

Упругие и квазиупругие силы. Закон Гука. Гармонические колебания: частота, период, амплитуда и фаза колебаний. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Гармонические колебания пружинного и математического маятников.

- *Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости.*

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные (или собственные) колебания и вынужденные колебания.

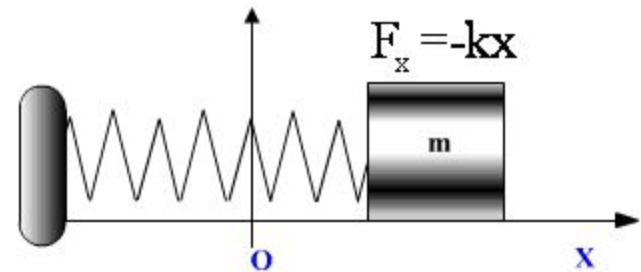
- *Свободными называют такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок либо она была выведена из положения равновесия.*
- *Вынужденными называют такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.*

Простейшим примером по характеру описания являются гармонические колебания. Это такие колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

## Колебания. 6.2

- Простейшим примером системы, где возникают свободные гармонические колебания, является движение тела под действием силы упругости пружины.

Примером такой системы является тело массы  $m$ , прикрепленное к пружине жесткостью  $k$ , движущееся по горизонтальной поверхности без трения. В этом случае  $x$  – растяжение пружины (смещение тела из положения равновесия).



Начало координат выбирается в точке, соответствующей положению конца нерастянутой пружины, поэтому  $x = l - l_0$  – растяжение пружины.

Если силы вида

$$F_x = -kx$$

*имеют другую природу (т.е. не являются силами упругости) то их называют квазиупругими. В этом случае  $k$  – коэффициент квазиупругой силы.*



## Колебания. 6.3

---

Напишем второй закон Ньютона, в проекции на ось  $x$ , для этой системы

$$F_x = m a_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания данной системы:

$$\ddot{x} = -kx$$

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Введя  
обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

получим окончательный вид линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего гармонические колебания:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



## Колебания. 6.4

---

Решение данного уравнения имеет вид:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия называется амплитудой колебаний  $A$ .

Величина  $(\omega_0 t + \varphi_0)$  стоящая под знаком косинуса, называется начальной фазой колебания.

Величину  $\omega_0$  называют циклической или круговой частотой колебаний.

Промежуток времени  $T$ , за который фаза колебаний изменится на  $2\pi$ , называется периодом колебания. Он определяется из следующего условия

$$(\omega_0 (t+T) + \varphi_0) = (\omega_0 t + \varphi_0) + 2\pi$$

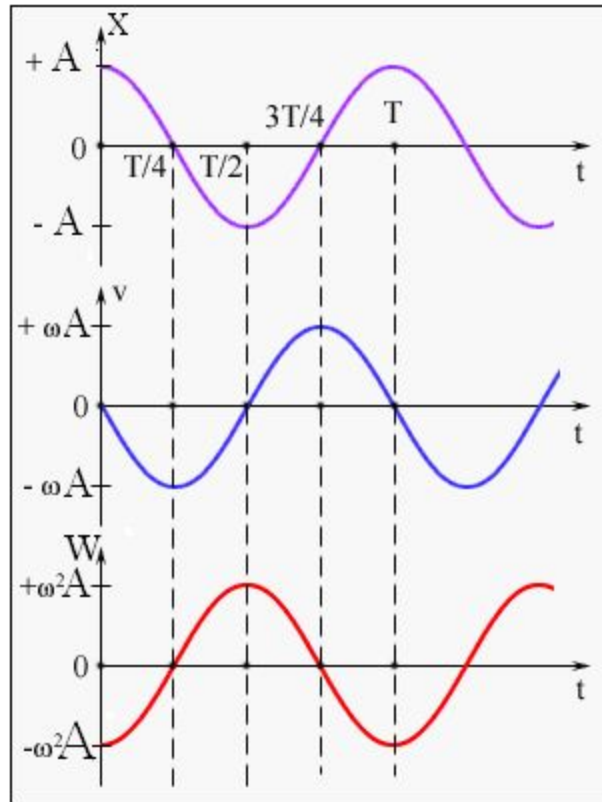
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Число колебаний в единицу времени называется частотой колебания  $\nu$ .

$$\nu = \frac{1}{T}$$

## Колебания. 6.5

Продифференцировав зависимость смещения от времени  $x(t)$  получим выражение для зависимости скорости от времени. Взяв вторую производную, получим зависимость ускорения от времени:



$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$v = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$w = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$

Как следует из этих соотношений ускорение, и смещение находятся в противофазе. Т.е. в тот момент, когда смещение достигает наибольшего положительного значения, ускорение достигает наибольшего отрицательно значения, и наоборот.

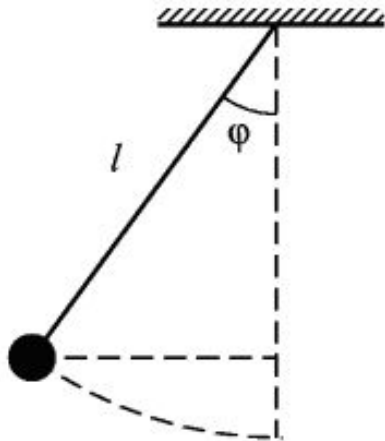
## Колебания. 6.6

Другим примером колебательной системы может служить математический маятник.

- *Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из легкой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.*

Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой шарик, подвешенный на длинной тонкой нити.

В такой системе при малых углах отклонения нити происходят гармонические колебания. В этом случае собственная частота



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

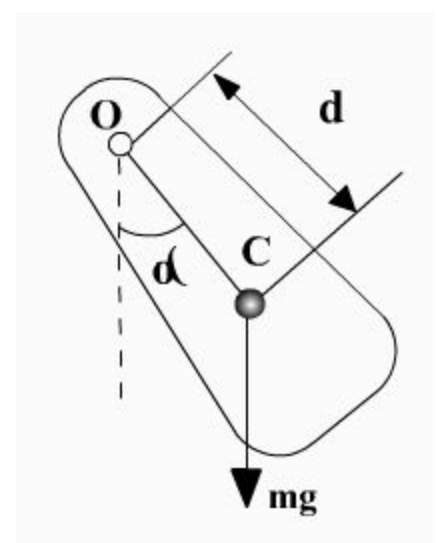
период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

## Колебания. 6.7

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции.

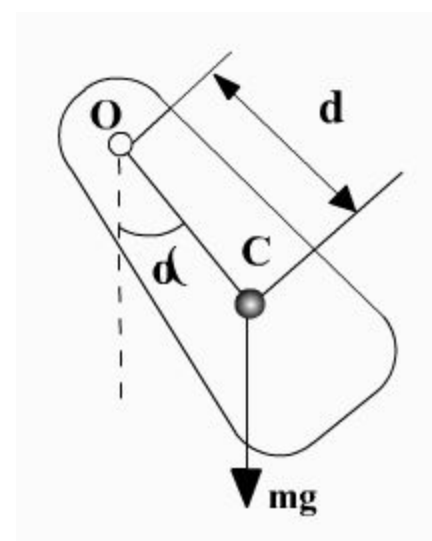
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}$$



## Колебания. 6.7

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}$$

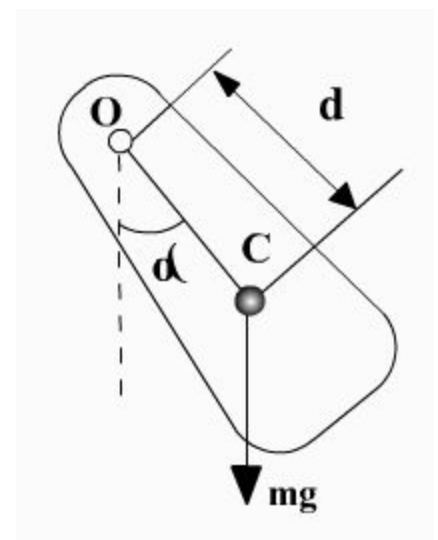




## Колебания. 6.7

Приведенной длиной физического маятника называется длина математического маятника имеющего такой же период колебаний

$$l_{np} = \frac{J}{md}$$





## Колебания. 6.7

---

В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия  $E$  состоит только из потенциальной, которая достигает своего максимального значения  $U_{\max}$ :

$$E = U_{\max} = \frac{kA^2}{2}$$



## Колебания. 6.8

---

При прохождении же системы через положение равновесия полная энергия состоит лишь из кинетической энергии, которая в эти моменты достигает своего наибольшего значения  $T_{\max}$ :

$$E = T_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

Определим, как изменяется со временем кинетическая и потенциальная энергии гармонических колебаний. Кинетическая энергия в произвольный момент времени равна:

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

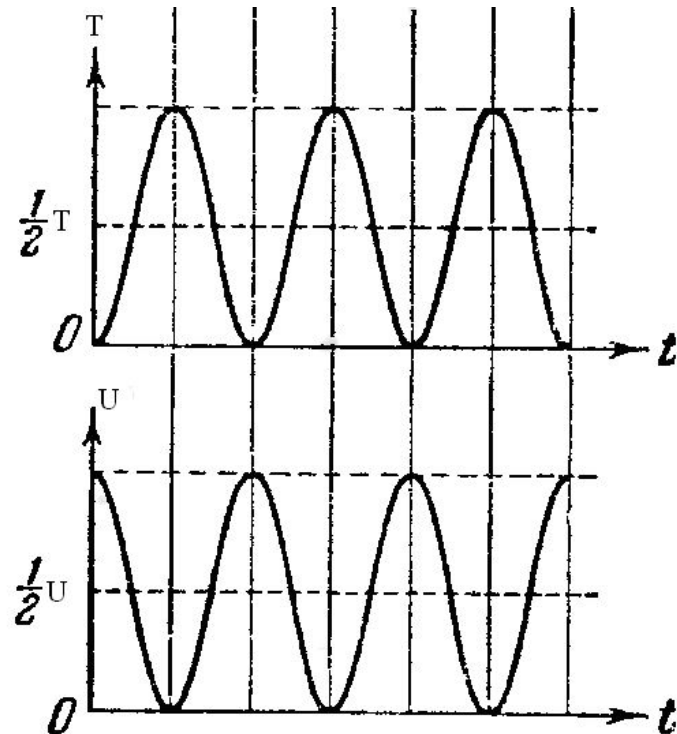
Потенциальная энергия выражается формулой:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

# Колебания. 6.9

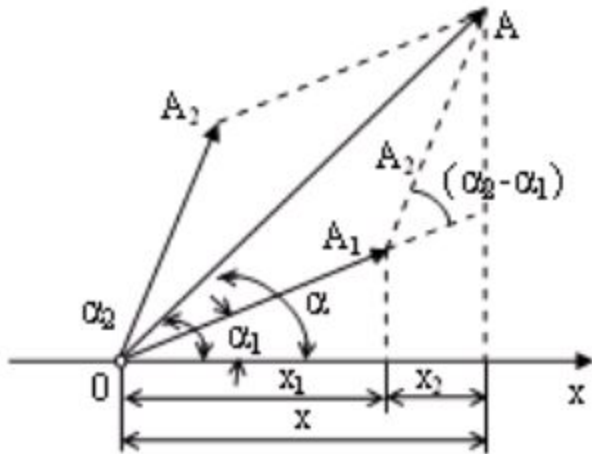
Сложив вместе кинетическую и потенциальную энергии, получим формулу для полной энергии:

$$E = U + T = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \text{const}$$

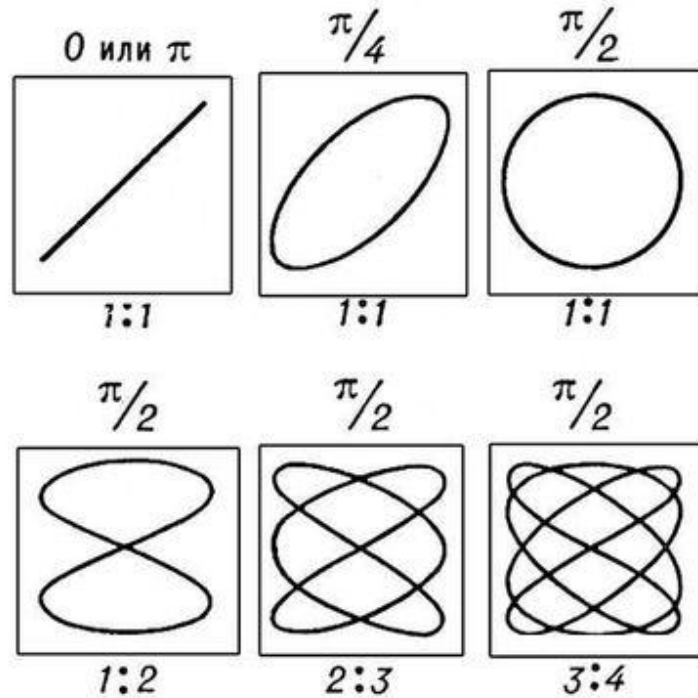


# Колебания. 6.10

- Сложение колебаний одного направления



Сложение перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.



## Лекция 7

### Затухающие колебания. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания. Энергия гармонических и затухающих колебаний.

---

При движении тела в среде последняя всегда оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. При этом энергия движущегося тела, в конце концов, переходит в тепло. В таких случаях говорят, что имеет место *диссипация* энергии. Если движение тела в среде достаточно медленное по сравнению со скоростью внутренних диссипативных процессов, то реакция среды на движение тела в некоторых случаях может быть приближенно описана введением так называемой силы трения, действующей на тело и зависящей лишь от скорости последнего. Такая ситуация возникает, например, при движении тела в вязкой среде, жидкости или газе.

В ряде случаев можно считать, что сила сопротивления пропорциональна величине скорости

$$F_{\text{сопр.}} = -r\dot{x}$$



## Колебания. 7.2

---

Уравнение второго закона Ньютона для пружинного маятника в присутствии сил сопротивления имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

Перепишем его следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Где применены следующие обозначения:

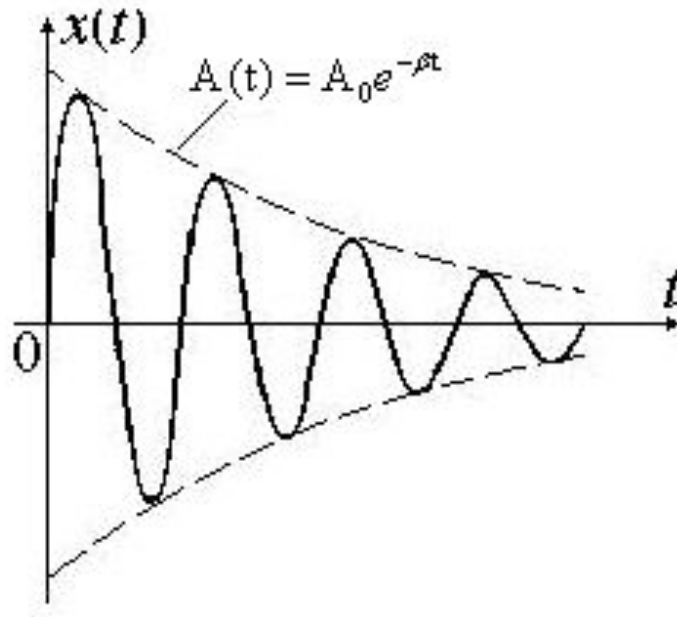
$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$\omega_0$  представляет собой ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания системы при отсутствии сопротивления среды, т.е. при  $r=0$ . Наличие сопротивления среды приводит к тому, что размах колебаний уменьшается. Поэтому в зависимости смещения от времени амплитуда колебаний должна изменяться.

## Колебания. 7.3

При небольшой силе трения полученное выше дифференциальное уравнение имеет следующее решение:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$







## Колебания. 7.4

---

В соответствии с видом функции движение системы можно рассматривать как гармонические колебания частоты  $\omega$  с амплитудой, изменяющейся во времени по закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Скорость затухания колебаний определяется величиной  $\beta = \frac{r}{2m}$  которую называют коэффициентом затухания.

Найдем время  $\tau$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

По определению  $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$  откуда  $\beta\tau = 1$ .

Следовательно, коэффициент затухания обратен по величине тому промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Период затухающих колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$



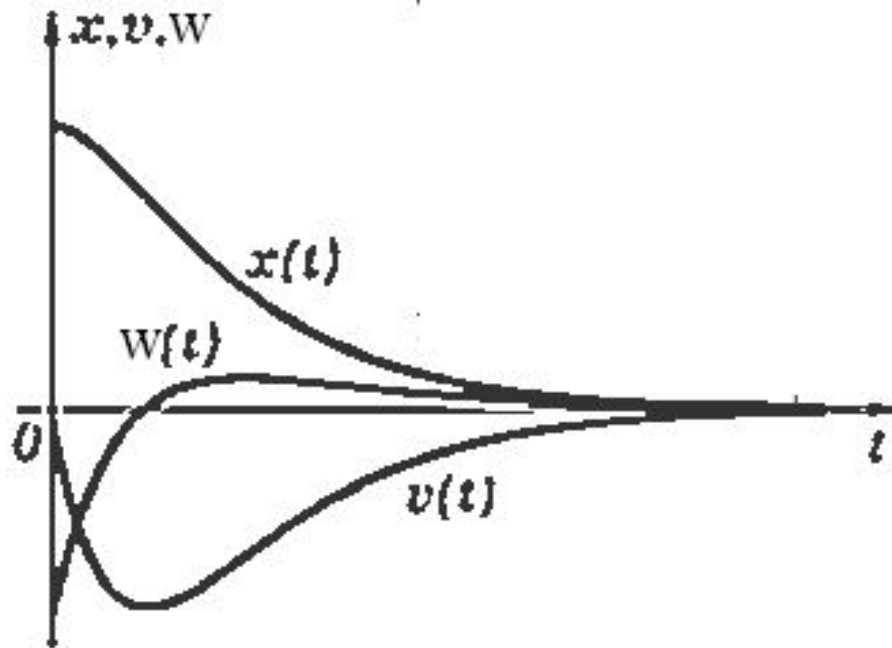
## Колебания. 7.5

---

Видно, что период затухающих колебаний больше, чем период незатухающих колебаний с теми же параметрами колебательной системы. При незначительном сопротивлении среды ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ), период колебаний практически равен  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . С ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается. При приближении коэффициента затухания (сопротивления среды) к величине равной  $\omega_0$  период колебаний становится равным бесконечности и колебания становятся аperiodическими – выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. Запас механической энергии тела к моменту его возвращения в положение равновесия полностью расходуется на преодоление трения.

# Колебания. 7.6

Апериодические колебания





## Колебания. 7.7

---

Последующие наибольшие отклонения в какую-либо сторону (например  $A'$ ,  $A''$ ,  $A'''$  и т.д.) образуют геометрическую прогрессию.

Действительно, если

$$A' = A_0 e^{-\beta t}, \text{ то}$$

$$A'' = A_0 e^{-\beta(t+T)} = A' e^{-\beta T}, \quad A''' = A_0 e^{-\beta(t+2T)} = A'' e^{-\beta T}$$

Вообще, отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, равно

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

Это отношение называют декрементом затухания, а его логарифм – логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$



## Колебания. 7.8

Выразив  $\beta$  через  $\lambda$  и  $T$ , закон убывания амплитуды можно записать в виде:

$$A = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T}t}$$

За время  $\tau$ , за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз, система успевает совершить  $N_e = \tau/T$  колебаний. Из условия  $e^{-\lambda \frac{\tau}{T}} = e^{-1}$  получается, что  $\lambda \frac{\tau}{T} = \lambda N_e = 1$

Следовательно, логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за то время, за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Для характеристики колебательной системы часто употребляется также величина:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$$

называемая *добротностью* колебательной системы. Как видно из ее определения, добротность пропорциональна числу колебаний  $N_e$ , совершаемых системой за то время  $\tau$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.



## Колебания. 7.9

---

Найдем импульс системы, совершающей затухающие колебания.

Продифференцировав зависимость, смещение в затухающих колебаниях по времени и умножив полученный результат на массу  $m$ , получим:

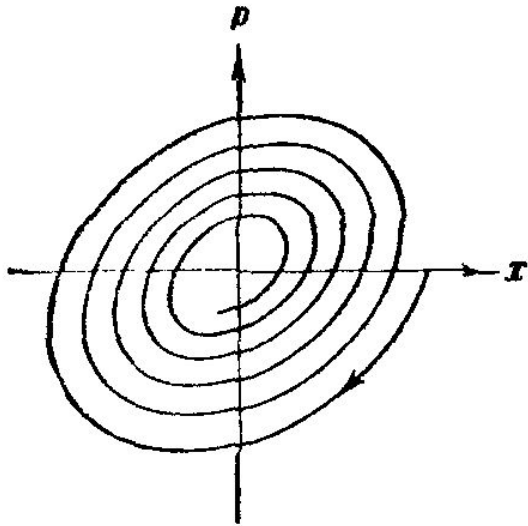
$$p = \dot{m}x = -mA_0 e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega \sin(\omega t + \varphi_0)]$$

Это выражение может быть преобразовано к виду

$$p = p_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0 + \psi)$$

Если бы не множитель  $e^{-\beta t}$ , то, исключив  $t$  из этих уравнений, мы получили бы в координатах  $x$  и  $p$  уравнение эллипса, повернутого по отношению к координатным осям. Наличие экспоненциального множителя приводит к тому, что эллипс превращается в скручивающуюся спираль. Эта спираль и представляет собой фазовую траекторию затухающего колебания. Она будет наклонена по отношению к координатным осям тем сильнее, чем больше коэффициент затухания

## Колебания. 7.10



При затухающих колебаниях энергия системы расходуется на преодоление сопротивления среды. Если восполнять эту убыль энергии, колебания станут незатухающими. Пополнение энергии системы может осуществляться за счет толчков извне, однако эти толчки должны сообщаться системе в такт с ее колебаниями, иначе они могут уменьшить колебания системы и даже прекратить их совсем.

Можно сделать так, чтобы колеблющаяся система сама управляла внешним воздействием, обеспечивая согласованность сообщаемых ей толчков со своим движением. Такая система называется *автоколебательной*, а совершаемые ею незатухающие колебания – *автоколебаниями*.



## Лекция 8

### Вынужденные колебания. Резонанс

---

Если колебательная система подвергается воздействию внешней периодической силы, то возникают так называемые *вынужденные колебания*, имеющие незатухающий характер. Вынужденные колебания следует отличать от автоколебаний. В случае автоколебаний в системе предполагается специальный механизм, который в такт с собственными колебаниями "поставляет" в систему небольшие порции энергии из некоторого резервуара энергии. Тем самым поддерживаются собственные колебания, которые не затухают. В случае автоколебаний система как бы сама себя подталкивает. В случае вынужденных колебаний система подталкивается посторонней силой. Особый интерес представляет случай, когда внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону с частотой  $\omega$ , воздействует на колебательную систему, способную совершать собственные колебания на некоторой частоте  $\omega_0$ . Если свободные колебания происходят на частоте  $\omega_0$ , которая определяется параметрами системы, то установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на *частоте  $\omega$  внешней силы*.





## Вынужденные колебания. 8.2

Уравнение второго закона Ньютона для пружинного маятника, на который действует периодически изменяющаяся сила, будет иметь вид:

$$\ddot{x} = -kx - \dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

Разделив это уравнение на  $m$ , и перенеся члены с  $x$  и  $\dot{x}$  в левую часть, получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\dot{x} + 2\beta x + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

Решение данного уравнения имеет следующий вид:

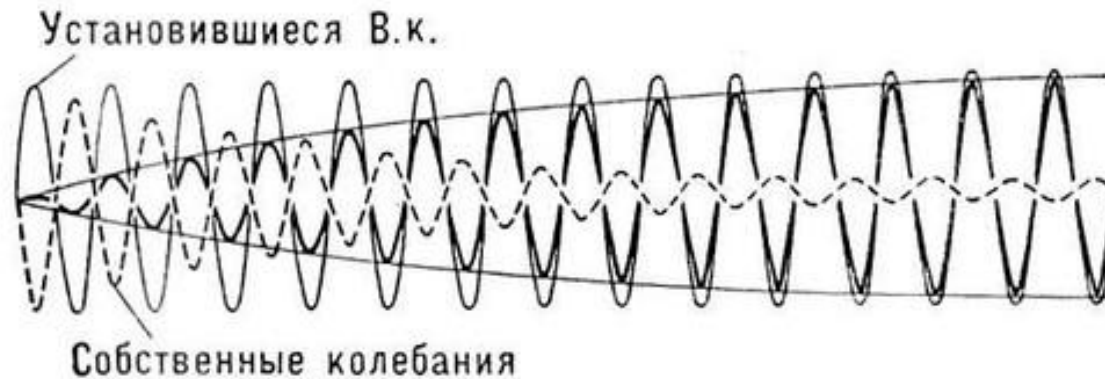
$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos((\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})t + \varphi') + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы представляет свободные колебания их частота  $\omega$  определяется внутренними свойствами системы, а амплитуда  $A_0$  и фаза  $\varphi'$  — начальными условиями и внешними воздействиями. Второе слагаемое, называемое *вынужденными колебаниями*, обусловлено наличием внешней (вынуждающей) силы.

## Вынужденные колебания. 8.3

Первое слагаемое в этом выражении играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом установлении колебаний. С течением времени из-за экспоненциального множителя роль первого слагаемого все больше уменьшается, и по прошествии достаточного времени им можно пренебречь, сохраняя лишь второе слагаемое.

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$





## Вынужденные колебания. 8.4

---

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при этой частоте. Это явление называется *резонансом*, соответствующая частота – *резонансной частотой*.

Чтобы определить резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}}$ , нужно найти максимум функции определяющей зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы. Продифференцировав выражение

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

по  $\omega$  и приравняв нулю, получим условие, определяющее  $\omega_{\text{рез}}$ :

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0$$



## Вынужденные колебания. 8.5

---

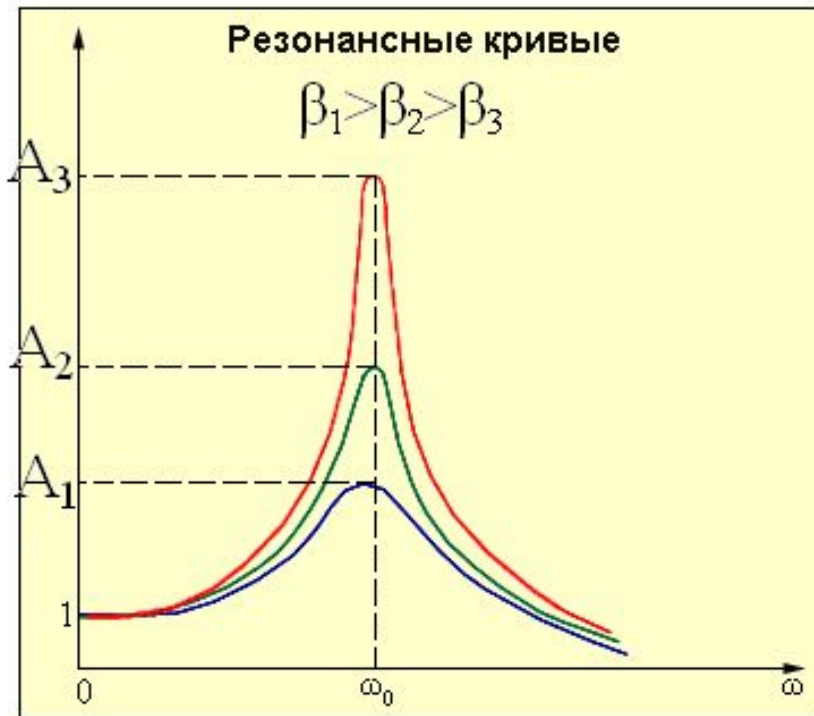
Данное уравнение имеет три решения:  $\omega=0$  и  $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$  .

Решение равное нулю, соответствует максимуму знаменателя. Из остальных двух решений отрицательное не подходит, как не имеющее физического смысла. В результате, для резонансной частоты получается значение:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Если частота  $\omega$  внешней силы приближается к собственной частоте  $\omega$ , возникает резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний. Это явление называется *резонансом*. Зависимость амплитуды  $A$  вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  вынуждающей силы называется *резонансной характеристикой* или *резонансной кривой*.

## Вынужденные колебания. 8.6



При очень большом затухании выражение для резонансной частоты становится мнимым. Это означает, что при этих условиях резонанс не наблюдается – с увеличением частоты амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает. При стремлении  $\omega$  к нулю все кривые приходят к одному и тому же, отличному от нуля, предельному значению, равному

$$f_0 / \omega_0^2$$

т.е.  $F_0/k$ . Это значение представляет собой смещение из положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы величины  $F_0$

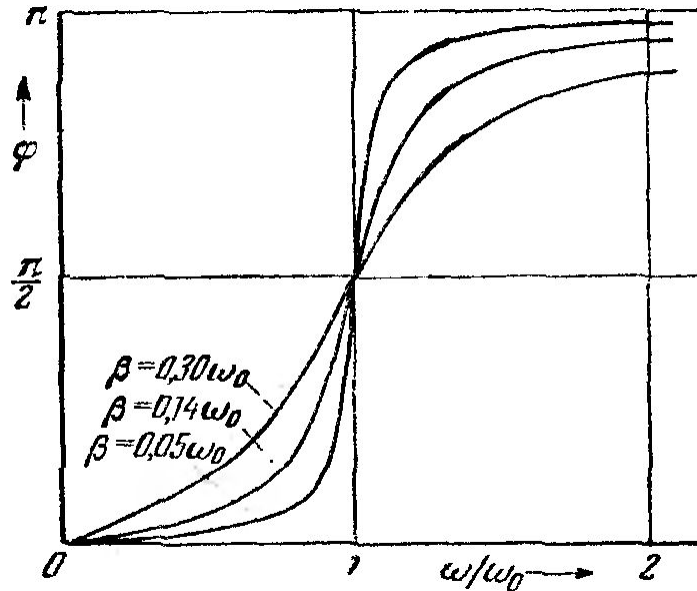


## Вынужденные колебания. 8.7

---

При резонансе амплитуда  $A_{рез}$  колебания может во много раз превосходить амплитуду  $A$  колебаний свободного конца пружины, вызванного внешним воздействием. В отсутствие трения амплитуда вынужденных колебаний при резонансе должна неограниченно возрастать. В реальных условиях амплитуда установившихся вынужденных колебаний определяется условием: работа внешней силы в течение периода колебаний должна равняться потерям механической энергии за то же время из-за трения. Чем меньше трение (т. е. чем выше добротность  $Q$  колебательной системы), тем больше амплитуда вынужденных колебаний при резонансе. У колебательных систем с не очень высокой добротностью ( $< 10$ ) резонансная частота несколько смещается в сторону низких частот

## Вынужденные колебания. 8.8



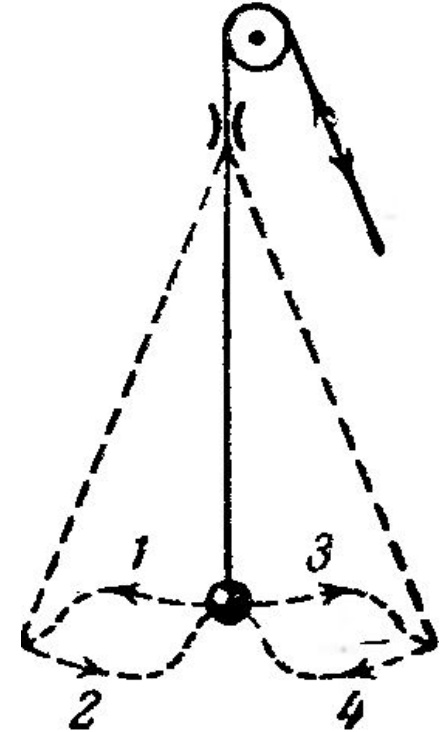
Зависимость  $\varphi$  от  $\omega$  при различных значениях коэффициента затухания  $\beta$ . Частоте  $\omega_0$  соответствует  $\varphi = \pi/2$ .

## Вынужденные колебания. 8.9

Оказывается, существует иной вид воздействия извне, с помощью которого можно сильно раскачать систему.

- *Этот вид воздействия заключается в совершаемом в такт с колебаниями периодическом изменении какого-либо параметра системы, вследствие чего само явление называется параметрическим резонансом.*

Простейшим примером системы, в которой возможен параметрический резонанс, является простейший маятник – шарик на нитке. Если периодически изменять длину маятника  $l$ , увеличивая ее в моменты, когда маятник находится в крайних положениях, и уменьшая в моменты, когда маятник находится в среднем положении, то маятник сильно раскачается.







## Вынужденные колебания. 8.10

---

■ Увеличение энергии маятника при этом происходит за счет работы, которую совершает сила, действующая на нить. Сила натяжения нити при колебаниях маятника непостоянна: она меньше в крайних положениях, когда скорость обращается в нуль, и больше в среднем положении, когда скорость маятника максимальна. Поэтому отрицательная работа внешней силы при удлинении маятника оказывается меньше по величине, чем положительная работа, совершаемая при укорочении маятника. В итоге работа внешней силы за период оказывается больше нуля.