

Физика колебаний и волн.

Квантовая физика.

Лекция № 4

Приближение Фраунгофера в задачах дифракции.

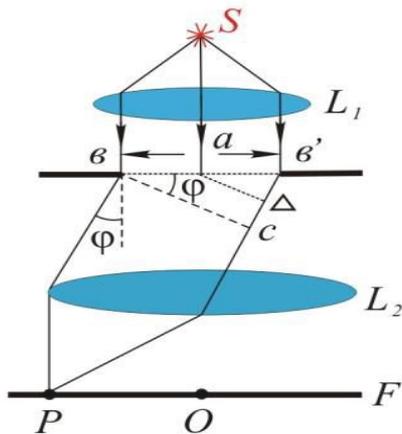
- 1. Условия приближения геометрической оптики, дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера.*
- 2. Волновой параметр .*
- 3. Дифракция плоской монохроматической волны на длинной прямой щели .*



Йозеф ФРАУНГОФЕР

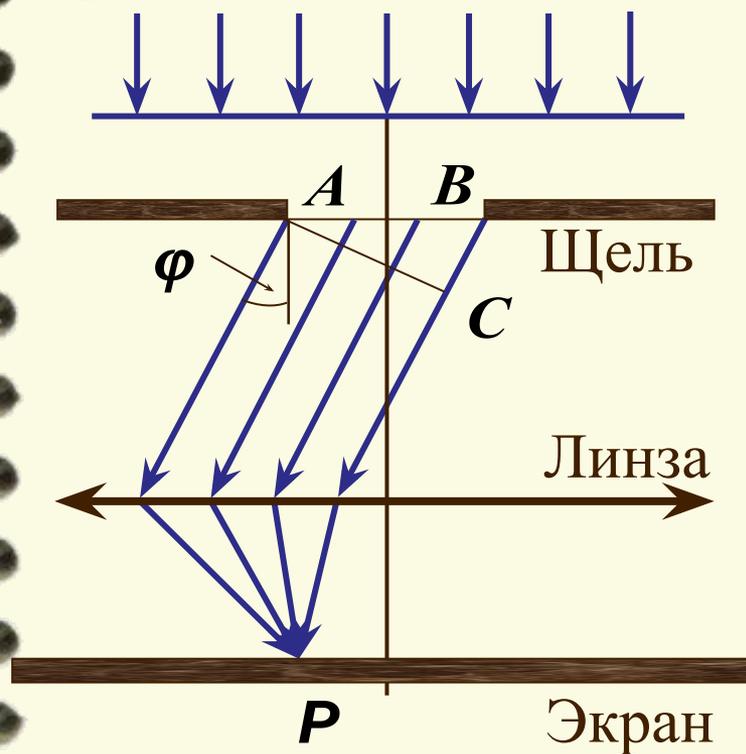
Joseph von Fraunhofer, 1787–1826

Немецкий физик и оптик, уроженец Штраубинга (Straubing), сын ремесленника-стеклодува. Рано осиротев, пошел в подмастерья к стекольщику. Явление дифракции Фраунгофер исследовал с чисто прикладной точки зрения: делом своей жизни он считал изобретение идеальных ахроматических линз, которые не давали бы радужного ореола вокруг изображения.



Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Схема дифракции Фраунгофера (1821-1822): точечный источник света помещается в фокусе собирающей линзы; дифракционная картина исследуется в фокальной плоскости второй собирающей линзы, установленной за препятствием. Дифракция на щели.



Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на непрозрачное препятствие с узкой щелью AB шириной b и длиной $l \gg b$ (бесконечно длинная щель). L - расстояние от щели до экрана.

Дифракционная картина наблюдается на экране, который находится в фокальной плоскости собирающей линзы.

Линза установлена за препятствием. Плоскость щели и экран параллельны друг другу.

Условия приближения геометрической оптики, дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера.

Вид дифракционной картины на экране зависит от величины волнового параметра

$$p = \sqrt{\frac{\lambda \cdot L}{b^2}} = \frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b}$$

1) Если $p \ll 1$ (“широкая” щель)

$\frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b} \ll 1$ или $b \gg \sqrt{\lambda \cdot L}$ - широкая щель много больше размеров первой зоны Френеля и распределение интенсивности света за щелью можно получить с помощью обыкновенной геометрической оптики.

Число Френеля $N_{\phi} = \frac{b^2}{\lambda \cdot L} \sim m$; $N_{\phi} = p^{-2}$,

где m – число открытых зон Френеля. $N_{\phi} \gg 1$.

Условия приближения геометрической оптики, дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера.

Вид дифракционной картины на экране зависит от величины волнового параметра

$$p = \sqrt{\frac{\lambda \cdot L}{b^2}} = \frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b}$$

2) Если $p \sim 1$ - будет дифракция Френеля

$\frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b} \sim 1$ или $b \sim \sqrt{\lambda \cdot L}$ и распределение интенсивности в плоскости наблюдения в этом случае определяется числом зон Френеля, укладывающихся на полуширине щели.

Число Френеля $N_{\phi} = \frac{b^2}{\lambda \cdot L} \sim 1$; $N_{\phi} = p^{-2}$,

Условия приближения геометрической оптики, дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера.

Вид дифракционной картины на экране зависит от величины волнового параметра

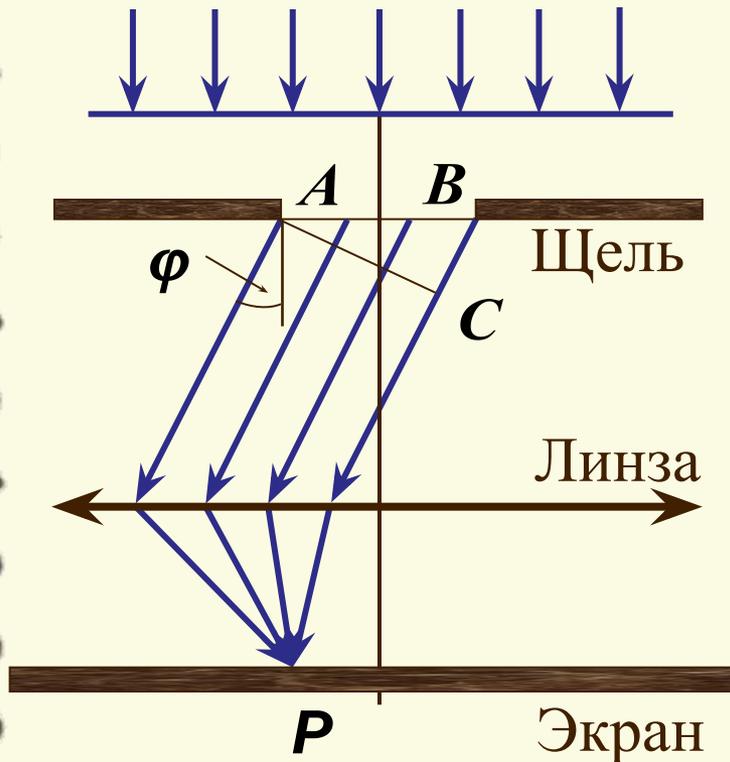
$$p = \sqrt{\frac{\lambda \cdot L}{b^2}} = \frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b}$$

3) Если $p \gg 1$ - будет дифракция Фраунгофера
 $\frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b} \gg 1$ или $b \ll \sqrt{\lambda \cdot L}$ - “узкая” щель.

Число Френеля $N_f = \frac{b^2}{\lambda \cdot L} \ll 1$; $N_f = p^{-2}$,

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Дифракция на щели



Каждая точка щели является источником когерентных вторичных волн (плоскость щели совпадает с фронтом падающей волны).

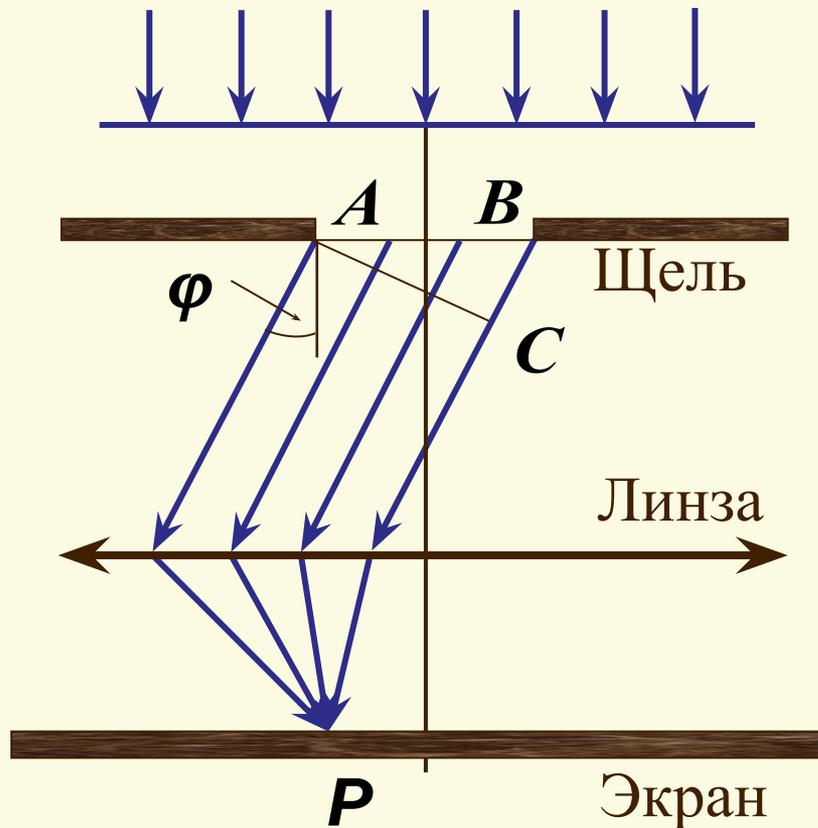
Параллельные пучки лучей, выходящие из щели в направлении φ (угол дифракции), собираются линзой в точке P .

Открытая часть волновой поверхности AB разбивается на зоны Френеля, которые имеют вид полос, параллельных боковому ребру щели.

Зоны проведены таким образом, чтобы разность хода от их соответствующих точек была равна $\lambda/2$.

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Дифракция на щели



Определим число зон N , уместяющихся на щели.

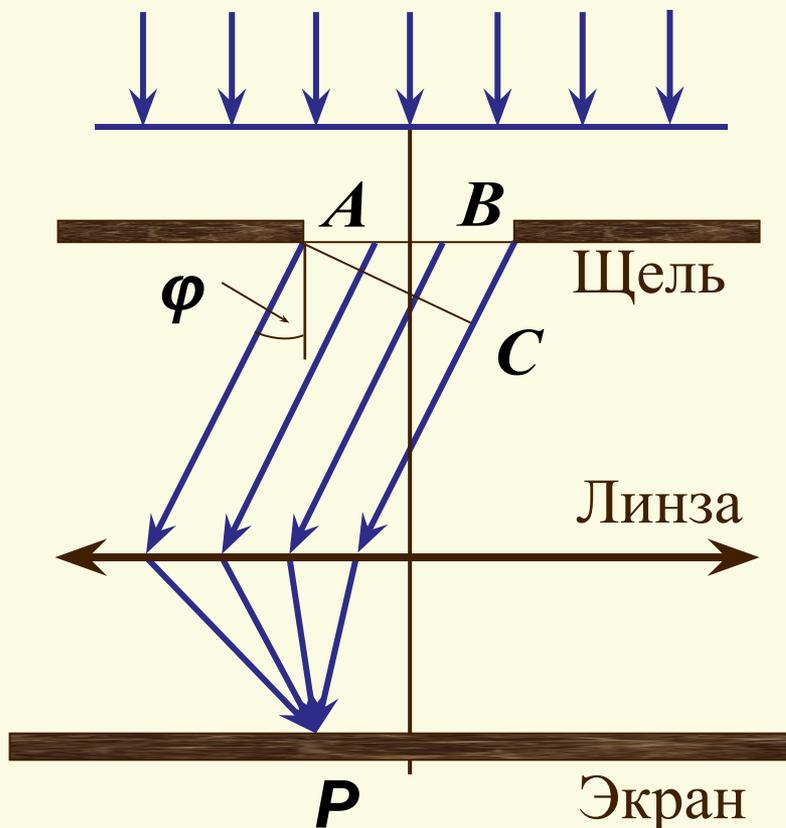
Ширина одной зоны $\Delta x = \lambda/2$ определяется как $\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \varphi}$

Отсюда $N = \frac{b}{\Delta x} = \frac{b \cdot \sin \varphi}{\lambda/2}$.

Вторичные волны имеют одинаковые фазы и амплитуды в плоскости щели (зоны Френеля). Следовательно, колебания, возбуждаемые в точке P двумя соседними зонами, равны по амплитуде и противоположны по фазе.

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Дифракция на щели



Запишем условия для минимумов и максимумов дифракционной картины на экране (для точки P):

а) **Дифракционный минимум** (полная темнота) наблюдается тогда, когда число зон Френеля в плоскости щели *четное*, т.е.

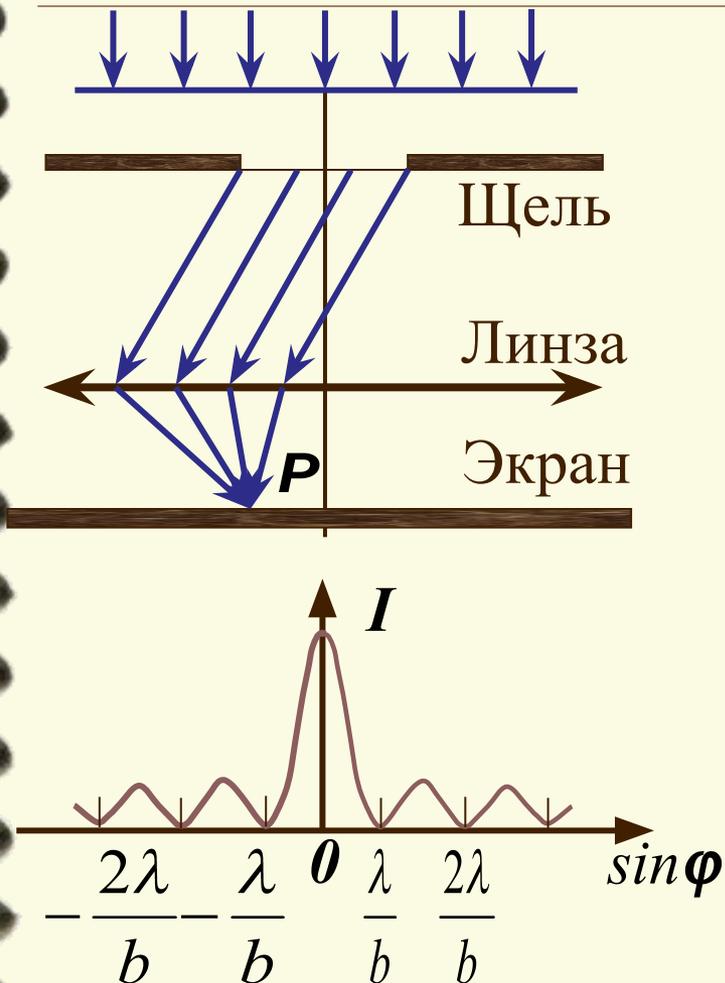
$$b \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

б) **Дифракционный максимум** наблюдается тогда, когда число зон Френеля в плоскости щели *нечетное*, имеется одна некомпенсированная зона, т.е.

$$b \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Дифракция на щели



$\varphi = 0$ направлении наблюдается **центральный дифракционный максимум**, поскольку колебания, вызываемые в центральной части экрана всеми участками щели, происходят в одинаковой фазе.

Изобразим *дифракционный спектр* в виде зависимости:

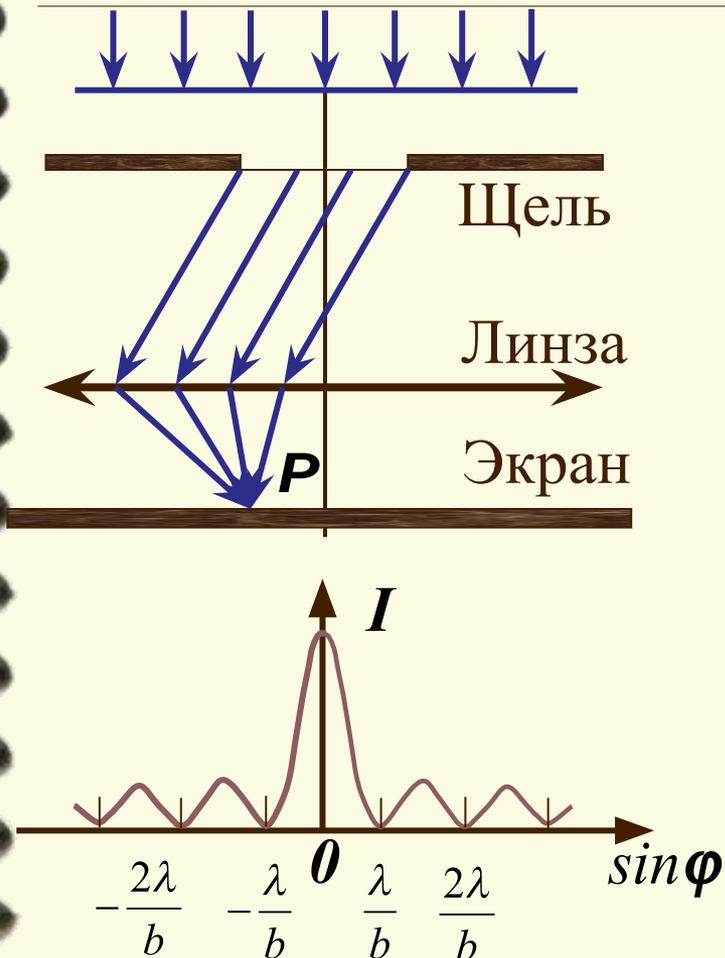
$$I = f(\sin \varphi)$$

Основная часть световой энергии сосредоточена в центральном максимуме.

С увеличением угла дифракции интенсивность побочных максимумов резко уменьшается.

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Дифракция на щели



Интенсивность и ширина составляющих дифракционного спектра зависит от размера щели. С уменьшением ширины щели центральный максимум расширяется. Это следует, в частности, из условий для дифракционных минимумов и максимумов. Центральный максимум ограничен справа и слева минимумами первого порядка, которые соответствуют углам

$$b \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}$$

При $m = 1$ $\varphi = \pm \arcsin \frac{\lambda}{b}$

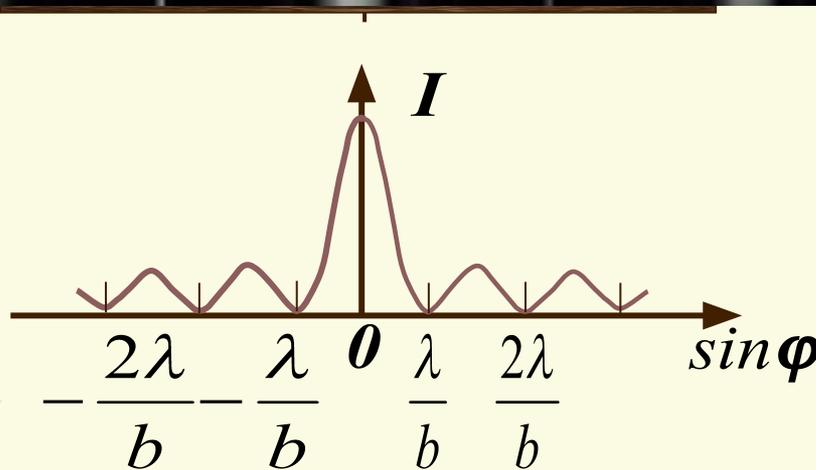
Чем меньше b , тем больше φ и шире центральный максимум.

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

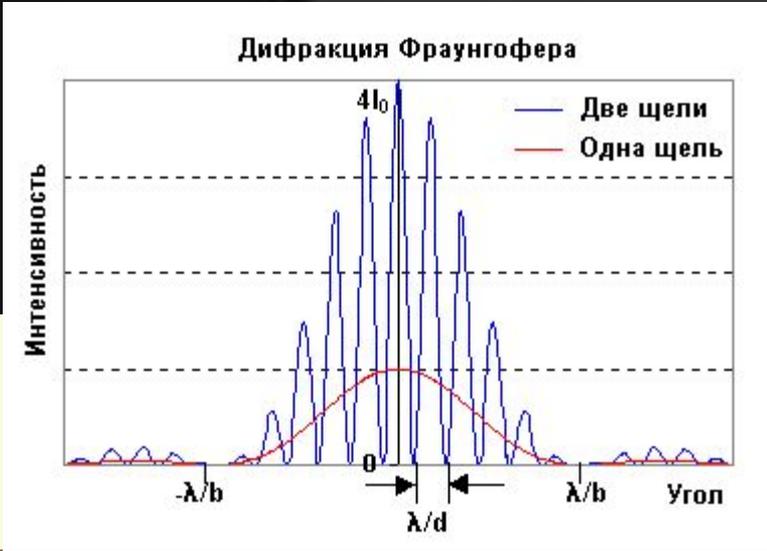
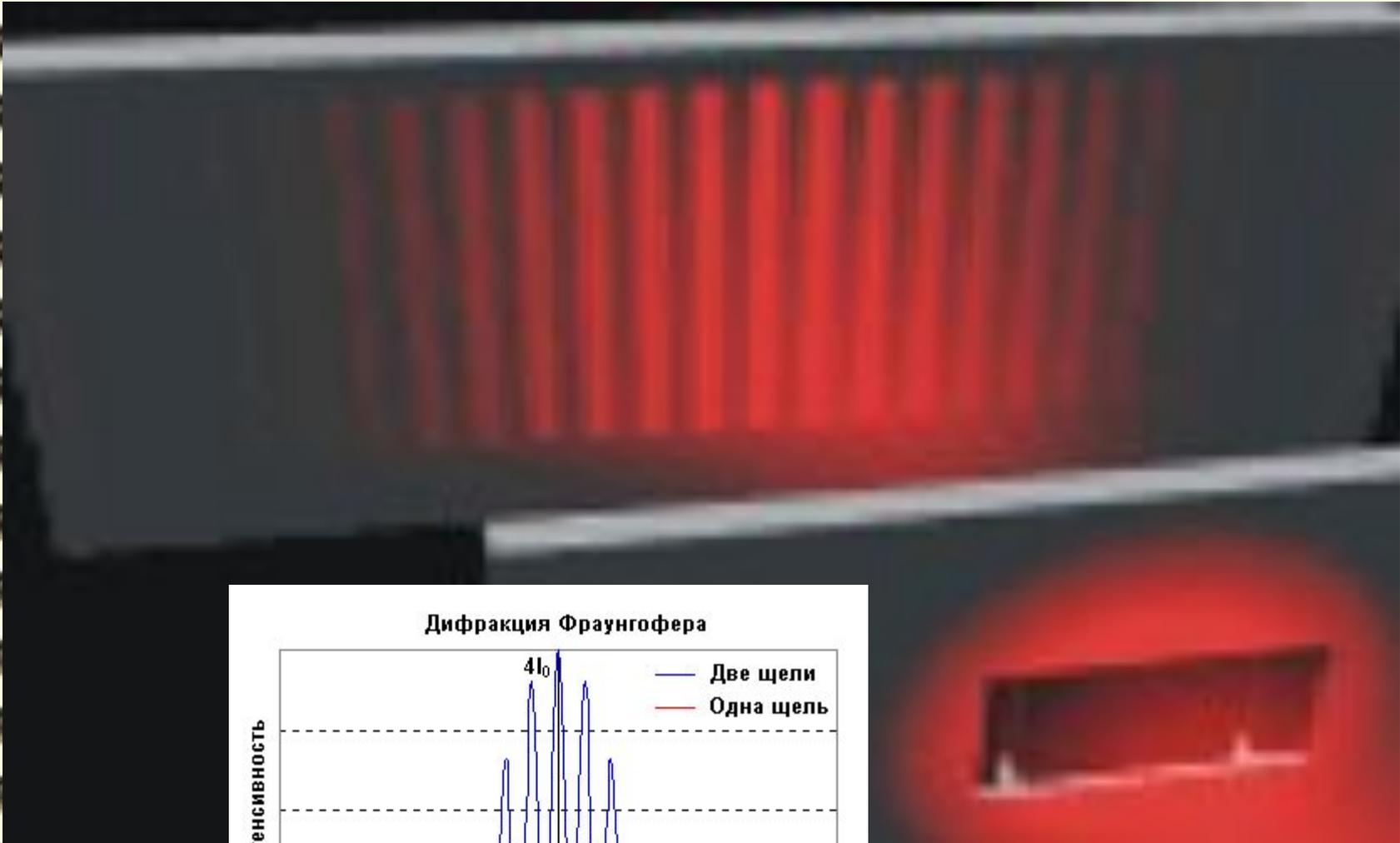


single.avi

Дифракция на щели



С увеличением ширины щели (b) дифракционные полосы становятся уже и ярче, а число полос больше. При $b \gg \lambda$ в центре получается резкое изображение источника света (прямолинейное распространение света).

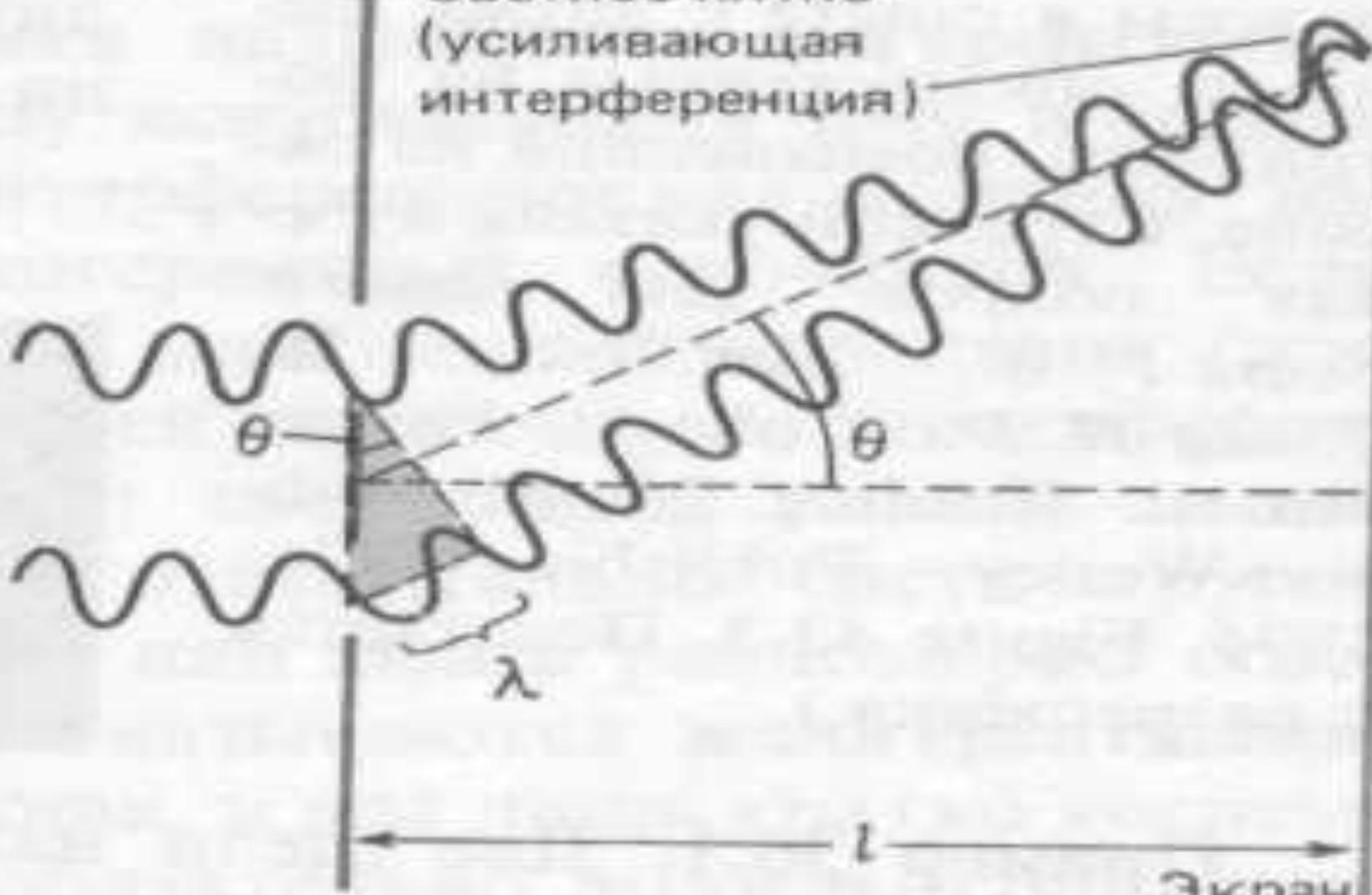


b1000.avi



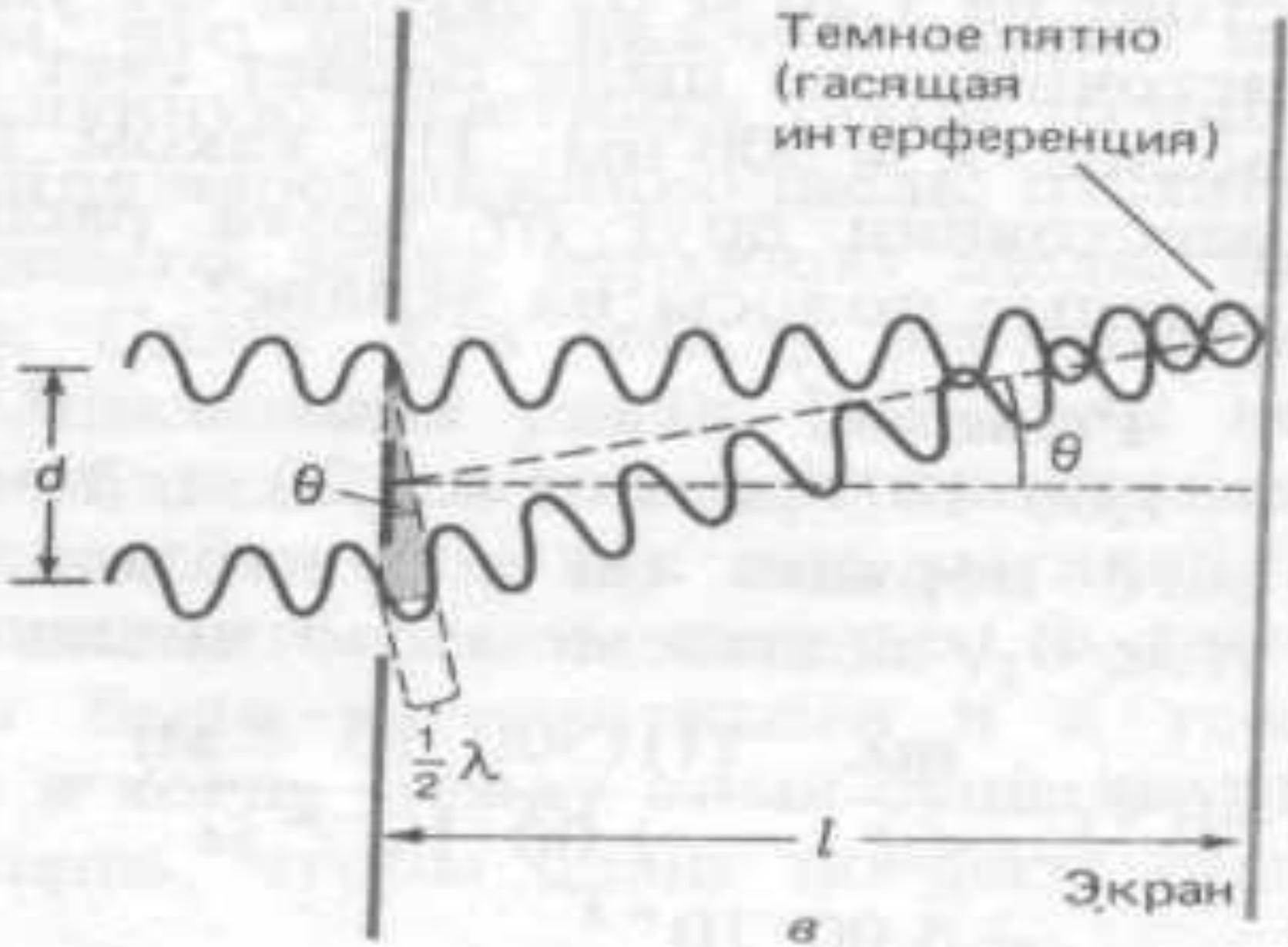
strips.avi

Светлое пятно
(усиливающая
интерференция)



b

Экран



Темное пятно
(гасящая
интерференция)

Экран

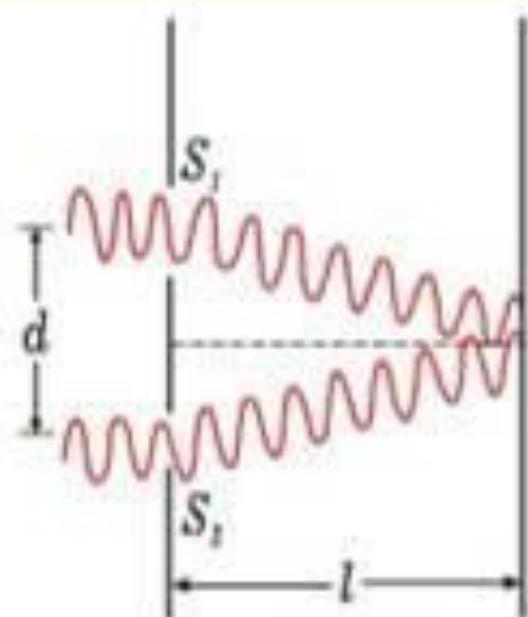
l

θ

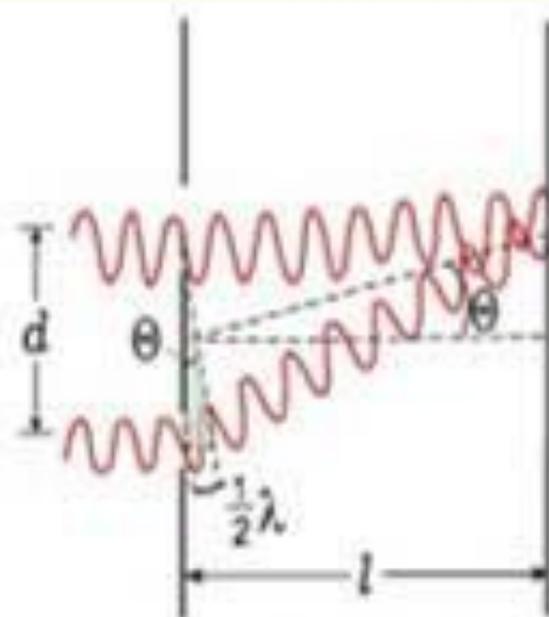
θ

$\frac{1}{2}\lambda$

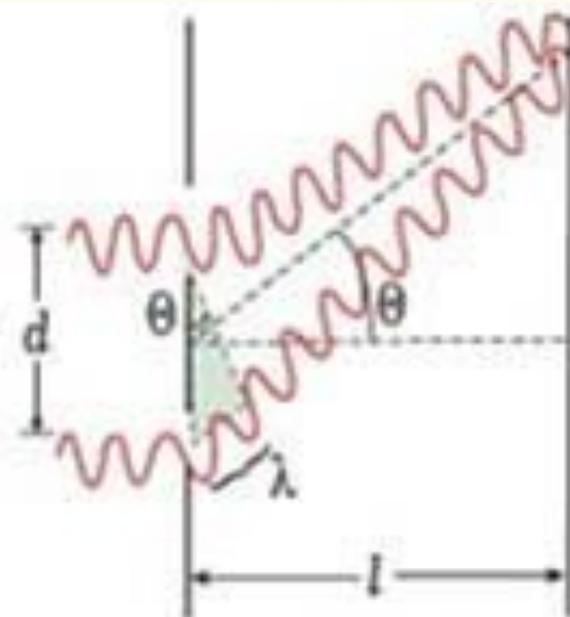
a



Нулевой
интерференционный
максимум



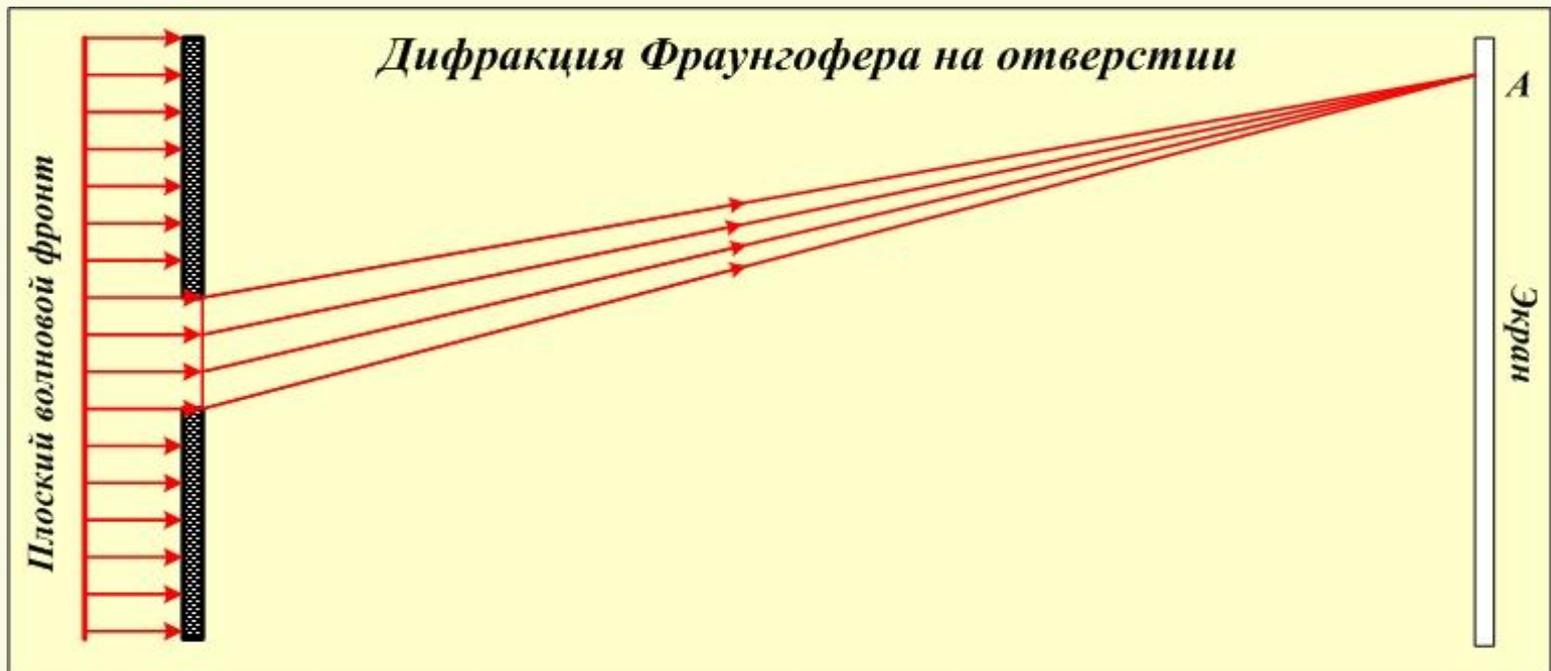
Первый
интерференционный
минимум



Первый
интерференционный
максимум

Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

На отверстие падает плоская волна (волновой фронт – плоскость). Известна длина волны λ , размер отверстия b и расстояние до экрана L . Требуется Определить, как распределена интенсивность излучения по направлениям (на экране).



Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

Каждая точка отверстия является источником сферических волн. Рассмотрим участок длиной dx , расположенный внутри отверстия на расстоянии x от края.

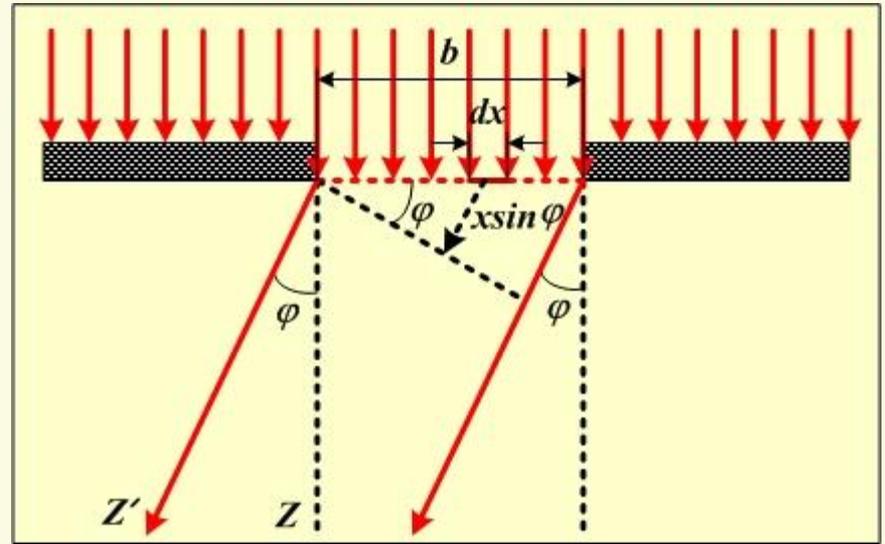
Волны, излучённые с отрезка dx распространяются по всем направлениям ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$).

Рассмотрим волны, распространяющиеся вдоль прямой, образующей угол φ с перпендикуляром к преграде.

Волны, излучённые с отрезка dx , запаздывают по фазе на

$$\Delta = kx \sin \varphi,$$

$$k = \frac{\omega}{v} \text{ - волновое число (модуль волнового вектора).}$$



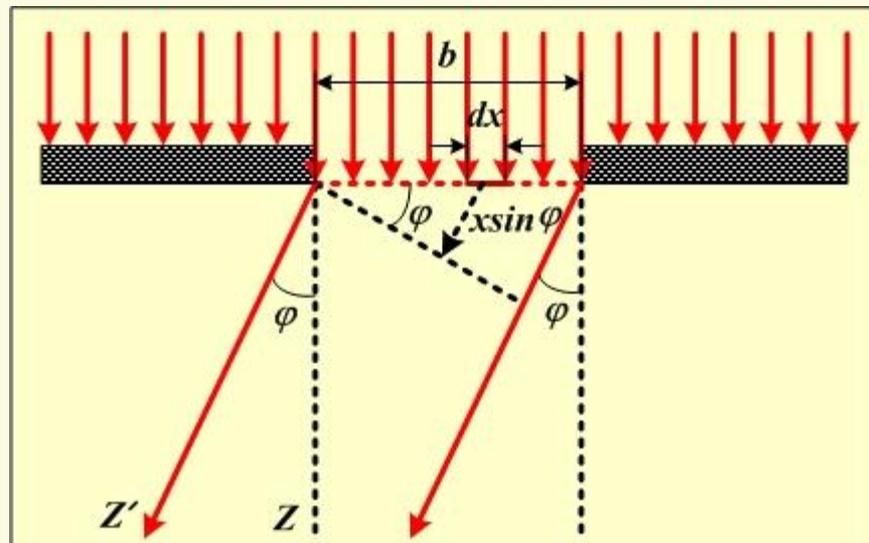
Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

Запишем уравнение волны, испущенной с участка dx в рассматриваемом направлении. Пусть E_0 – амплитуда волны, испущенной из всего отверстия в рассматриваемом направлении, тогда амплитуда волны, испущенной с участка dx равна

$$E_{0x} = \frac{E_0}{b} dx.$$

Уравнение волны, испущенной с участка dx в рассматриваемом направлении:

$$dE_\varphi = \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx.$$



Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

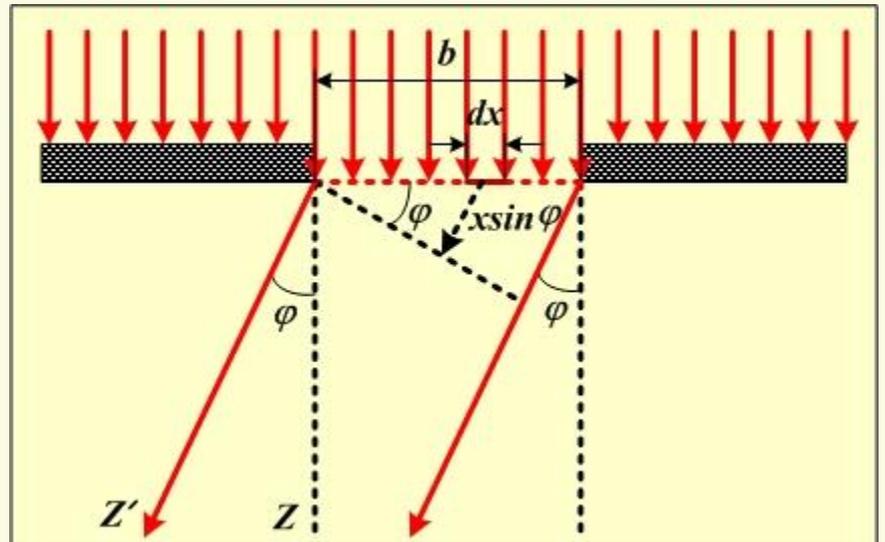
$$dE_{\varphi} = \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx.$$

Для волны, испущенной из всего отверстия в рассматриваемом направлении.

$$E_{\varphi} = \int_0^b \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx.$$

$$E_{\varphi} = \int_0^b \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx = \frac{E_0}{b} e^{i\omega t} \int_0^b e^{-ikx \sin \varphi} dx =$$

$$= \frac{E_0}{b} e^{i\omega t} \left. \frac{e^{-ikx \sin \varphi}}{-ik \sin \varphi} \right|_0^b = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi}.$$



Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

$$E_{\varphi} = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi}.$$

Преобразуем полученное выражение к симметричной форме.

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi} &= \frac{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} - e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{+ik \frac{b}{2} \sin \varphi}}{-ikb \sin \varphi} = \\ &= \frac{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} - e^{+ik \frac{b}{2} \sin \varphi}}{-2ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} = \frac{e^{-iu} - e^{+iu}}{-2iu} e^{-iu}, \end{aligned}$$

где $u = k \frac{b}{2} \sin \varphi.$

Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

$$\frac{e^{-iu} - e^{+iu}}{-2iu} e^{-iu} = \frac{\sin u}{u} e^{-iu}.$$

Итак,

$$E_{\varphi} = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi} = E_0 e^{i(\omega t - u)} \frac{\sin u}{u}.$$

где $u = k \frac{b}{2} \sin \varphi.$

Уравнение волны, испущенной из всей щели в рассматриваемом направлении:

$$E_{\varphi} = E_0 \frac{\sin u}{u} e^{i\left(\omega t - k \frac{b}{2} \sin \varphi\right)}.$$

Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

Интенсивность излучения, испущенного из всей щели в рассматриваемом направлении определяется квадратом амплитуды

$$I \sim |E_{\varphi}|_{cp}^2$$
$$E_{\varphi}^2 = E_0^2 \left| e^{i(\omega t - u)} \right|^2 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2.$$

$$I_{\varphi} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2,$$

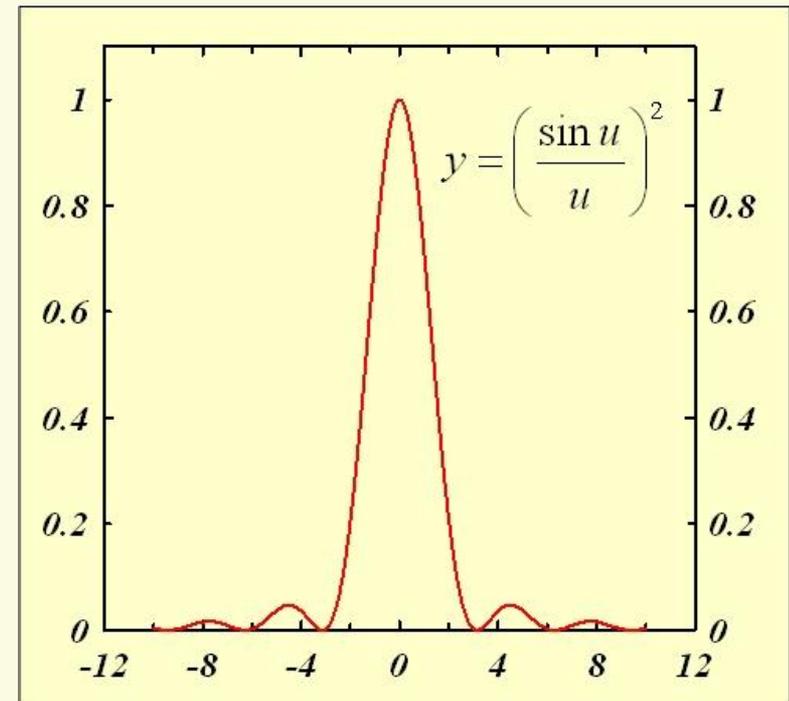
где $u = k \frac{b}{2} \sin \varphi.$

Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

$$I_{\varphi} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2.$$

Исследуем полученную функцию. При $u \rightarrow 0$ $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$.

Это максимальное значение этой функции. При возрастании модуля u функция будет убывать. Это убывание не будет монотонным вследствие осцилляций числителя. Теперь можно определить, при каких значениях угла дифракции наблюдаются максимумы и минимумы интенсивности излучения.



Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

$$u = k \frac{b}{2} \sin \varphi, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$
$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \sin \varphi = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi.$$

Функция

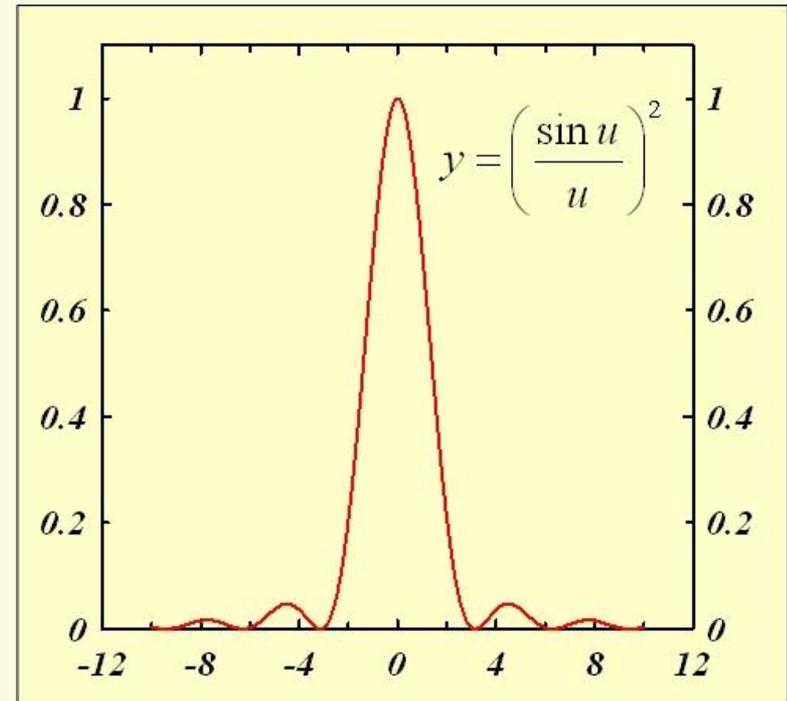
$$I_{\varphi} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

имеет локальные минимумы при
условии

$$\sin u = 0.$$

$$u = m\pi, \quad \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = m\pi,$$

$$b \sin \varphi = m\lambda.$$



Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

Функция

$$I_{\varphi} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

имеет локальные максимумы
(кроме центрального) при условии

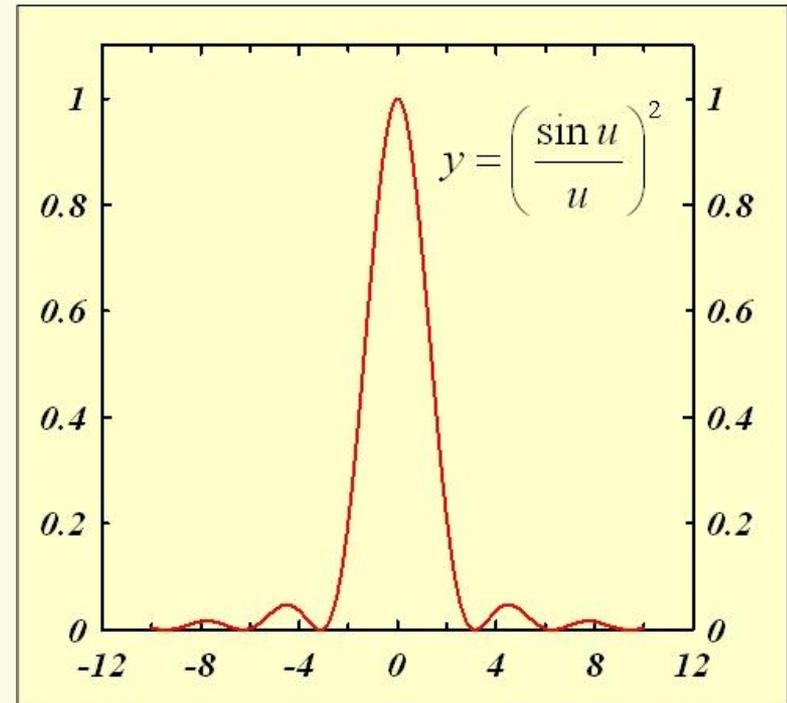
$$\sin u = \pm 1.$$

$$u = (2m + 1) \frac{\pi}{2},$$

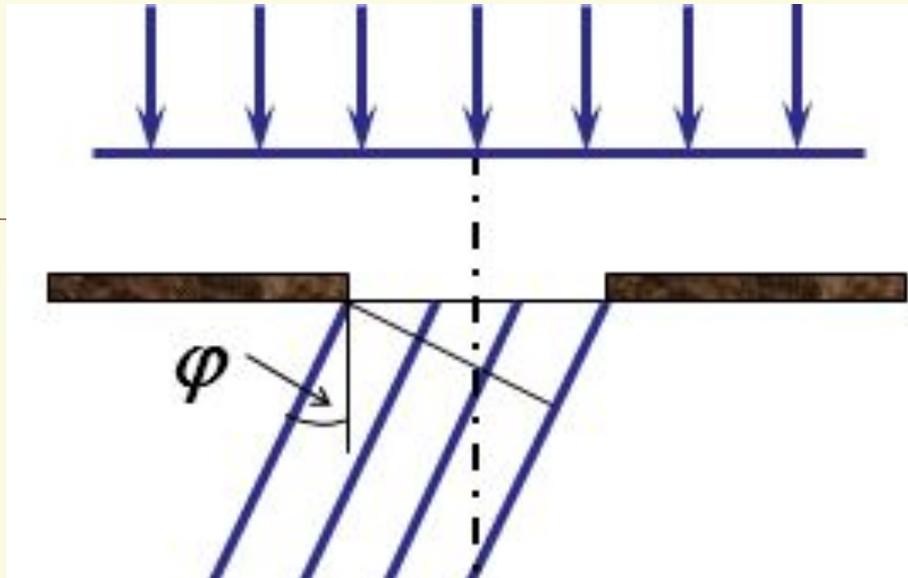
$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\pi}{2},$$

$$b \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

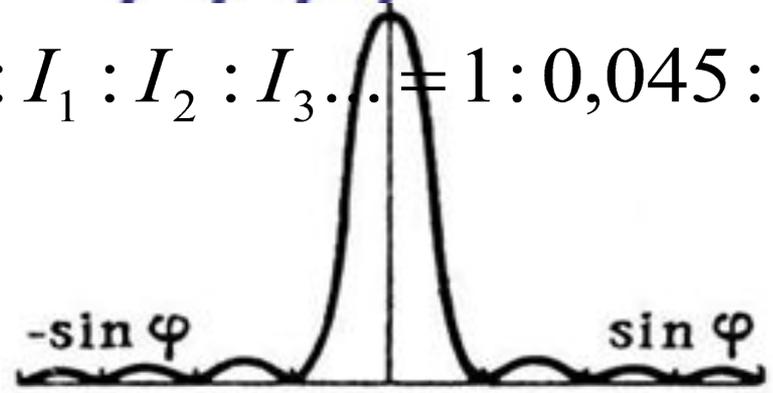
Условия минимумов и максимумов совпали с полученными методом зон Френеля.



Точный расчёт позволяет определить значения интенсивности для произвольного угла дифракции.

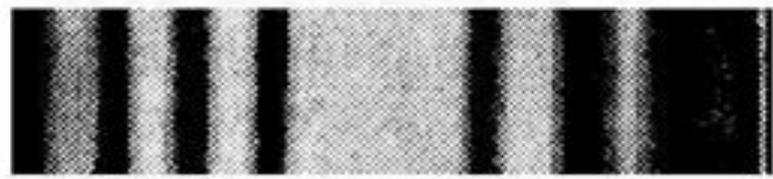


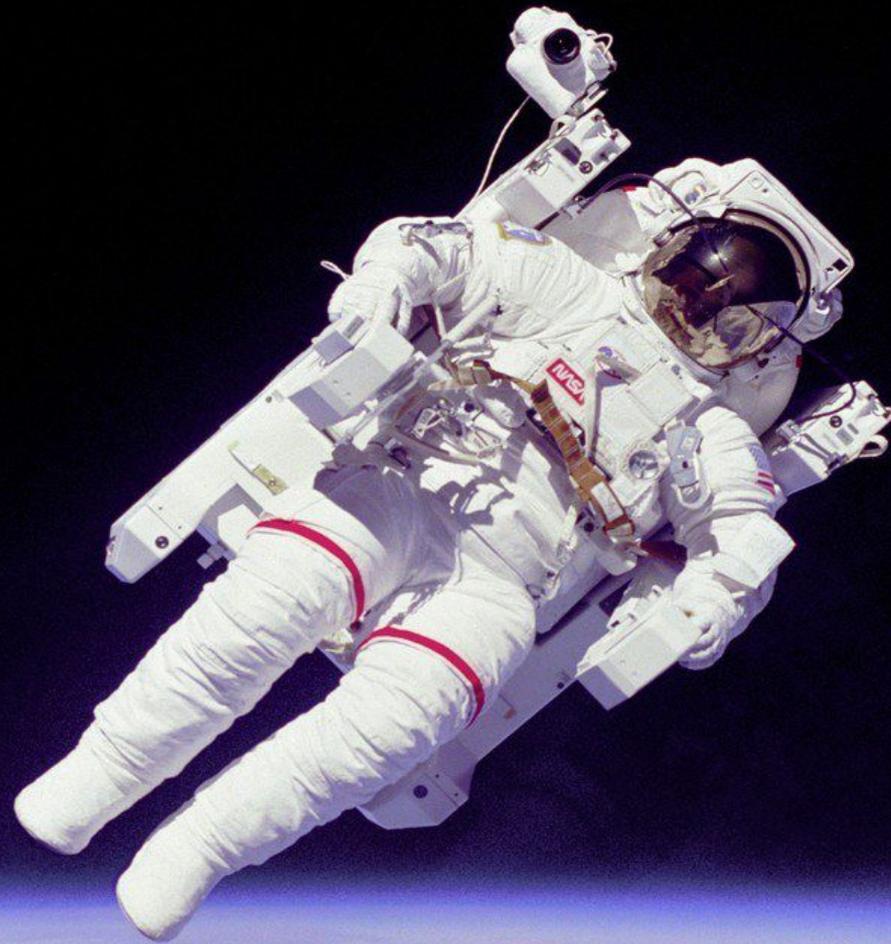
$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 \dots = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008 \dots$$



Угловой размер
центрального
max :

$$\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{b}$$





ЛЕКЦІЯ ЗАКОНЧЕНА!

-
- <http://rutube.ru/tracks/3223274.html?v=d2e9b72ff871d89795bb7d918e50b9b4&&bmstart=980323>