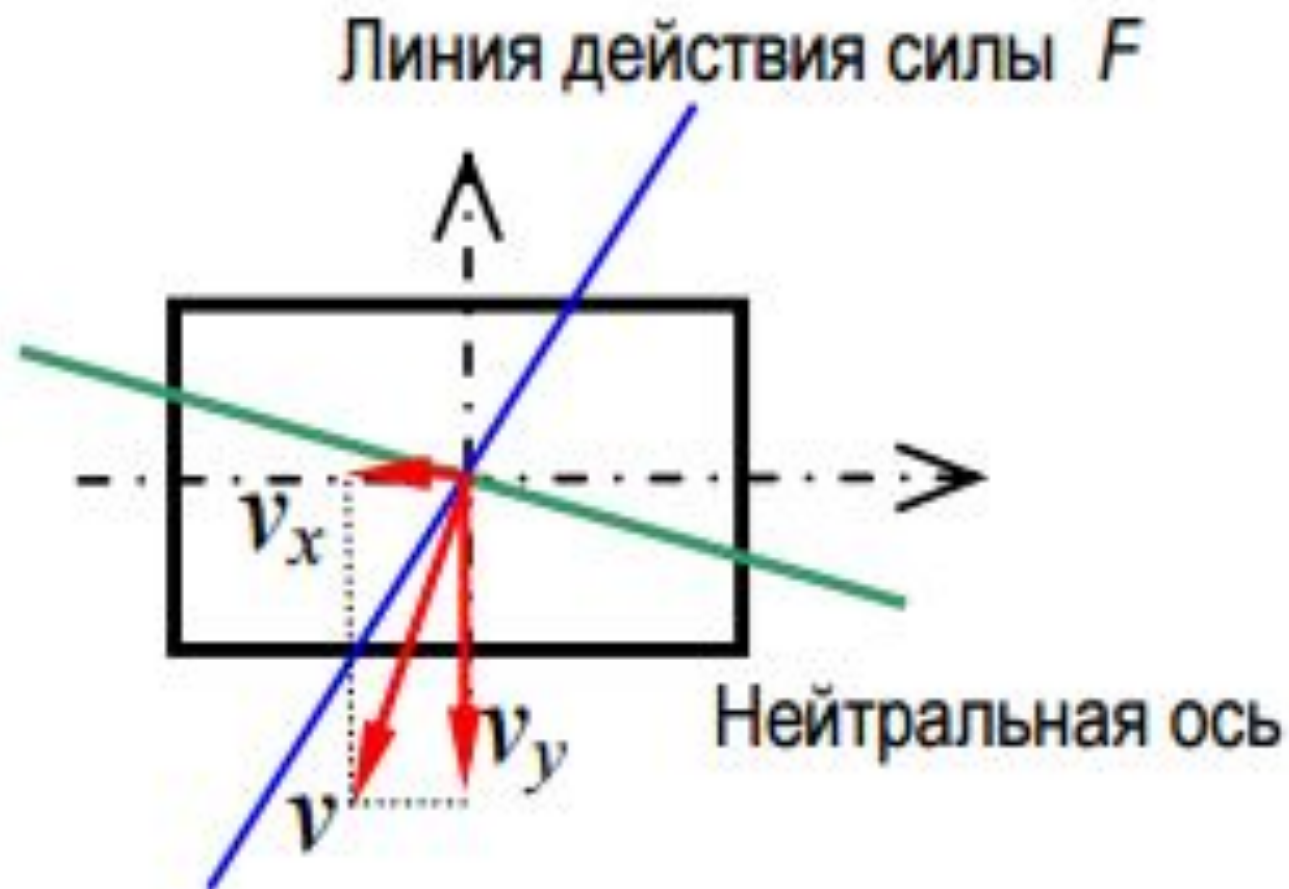


$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \alpha \frac{I_x}{I_y}$$

$\operatorname{tg} \beta \neq \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow$ нейтральная ось
не перпендикулярна линии действия силы



Определение перемещений



$$v_x = \sum \int \frac{M_y \cdot \overline{M}_n}{E \cdot I_y}$$

$$v_y = \sum \int \frac{M_x \cdot \overline{M}_n}{E \cdot I_x}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

