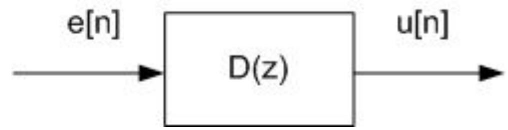
Z- передаточная функция и весовая последовательность цифрового блока.

Цифровой блок



Предположим, что числовые последовательности на входе и выходе блока связаны рекуррентным уравнением:

$$\mathbf{a_0 \cdot u[n] + a_1 \cdot u[n-1] + \dots + a_N \cdot u[n-N] = b_0 \cdot e[n] + b_1 \cdot e[n-1] + \dots + b_M \cdot e[n-M],}$$

$$\mathbf{a_0} \neq 0, \qquad \mathbf{n = 0, 1, 2, \dots}$$

$$\mathbf{u[m] = 0} \quad \text{и} \quad \mathbf{e[m] = 0} \quad \text{при} \quad \mathbf{m < 0, \quad N \geq M}$$

Применяем Z-преобразование и получаем:

$$\mathbf{\left(a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_N \cdot z^{-N}\right) \cdot U(z) = \left(b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_M \cdot z^{-M}\right) \cdot E(z)}$$

Передаточная функция блока равна отношению Z-преобразований сигналов:

$$\mathbf{\frac{U(z)}{E(z)} = D(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_M \cdot z^{-M}}{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_N \cdot z^{-N}} = \frac{b_0 \cdot z^{N} + \dots + b_M \cdot z^{N-M}}{a_0 \cdot z^{N} + \dots + a_N}},$$

$$\mathbf{U(z) = D(z) \cdot E(z)}$$

Согласно теореме о свертке выходная и входная последовательность связаны соотношением:

$$\mathbf{u[n]} = \sum_{\mathbf{m=0}}^{\mathbf{n}} \chi\mathbf{[n-m] \cdot e[m]}$$

Где последовательность $\boldsymbol{\chi}\mathbf{[n]}$, которую называют ***весовой последовательностью блока***, вычисляется посредством обратного Z-преобразования от передаточной функции:

$$\chi\mathbf{[n]} = \mathbf{Z^{-1}[D(z)]}$$

Весовая последовательность является сигналом на выходе блока, если на его вход подана единичная дискрета:

$$\mathbf{e[n]} = \delta\mathbf{[n]}, \qquad \left(\mathbf{Z}\left\{\delta\mathbf{[n]}\right\} = 1\right)$$

Передаточные функции цифрового регулятора, соответствующие типовым законам регулирования.

В аналоговых регуляторах используются следующие типовые законы регулирования:

пропорциональный (П) $u(t) = K_1 \cdot e(t)$

интегральный (И) $u(t) = K_2 \cdot \int_0^t e(\tau)d\tau$

дифференциальный (Д) $u(nT) = K_3 \cdot \frac{d}{dt}e(t)$

Для обозначения цифровых законов регулирования принято использовать те же буквы:

пропорциональный (П) $u(nT) = K_1 \cdot e(nT)$

суммирующий (И) $u(nT) = K_2 \cdot \sum_{m=0}^{n} e(mT)$

разностный (Д) $u(nT) = K_3 \cdot \left(e(nT) - e(nT - T)\right)$

Z-передаточная функция цифрового ПИД-регулятора имеет вид:

$$\mathbf{D(z)} = \mathbf{K_1} + \mathbf{K_2}\frac{1}{1-\mathbf{z}^{-1}} + \mathbf{K_3}\left(1-\mathbf{z}^{-1}\right), \qquad \text{где} \qquad \mathbf{z} = \mathbf{e}^{\mathbf{pT}}$$

Преобразуя к одному знаменателю, получим:

$$\mathbf{D(z)} = \frac{\left(\mathbf{K_1}+\mathbf{K_2}+\mathbf{K_3}\right)\cdot \mathbf{z}^2 - \left(\mathbf{K_1}+2\mathbf{K_3}\right)\cdot \mathbf{z} + \mathbf{K_3}}{\mathbf{z}^2 - \mathbf{z}}$$

Для цифрового ПИ-регулятора Z-передаточная функция равна:

$$\mathbf{D(z)} = \frac{\left(\mathbf{K_1}+\mathbf{K_2}\right)\cdot \mathbf{z} - \mathbf{K_1}}{\mathbf{z}-\mathbf{1}} = \mathbf{K_1}\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{z}-\mathbf{1}}{\mathbf{z}-\mathbf{1}}, \qquad \text{где} \quad \mathbf{b} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{K_2}}{\mathbf{K_1}} > 1$$

Часто используется другая формула для И закона регулирования:

$$\mathbf{u(nT)} = \mathbf{K_2}\cdot\sum_{\mathbf{m=0}}^{\mathbf{n-1}}\mathbf{e(mT)}$$

Для этой формулы передаточная функция цифрового И-регулятора равна:

$$\frac{1}{\mathbf{z}-\mathbf{1}} \qquad \text{или} \qquad \frac{\mathbf{z}^{-1}}{\mathbf{1}-\mathbf{z}^{-1}}$$

Z-передаточная функция цифрового ПИД-регулятора будет иметь вид:

$$\mathbf{D(z)} = \frac{\left(\mathbf{K_1} + \mathbf{K_3}\right)\cdot \mathbf{z}^2 - \left(\mathbf{K_1} - \mathbf{K_2} + 2\mathbf{K_3}\right)\cdot \mathbf{z} + \mathbf{K_3}}{\mathbf{z}^2 - \mathbf{z}}$$

Z-передаточная функция цифрового ПИ-регулятора примет вид:

$$\mathbf{D(z)} = \mathbf{K_1} + \frac{\mathbf{K_2}}{\mathbf{z-1}} = \frac{\mathbf{K_1}\cdot \mathbf{z} - \left(\mathbf{K_1} - \mathbf{K_2}\right)}{\mathbf{z} - \mathbf{1}}$$