Общая физика

Механика

Динамика твердого тела.

Моментом инерции **тела относительно оси называется произведение массы тела на квадраты расстояния до оси:**

$$J_i = m_i r_i^2$$

Моментом инерции системы **(тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:**

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу по объему тела:

$$J = \int_0^m r^2 dm$$

Тело

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса *R*	Ось симметрии	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиуса *R*	Ось симметрии	$J = \frac{1}{2} mR^2$
Стержень длиной *l*	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J = \frac{1}{12} ml^2$
Шар радиуса R	Ось проходит через центр шара	$J = \frac{2}{5} mR^2$

Теорема Штейнера:

«момент инерции тела J относительно произвольной оси равен моменту его инерции Jc относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния a между осями»

$$J = J_C + ma^2.$$

Пример.

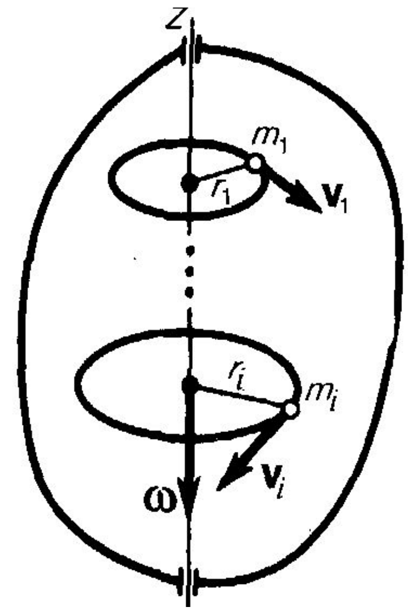
Момент инерции длинного стержня, у которого ось симметрии проходит через конец стержня:

$$J = J_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Кинетическая энергия вращения

Кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

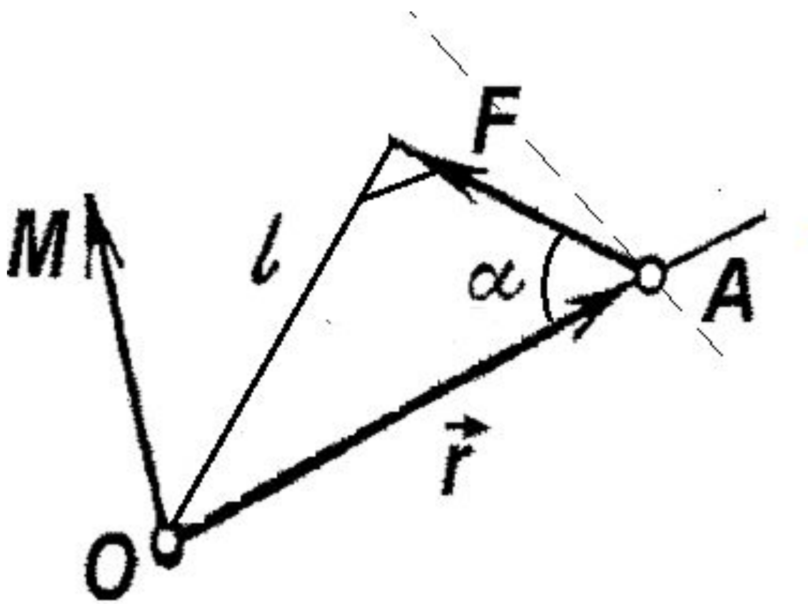


Момент инерции — мера инертности тела при вращательном движении.

В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}$$

Моментом силы F **относительно неподвижной точки *O* называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора *r*, проведенного из точки *O* в точку *A* приложения силы, на силу *F*.**



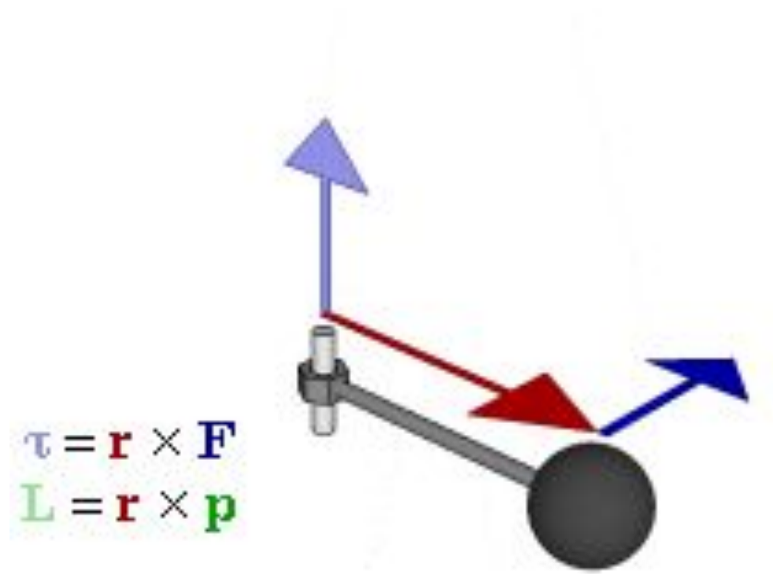
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Модуль момента силы:

$$M = Fr\sin\alpha = Fl.$$

Моментом силы F **относительно неподвижной оси** ***Z*** **называется скалярная величина** M_z**, равную проекции на эту ось вектора** ***M*** **момента силы, определенного относительно произвольной точки** ***O*** **данной оси** ***Z*** **.**

Значение момента не зависит от выбора точки ***O*** **на оси** ***Z*****.**



Работа при вращении тела:

$$dA = M_z d\varphi.$$

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dK = d\left(\frac{J_z\omega^2}{2}\right) = J_z\omega d\omega$$

Отсюда:

$$M_z d\varphi = J_z\omega\, d\omega, \quad M_z\frac{d\varphi}{dt} = J_z\omega\frac{d\omega}{dt}$$

- уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

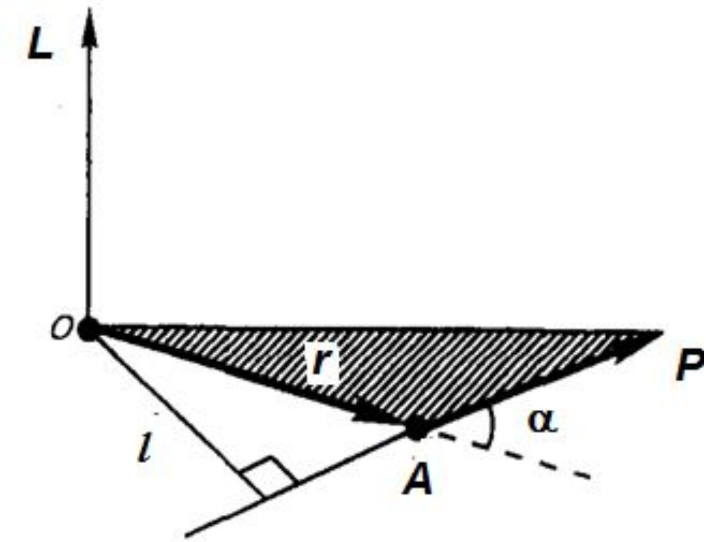
Если ось z совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство:

$$\boxed{\vec{M} = J\,\vec{\varepsilon},}$$

– основной закон динамики вращательного движения.

J — главный момент инерции тела.

Главный момент инерции **– момент инерции относительно главной оси, проходящий через центр масс.**



Моментом импульса **материальной точки** ***A*** **относительно неподвижной оси** ***O*** **называется физическая величина, определяемая векторным произведением:**

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

Моментом импульса **относительно неподвижной оси *z* называется скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки *O* данной оси.**

Скорость v_i и импульс $m_i\mathrm{v}_i$ каждой отдельной точки *A* тела перпендикулярны этому радиусу, т. е. радиус является плечом вектора $m_i\mathrm{v}_i$.

$$L_{i\,z} = m_i v_i r_i .$$

Момент импульса твердого тела **относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц (точек):**

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_z \omega, \qquad L_z = J_z \omega.$$

Продифференцируем записанное уравнение по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z, \qquad \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Это еще одна форма уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси:

«производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси».

Закон сохранения момента импульса:

«момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени».

$$\boxed{L = \text{const}}$$

Закон сохранения момента импульса — *фундаментальный закон природы.*

Он связан со свойством симметрии пространства — его изотропностью, т. е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.

***Пространство называется изотропным*, если поворот системы отсчета на произвольный угол не приведет к изменению результатов измерений.**

Соотношение основных параметров

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$v = \frac{dr}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{dv}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Сила	F	Момент силы	M
Импульс	p	Момент импульса	L
Основное уравнение динамики	$F = ma$	Основное уравнение динамики	$M = J\varepsilon$