Севастопольский государственный университет
Кафедра радиоэлектроники и телекоммуникаций

# Цифровая обработка сигналов

Севастополь 2017

# Лекция № 3
# Дискретизация сигналов во времени

# Виды дискретизации сигналов

***Дискретизация*** — процесс определения мгновенных значений аналогового сигнала $x(t)$ в дискретные моменты времени.

Виды дискретизации различаются по регулярности отсчетов:

— ***равномерная дискретизация***, когда $T_д$ постоянен;

— ***неравномерная дискретизация***, когда $T_д$ переменен, причем этот вид в свою очередь делится на:

— ***адаптивную***, когда $T_д$ меняется автоматически в зависимости от текущего изменения сигнала;

— ***программируемую***, когда $T_д$ изменяется в соответствии с заранее выбранными условиями.

По виду дискретизируемых сигналов различают:

— дискретизацию ***низкочастотных (видео)*** сигналов;

— дискретизацию ***полосовых (радио)*** сигналов.

# Техническая реализация дискретизации

Технически дискретизация производится с помощью электронного ключа (ЭК), который замыкается под управлением дискретизирующего сигнала $f_\delta(t)$ в интервалы времени $nT_д$, где $n$ = 0, 1, 2, 3, 4 ….

Пусть $x(t)$ — входной аналоговый сигнал.

В результате дискретизации на выходе ЭК формируются отсчеты дискретного сигнала $x(nT_д)$.

.

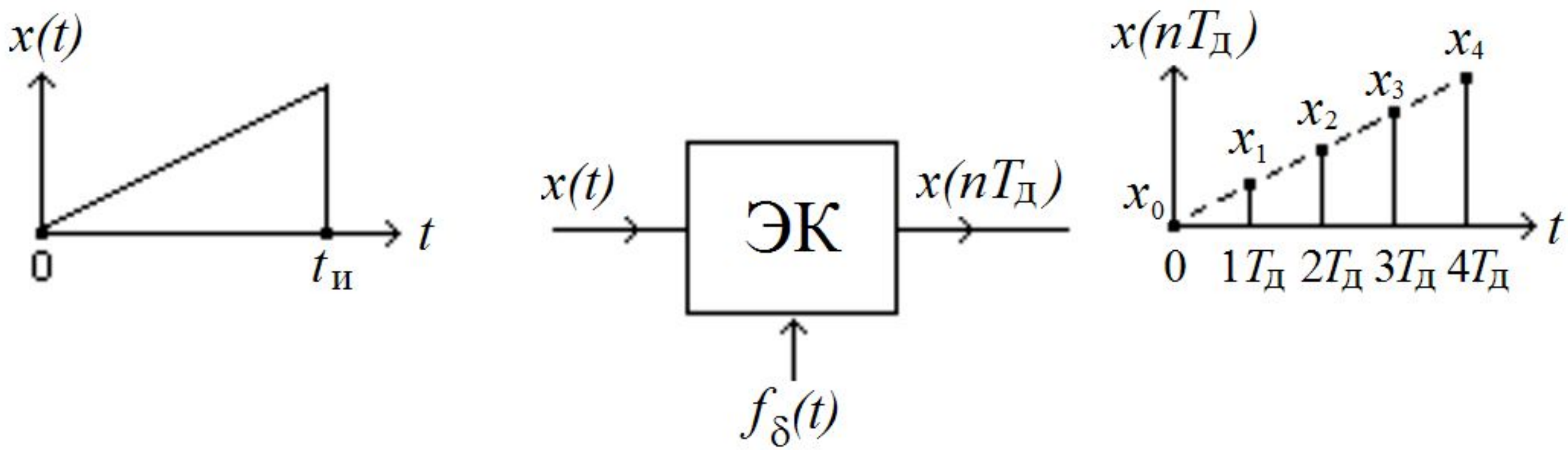



Рис. 3.1

# Математическая модель дискретного сигнала

Аналитически дискретный сигнал на выходе ЭК можно представить:

- функцией дискретного времени $nT_д$: $x(nT_д) = x(t)|_{t = nT_д,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots}$, соответствующей выборкам аналогового сигнала в дискретные, периодически повторяющиеся моменты времени;
- функцией номера выборки $n$: $x(n) = x(nT_д)\ |_{T_д = 1}$, в общем случае не связанной со временем;
- функцией непрерывного времени $t$:

$$x_д(t) = x(t) f_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_д) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_д)\delta(t - nT_д)\,, \quad (3.1)$$

получаемой умножением аналогового сигнала $x(t)$ на дискретизирующую функцию

$$f_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_д) \quad (3.2)$$

в виде периодической последовательности $\boldsymbol{\delta}$-импульсов с периодом, равным $T_д$:

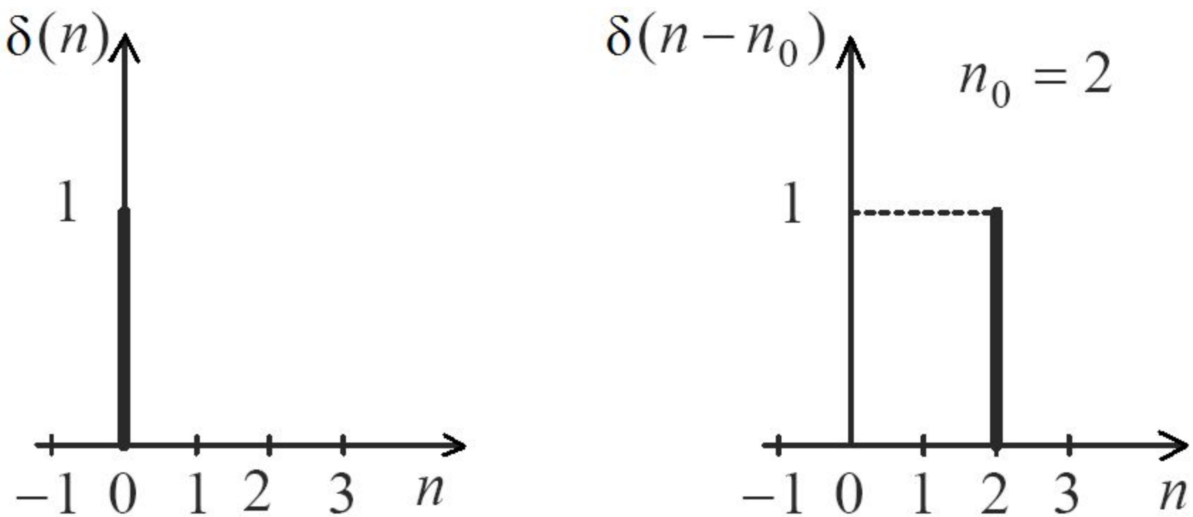
$$\delta(t - nT_д) = \begin{cases} \infty, & t = nT_д \\ 0, & t \neq nT_д \end{cases}. \quad (3.3)$$

# Типовые дискретные сигналы

При исследовании линейных дискретных систем ряд дискретных сигналов используют в качестве испытательных воздействий; такие сигналы называют ***типовыми***. К ним относятся:

- ***цифровой единичный импульс*** (функция Кронекера) (рис. 3.2(а));
- ***задержанный цифровой единичный импульс*** (рис. 3.2(б)).

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \qquad \delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0; \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$




а) Рис. 3.2 б)

# Применение единичных импульсов

Произвольная последовательность может быть представлена как сумма взвешенных и задержанных единичных импульсов. Например, последовательность $p(n)$, изображенную на рис. 3.3, мож

$$p(n) = a_{-3}\,\delta(n+3) + a_1\,\delta(n-1) + a_2\,\delta(n-2) + a_7\,\delta(n-7).$$

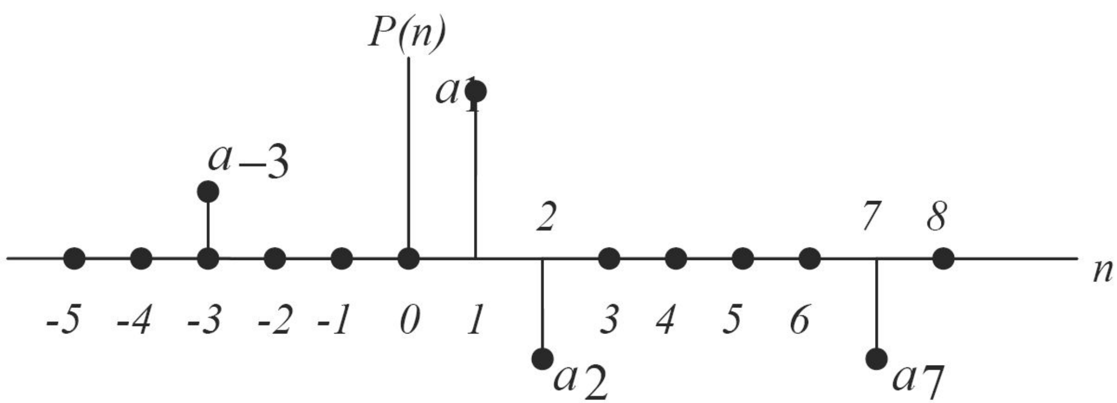



Рис. 3.3

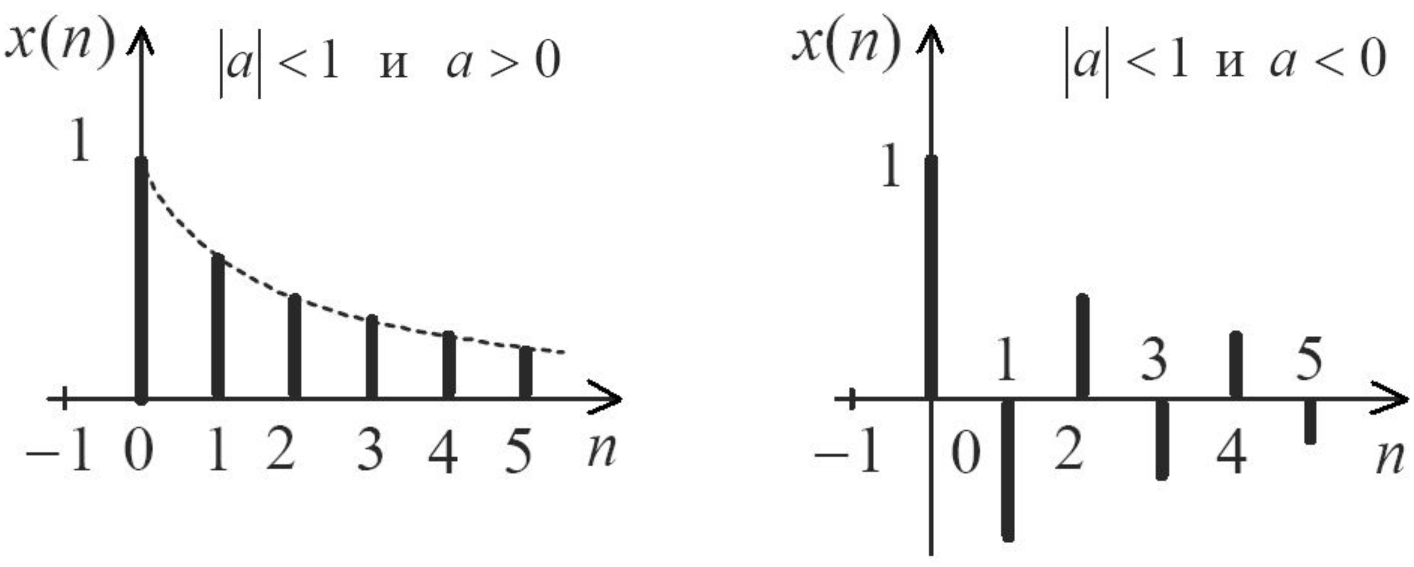
В общем случае произвольная последовательность; имеет вид

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot\delta(n-k).$$

# Типовые дискретные сигналы

***Дискретная экспонента***, описываемая последовательностью:

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \ge 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$




а) Рис. 3.4 б)

# Типовые дискретные сигналы

***Дискретный гармонический сигнал*** например, дискретная косинусоида, описываемая последовательностью:

$$x(nT_д) = A\cos(2\pi f n T_д) = A\cos(\omega n T_д),$$

$$\omega = 2\pi$$

где $\boldsymbol{T_д}$ — пе… , — частота.

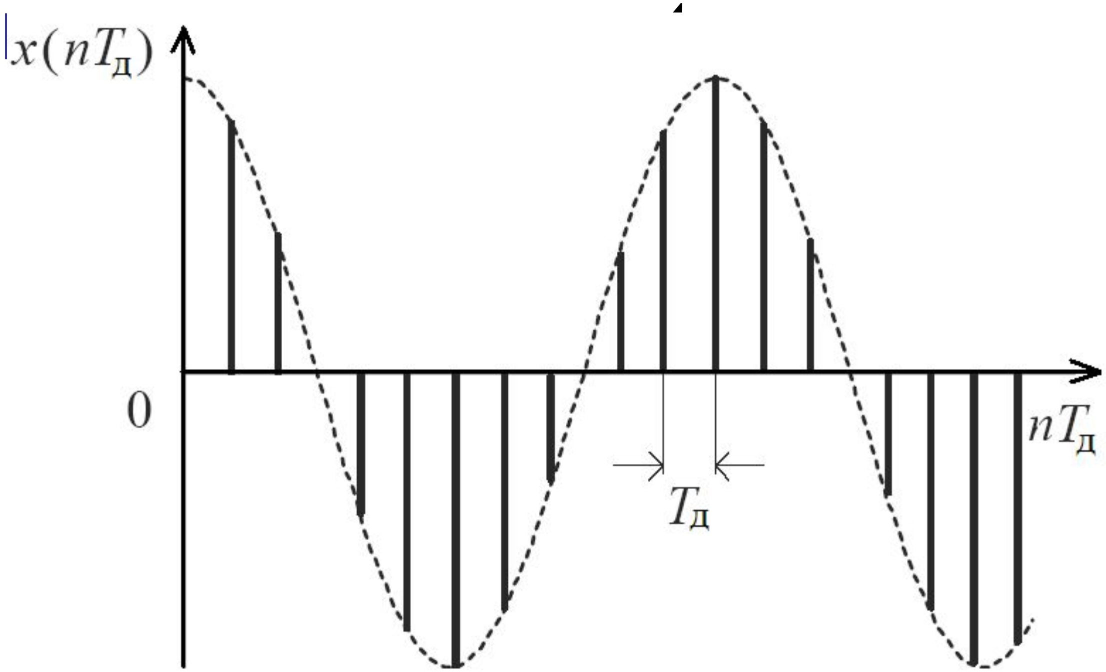



Рис. 3.5

# Спектр дискретного сигнала

Представим дискретный сигнал в виде произведения исходного сигнала $x(t)$ и дискретизирующей последовательности $\delta$-импульсов $f_\delta(t)$:

$$x_{д}(t) = x(t)\, f_\delta(t) \qquad (3.4)$$

Спектральную плотность дискретного сигнала $\boldsymbol{X}_{д}(j\omega)$ найдем, используя прямое преобразование Фурье дискретного сигнала, представленного функцией непрерывного времени (3.1):

$$X_{д}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{д}(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_{д}) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{д}) e^{-j\omega n T_{д}} \qquad (3.5)$$

(при выводе использовано фильтрующее свойство $\delta$-функции).

В силу периодичности комплексной экспоненты

$$e^{-j\omega nT_д} = e^{-j(\omega + k\omega_д)nT_д}$$

***спектр дискретного сигнала*** в отличие от аналогового ***периодичен по частоте*** с периодом $\omega_д$:

$$X_д(j\omega) = X_д[j(\omega + k\omega_д)],\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \qquad (3.6)$$

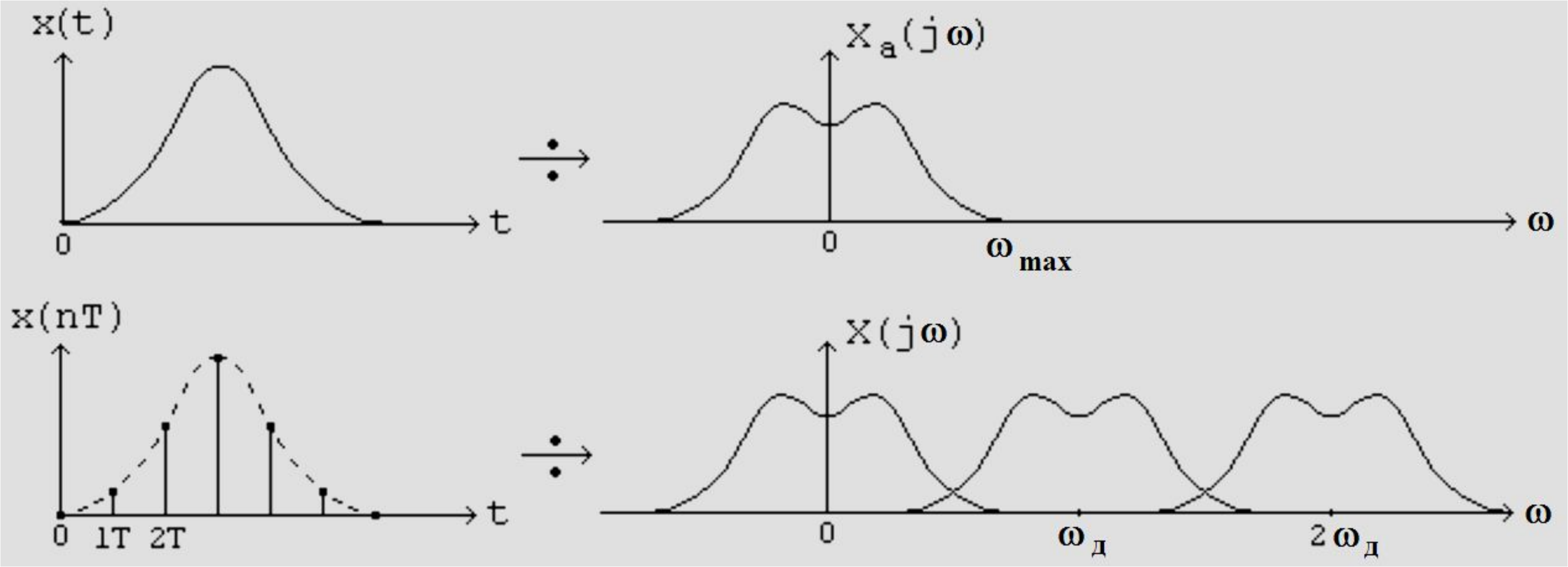



Рис.
3.6

# Связь между спектрами дискретного и аналогового сигналов

Представим дискретизирующую функцию $f_\delta(t)$ рядом Фурье

$$f_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, e^{jk\omega_д t} \; : \qquad (3.7)$$

Тогда дискретный сигнал можно записать

$$x_д(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_д t} \; . \qquad (3.8)$$

Коэффициенты ряда

$$C_k = \frac{1}{T_д} \int_{nT_д - T_д/2}^{nT_д + T_д/2} \delta(t - nT_д) e^{-jk\omega_д t} dt = \frac{1}{T_д} e^{-jk\omega_д nT_д} = \frac{1}{T_д}, \qquad (3.9)$$

Преобразование Фурье (3.8) при $C_k = 1/T_д$ приводит к выражению

$$X_д(j\omega) = \frac{1}{T_д} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk\omega_д t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_д} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega - k\omega_д)] . \qquad (3.10)$$

# Связь между спектрами дискретного и аналогового сигналов

- Из (3.10) следует, что ***спектр дискретного сигнала с точностью до постоянного множителя равен сумме спектров аналогового сигнала*** $X_{\text{а}}(j\omega)$ смешенных по частоте на $k\omega_{\text{д}}$.
- Перенос спектра $X_{\text{а}}(j\omega)$ на частоты $k\omega_{\text{д}}$ вызван умножением аналогового сигнала на множество комплексных экспонент $e^{jk\omega_{\text{д}}t}$, являющихся гармониками дискретизирующей функции $f_{\delta}(t)$.

# Влияние формы дискретизирующих импульсов

При выводе (3.10) предполагалось, что длительность дискретизирующих импульсов $\tau$ является бесконечно малой величиной.

На практике такие импульсы имеют конечную длительность.

Реальную дискретизирующую функцию можно записать:

$$f_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\delta(t - nT_д) - \delta(t - nT_д - \tau)\right).$$

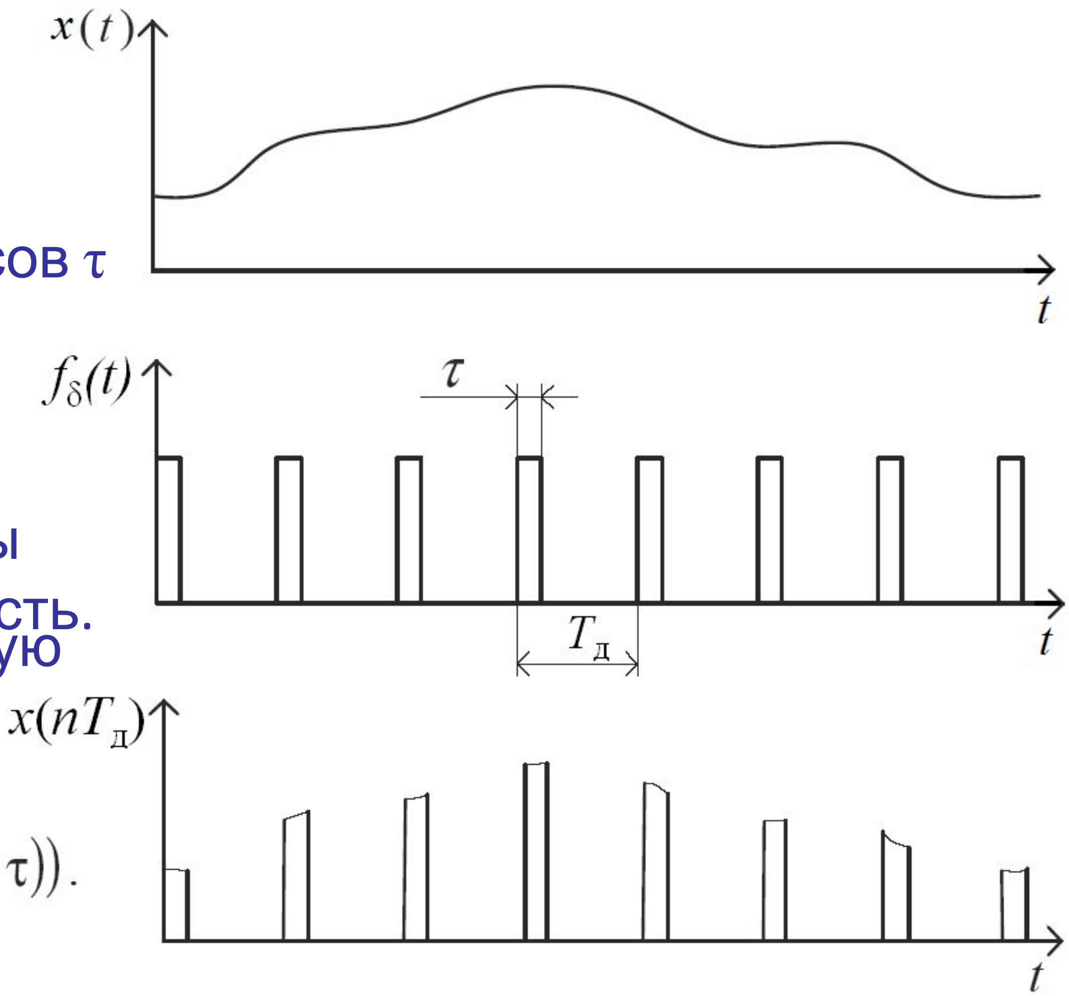



Рис. 3.7

# Влияние формы дискретизирующих импульсов (продолжение)

Для нахождения спектра дискретного сигнала в этом случае поступают путём представления дискретизирующих импульсов рядом Фурье и нахождения прямого преобразования Фурье.

Полученный спектр также имеет бесконечную длительность и периодичность, но его огибающая повторяет огибающую спектральной плотности дискретизирующего прямоугольного импульса с периодом $T_д$ и длительностью $\tau$ .

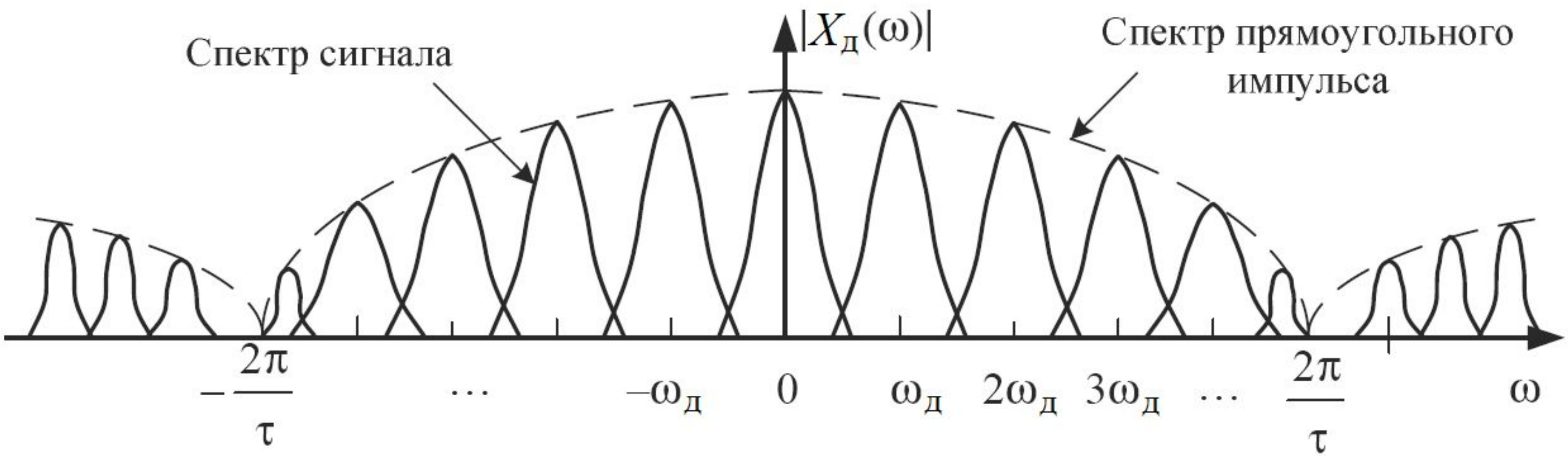
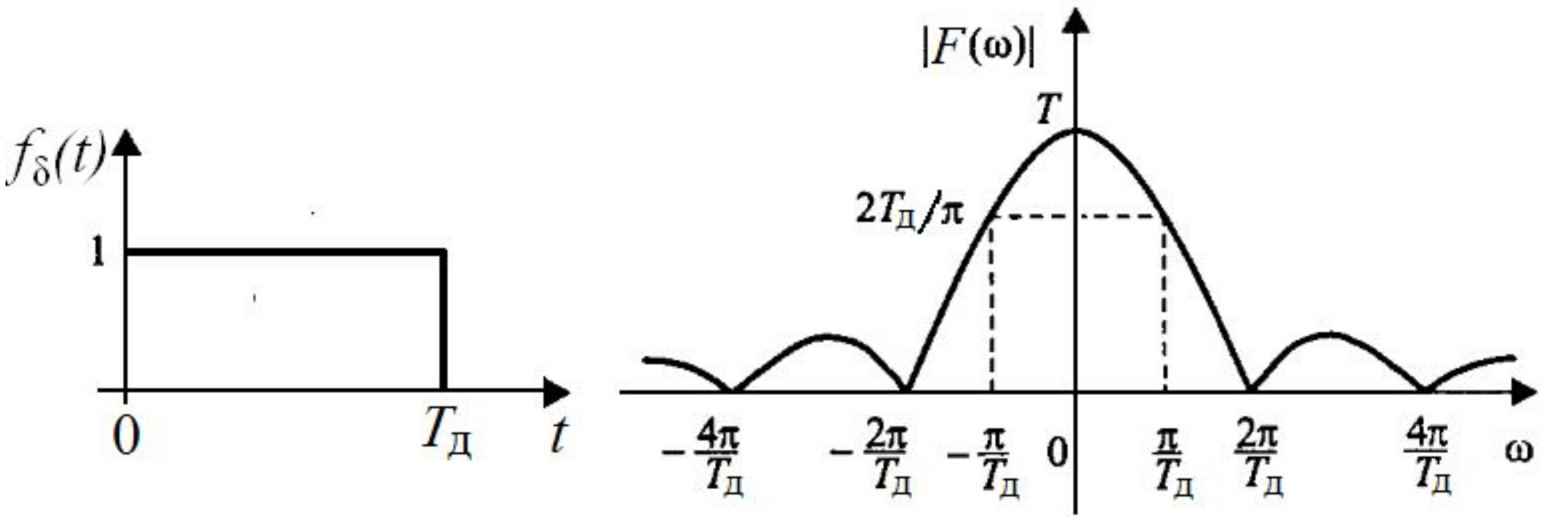



Рис. 3.8

# Влияние формы дискретизирующих импульсов (продолжение)

Рассмотрим случай, когда $f_\delta(t)$ представляет собой прямоугольный импульс с единичной амплитудой и длительностью, равной периоду дискретизации $\boldsymbol{T}_д$ (рис. 3.9, а).




а) Рис. 3.9 б)

Спектральная плотность этого сигнала имеет вид $|\sin(x)/x|$ (рис. 3.9, б).

# Влияние формы дискретизирующих импульсов (продолжение)

- При такой форме дискретизирующей функции дискретный сигнал приобретает ступенчатую форму, что характерно для сигнала на выходе ЦАП перед сглаживающим фильтром.
- Из графика спектральной плотности видно, что ЦАП сам по себе является фильтром нижних частот, однако с весьма невысокой степенью подавления сдвинутых копий спектра.
- Кроме того, поскольку АЧХ такого фильтра весьма далека от прямоугольной, он обладает неравномерностью в полосе пропускания и заметно ослабляет высокочастотные составляющие сигнала (на частоте $\omega_д/2$ ослабление составляет около 4 дБ).

# Спасибо за внимание!