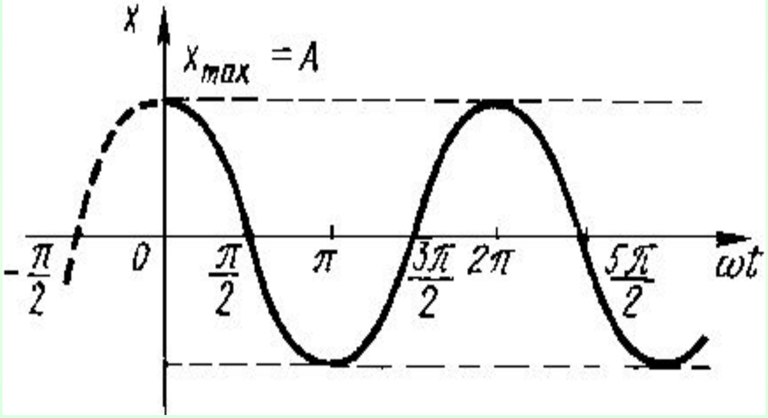
Дәріс тақырыбы:

Механикалық гармониялық тербелістер.
Өшетін тербелістер.
Еріксіз тербелістер.
Толқындар.

Гармониялық тербелістердің кинематикасы

Гармониялық тербелістің сипаттамалары:

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$



Гармониялық тербелістің периоды *T*, жиілігі *ν*, циклдік жиілігі *ω*

Период *T*: толық бір тербеліске кеткен уақыт。

$$\boxed{T = \frac{t}{n}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

өлшем бірлігі секунд (с)

Жиілік ν : уақыт бірлігіндегі тербелістер саны.

$$\boxed{\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}}$$

өлшем бірлігі Герц=1/с

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$$

ω – циклдік жиілік

Гармониялық тербелістің қозғалыс теңдеуін келесі түрде де жазуға болады :

$$x = A\cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$$ **немесе** $$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0)$$

- Материялық нүкте x осі бойымен тепе-теңдік қалпынан түзу сызықты гармониялық тербеліс жасасын дейік. Онда тербеліп тұрған материялық нүкте үшін:

- **Ығысу**:

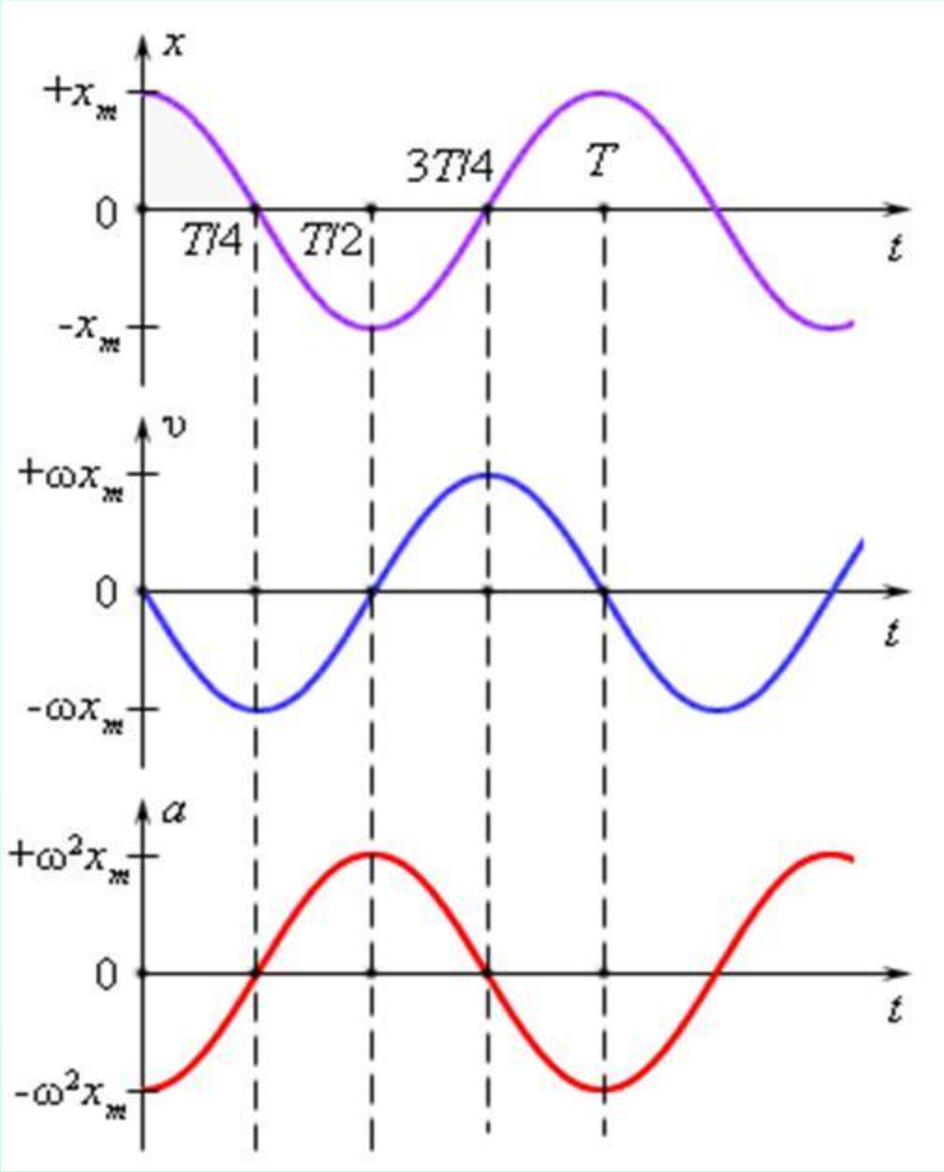
$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- **Жылдамдық**:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- ***Үдеу:***

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -A\omega_0{}^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$



Еркін гармониялық тербелістердің дифференциалдық теңдеуі

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

гармониялық тербелістердің екінші ретті дифференциалдық теңдеуі, оның шешімі:

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Гармониялық тербелістердің пайда болу шарттары:

серпімді қайтарушы күштің әсері; үйкелістің өте аз болуы.

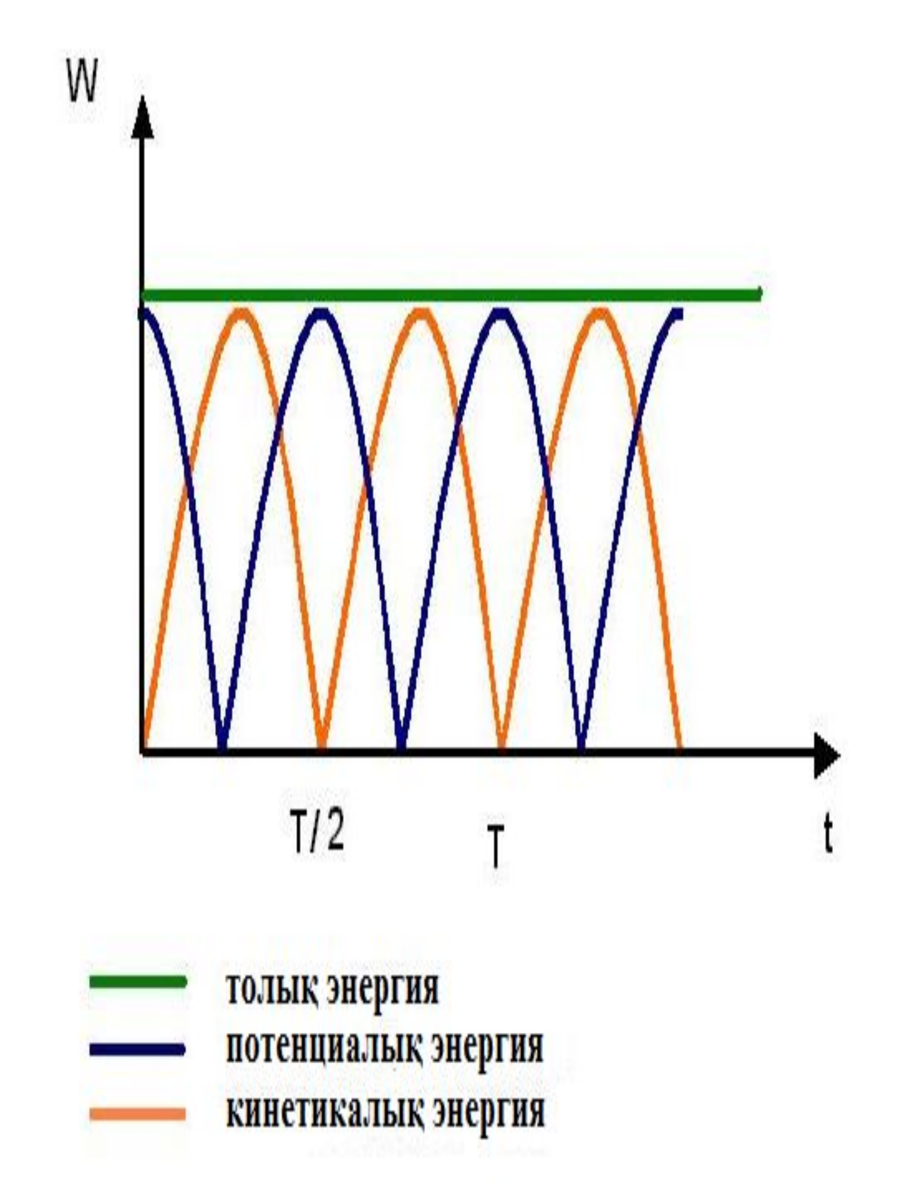
$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x; \qquad F = -kx; \qquad k = m\omega_0^2;$$

Массасы m тербеліп тұрған материялық нүктеге әсер етуші күш:

$$F = -m\omega_0^2 x = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Сонымен, материялық нүктеге әсер етуші күш ығысуға пропорционал және ығысуға қарама-қарсы бағытталған (тепе-теңдік күйге қарай).

МЕХАНИКАЛЫҚ ТЕРБЕЛІСТЕРДІҢ ЭНЕРГИЯСЫ



кинетикалық энергиясы:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

потенциалық энергиясы:

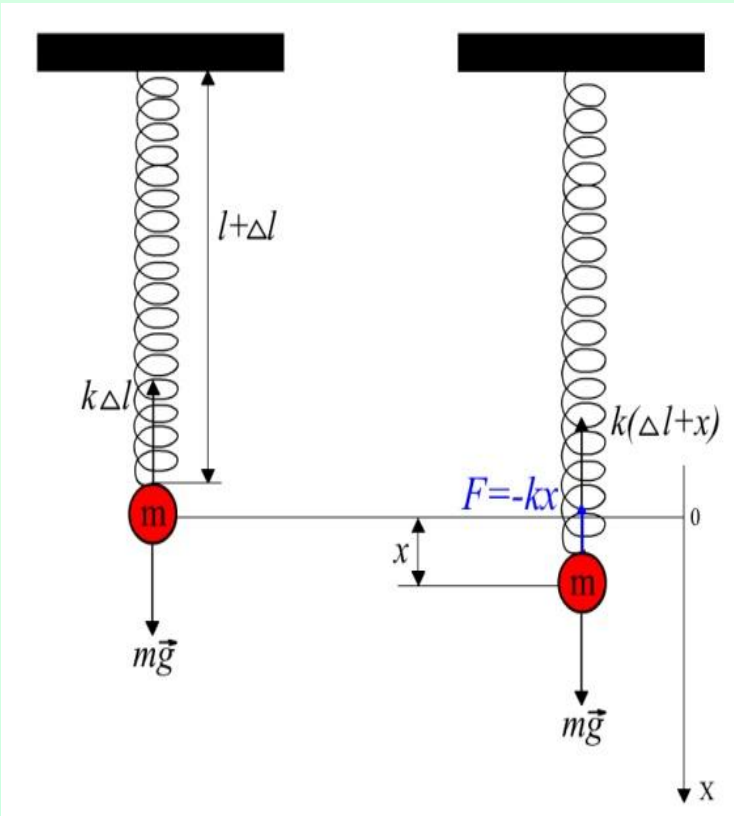
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

толық энергиясы:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2 A^2$$

Серіппелі маятник

Серіппелі маятник ретінде абсолют серпімді серіппеге ілінген, *серпімділік күші* әсерінен гармониялық тербеліс жасайтын массасы m жүкті алуға болады.



$$F = -kx = ma$$

<u>Маятниктің қозғалыс теңдеуі:</u>

$$\boldsymbol{a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$ немесе:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}} \qquad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

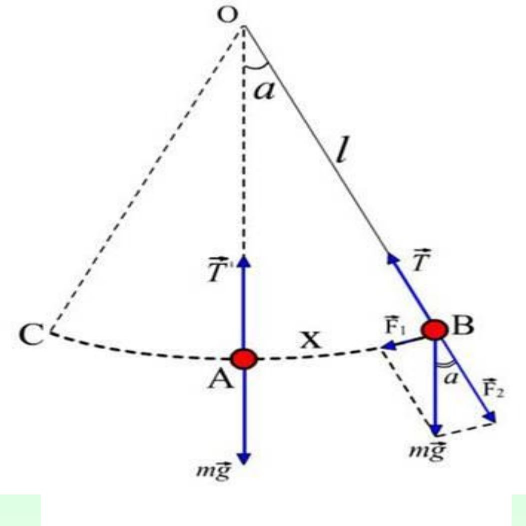
Дифференциялдық теңдеудің шешімі: $\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$

Гармониялық осциллятор :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Математикалық маятник

Математикалық маятник созылмайтын салмақсыз, ұзындығы l жіпке ілінген, ауырлық күші әсерінен үйкелісіз тербеліс жасайтын материялық нүктеден тұратын идеалданған жүйені айтады.



Ауытқу бұрышы α -ның кіші мәндерінде: $\dfrac{x}{l} \sim \alpha$

Кері қайтарушы күш: $F_1 = -mg\sin\alpha \approx -mg\alpha = -mg\dfrac{x}{l}$

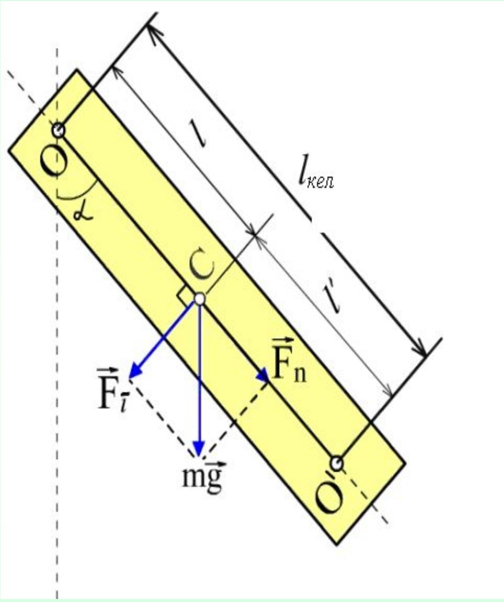
Қозғалыс теңдеуі: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -F_1 = -mg\dfrac{x}{l}$

немесе $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{g}{l}x = 0;$ $\boxed{\omega_0{}^2 = \dfrac{g}{l}}$ $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0;$

Тербеліс периоды: $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$ $x = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0);$

Физикалық маятник

Физикалық маятник деп дененің массалар центрі арқылы өтпейтін оське бекітілген, ауырлық күші әсерінен іліну осі айналасында тербеліс жасап тұрған қатты денені айтады.



Егер маятник тепе-теңдік қалпынан қандай-да бір бұрышқа ауытқыса, онда кері қайтарушы күш моменті

$$M = F_\tau l = -mgl\sin\alpha == mgl\alpha$$

Басқа жағынан, кіші бұрыштар үшін

$$F_\tau = -mg\sin\alpha$$ - кері қайтарушы күш

$$M = J\beta = J\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Бұдан шығатыны: $$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgl\alpha = 0$$

немесе $$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0; \quad \omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}; \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0{}^2\alpha = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}; \qquad \alpha = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

Физикалық маятниктің келтірілген ұзындығы деп – периоды физикалық маятниктің периодына тең математикалық маятниктің ұзындығын айтады.

$$L = \frac{J}{ml}$$

Өшетін тербелістер

Өшетін тербеліс деп үйкеліс салдарынан тербелмелі жүйе энергиясының уақыт өте кемуіне байланысты, тербелістің біртіндеп әлсіреуін айтады.

Тербеліп тұрған дененің жылдамдығы аз болған кезде, үйкеліс күші жылдамдыққа кері пропорционал болады.

$$F = -\gamma \upsilon = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

γ : үйкеліс коэффициенті

Дифференциалдық теңдеуі:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{dx}{dt} - kx$$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

ω_0: циклдік жиілік

$$\boxed{2\beta = \frac{\gamma}{m}}$$

өшу коэффициенті

ω_0, β мәндерін жоғарғы теңдеуге қойсақ, онда

Өшетін тербеліс теңдеуі келіп шығады:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0)$$

мұндағы A(t) – кейбір уақыт функциясы.

Орта кедергісі аз болған кезде: $\boldsymbol{\beta < \omega_0}$

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \varphi)$$

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

Өшетін тербеліс амплитудасы

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Өшетін тербеліс периоды

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

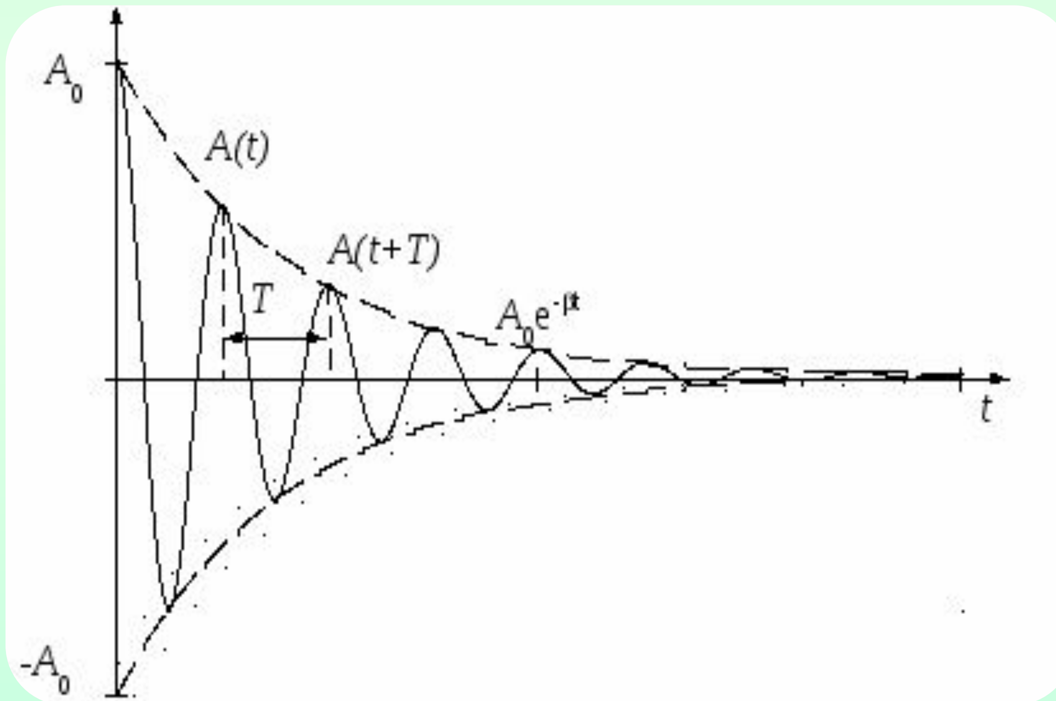
Өшетін тербелістің меншікті жиілігі

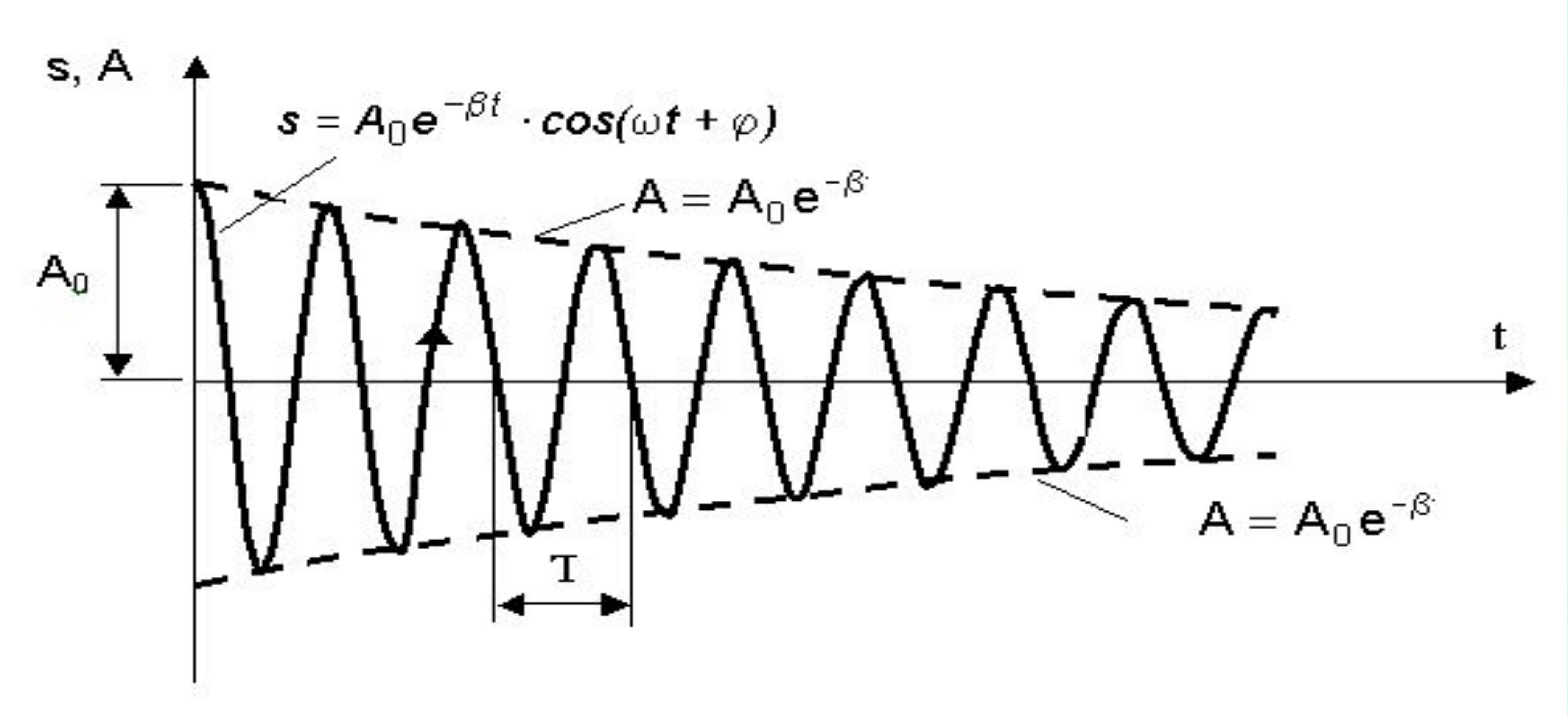
Тербелістің өшу декременті

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

Тербелістің логарифмдік өшу декременті

$$\lambda = \ln e^{\beta T} = \beta T$$





s, A
$s = A_0 e^{-\beta t} \cdot cos(\omega t + \varphi)$
$A = A_0 e^{-\beta}$
A_0
t
T
$A = A_0 e^{-\beta}$

Еріксіз тербелістер, резонанс

Сыртқы периодты күштер әсерінен болатын тербеліс **еріксіз тербеліс** деп аталады (нақты тербелістер).

Сыртқы периодты күш: $F(t) = F_0 \cos \omega t$

онда: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\dfrac{dx}{dt} - kx + F_0 \cos \omega t$

егер: $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}, \quad 2\beta = \dfrac{\gamma}{m}, \quad f_0 = \dfrac{F_0}{m}$

онда: $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t}$

шешімі: $\boxed{x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \varphi') + A\cos(\omega t + \varphi)}$

Еріксіз тербеліс = өшетін тербеліс + гармониялық тербеліс

(1) **Көп уақыттан кейін, еріксіз тербеліс тұрақты тербеліске айналады, оның периоды сыртқы күштің периодына тең болады.**

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

(2) Тұрақты еріксіз тербеліс пен периодты сыртқы күш арасында белгілі бір фаза φ айырымы болады.

(3)

$$\boxed{A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\beta^2\omega^2}}, \quad tg\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Резонанс:

егер: $\dfrac{dA}{d\omega}=0$

Периодты сыртқы күш жиілігі

$$\boxed{\omega_m=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$$

кезде, амплитудасы ең үлкен:

$$\boxed{A_m=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}}$$

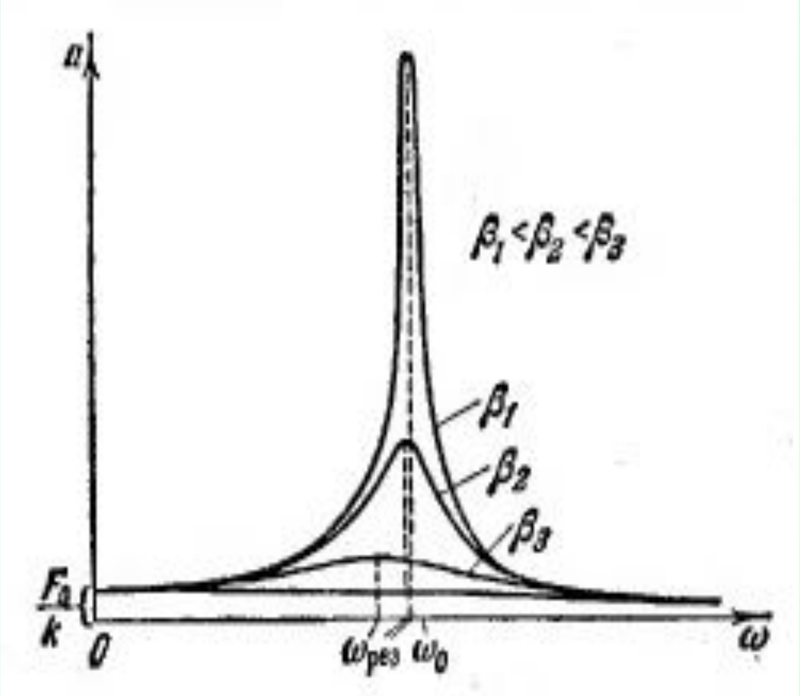


Рис. 60.3.

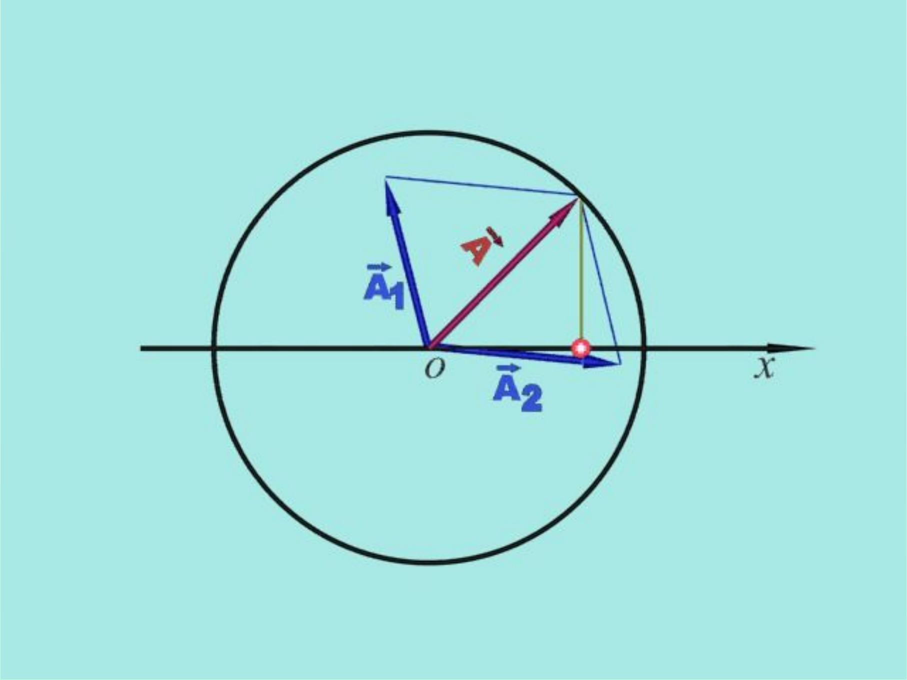
Өшу коэффициенті $\beta \to 0$ кезде, $\omega_m \to \omega_0$, $A_m \to \infty$

Бір бағыттағы, жиіліктері бірдей гармониялық тербелісті қосу

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$



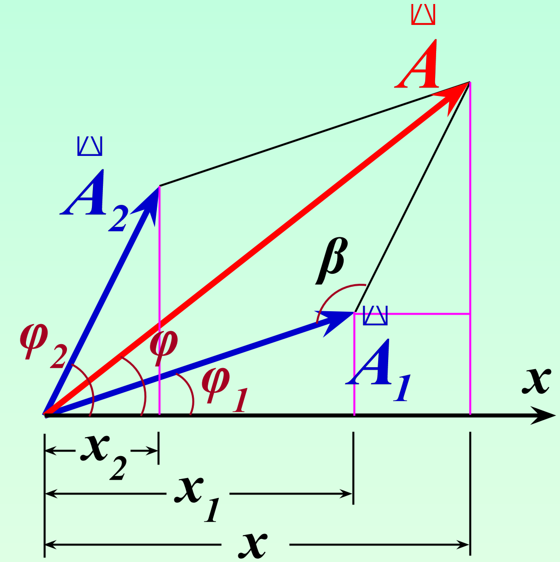
Қорытқы тербеліс те гармониялық тербеліс болып саналады.

$$\boxed{x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

$t = 0$ уақыттағы векторлық сұлбасы

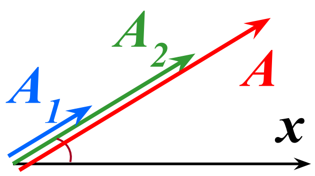
$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}$$

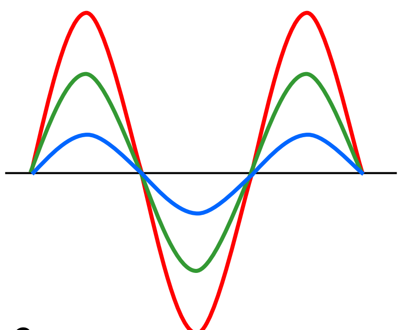
$$\boxed{tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}}$$



Қорытқы амплитуданы фаза айырымы арқылы анықтайды:

(1) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi$

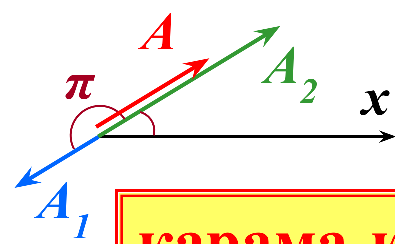


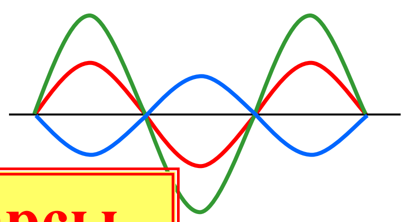


$A_{max} = A_1 + A_2$

бағыттас

(2) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$





қарама-қарсы

$A_{min} = A_1 - A_2$

Бір бағыттағы, әртүрлі жиіліктегі гармониялық тербелістерді қосу

Егер тербелістердің жиілігі бірдей болмаса, *Δφ* үнемі өзгеріп отырады. Сондықтан қорытқы тербеліс амплитудасы да өзгеріп отырады. Бұл кезде, қорытқы тербеліс гармониялық болмай қалады.

егер: $x_1 = A\cos(\omega_1 t)$

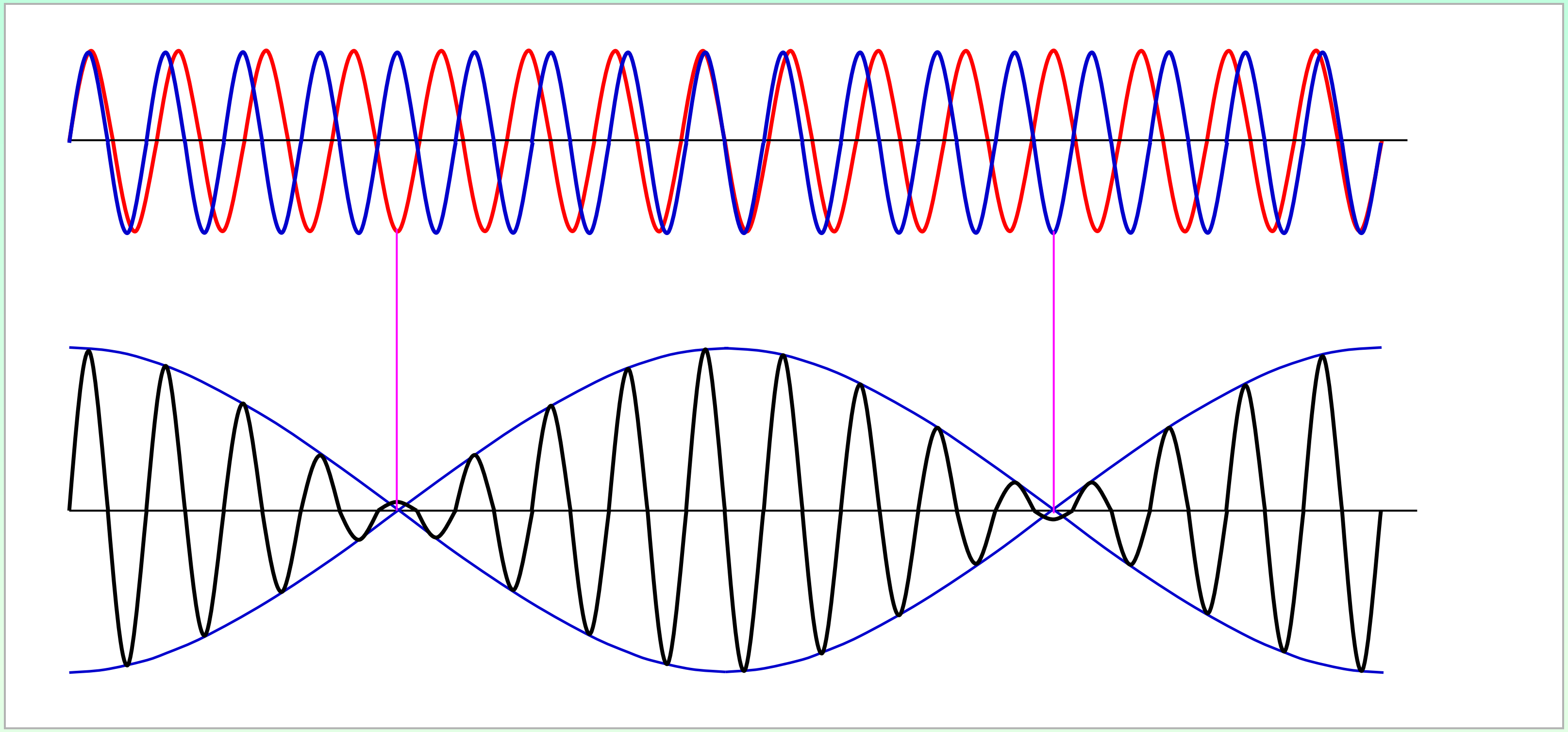
$$x_2 = A\cos(\omega_2 t)$$

онда: $x = x_1 + x_2 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$

$$= 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t)$$

$\left|2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\right|$ **қорытқы тербеліс амплитудасы:**

0 ~ A **аралығында өзгеріп отырады.**



Екі тербелістің жиілігі бірдей болмаса, қорытқы тербеліс амплитудасы бірде күшейіп, бірде әлсіреп отырады.

$$\boxed{\nu = \nu_2 - \nu_1}$$

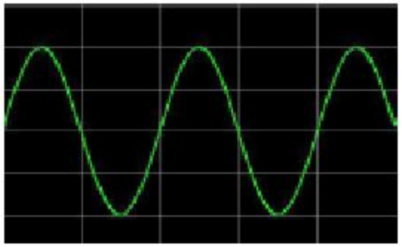
ТОЛҚЫН ТЕҢДЕУІ

Толқын – тұтас ортадағы тербелістің таралуы. Толқын массаны тасымалдамай, энергияны тасымалдайды.

Механикалық толқындар – серпімді ортада таралатын механикалық қозу. Электрмагниттік толқын – кеңістікте таралады.

Қума толқын – таралу бағыты мен тербеліс бағыты бірдей (параллел) толқын. (серіппе толқын). Дыбыс толқыны (сүйықтықтар мен газдарда).

Көлденең толын – таралу бағыты мен тербелу бағыт перпендикуляр. Тербеліп тұрған жіптегі толқын көлденең толқын болады.



Толқынның таралу жылдамдығы $\upsilon = \lambda / T = \lambda \nu$

Толқын ұзындығы – фазасы бірдей ең жақын екі нүктенің аралығы.

Жазық толқынның теңдеуі $y = A\cos\omega_0\left(t - \dfrac{x}{\upsilon}\right)$

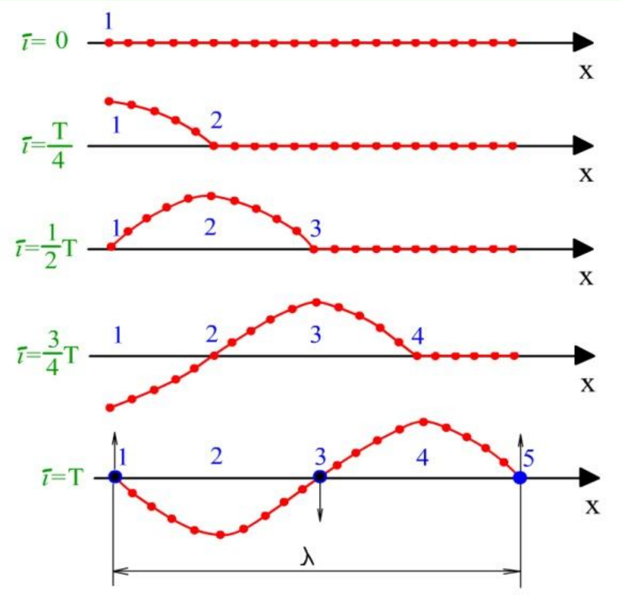
Берілген уақыттағы кез келген x нүктесінің ығысуын сипаттайды.

Берілген уақыттағы кез келген x нүктесінің ығысуын сипаттайды.

Механикалық гармониялық толқындар

Тұтас ортадағы тербелістің таралу процесі толқын деп аталады. Серпімді орталарда таралатын тебелістер серпімді немесе механикалық толқындар деп аталады. Егер толқынның таралуы кезінде орта бөлшектері гармониялық тербелісте болса, онда толқын гармониялық деп аталады.

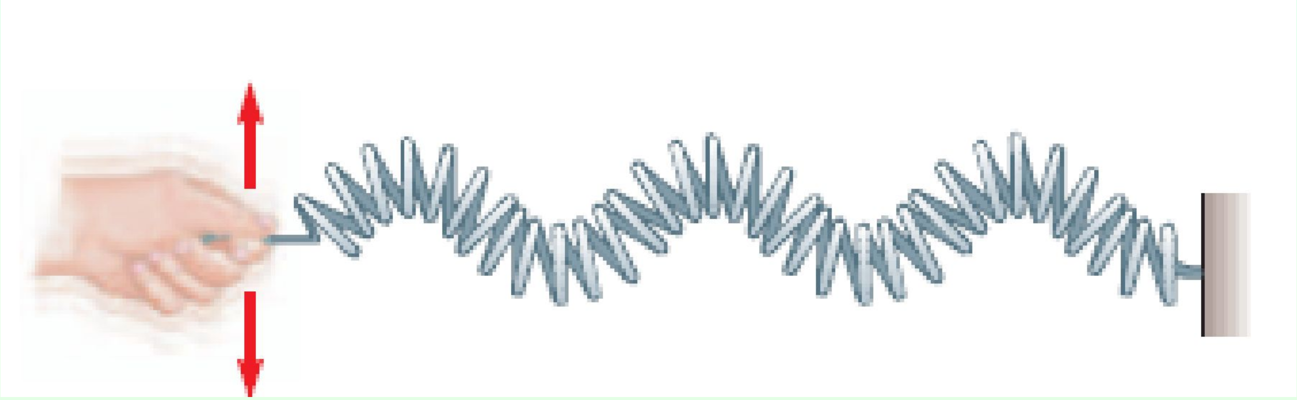
Толқындар көлденең және бойлық болып бөлінеді. Көлденең толқында орта бөлшектері толқынның таралу бағытына перпендикуляр бағытта, бойлық толқында – таралу бағыты бойында тербеледі.

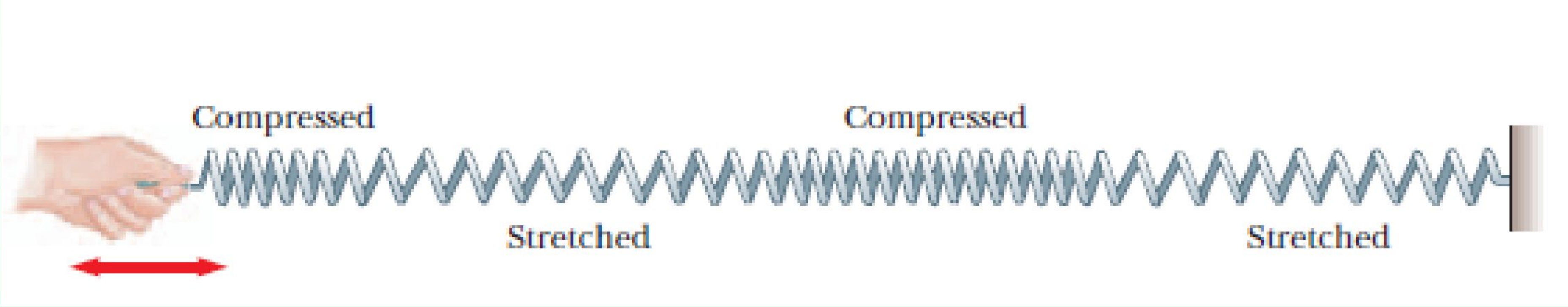


Толқынның негізгі қасиеті – зат тасымалынсыз энергия тасымалдануы

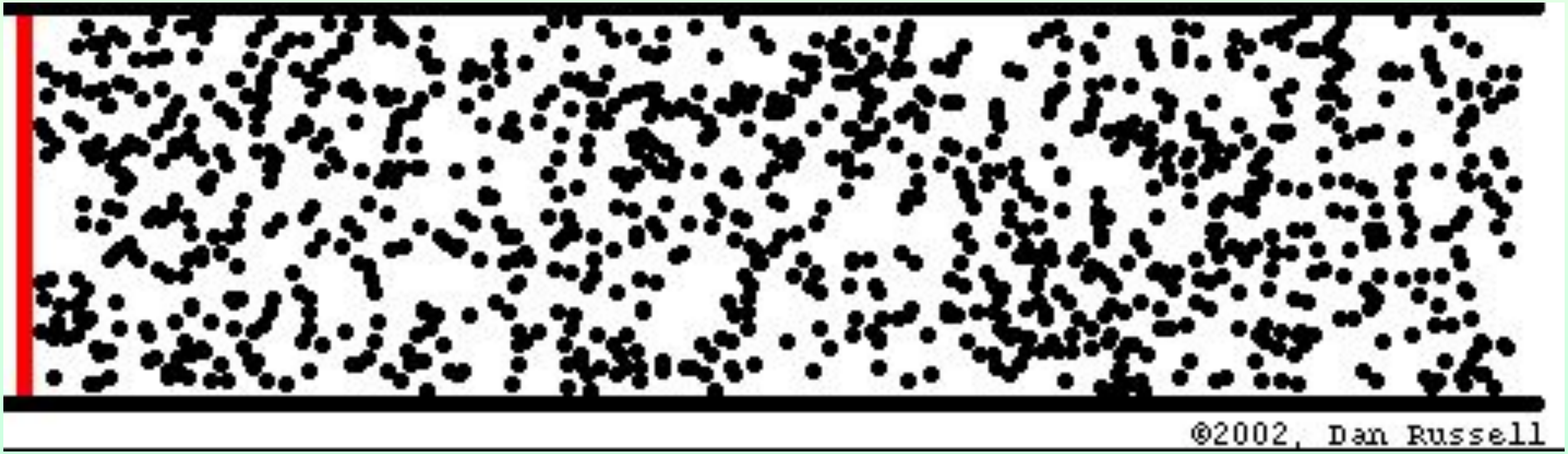
$$\boxed{\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}}$$

Толқындар көлденең және қума болады

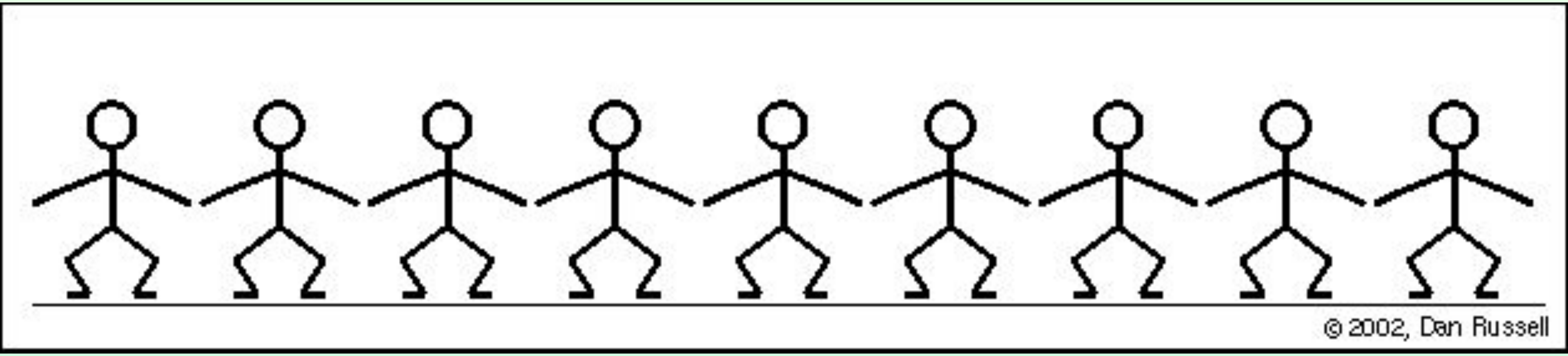




Қума толқындар деп, тербеліс бағыты толқынның таралу бағытымен сәйкес келетін толқындарды атайды.



Көлденең толқындар деп, тербеліс бағыты толқын бағытына перпендикуляр болатын толқындарды атайды.



Бірдей фазада тербелетін ең жақын нүктенің ара қашықтығы *толқын ұзындығы* деп λ аталады. Бұл шама толқынның тербеліс T периоды мен жылдамдығының көбейтіндісіне тең:

$$\lambda = \upsilon \cdot T = \frac{\upsilon}{\nu}$$

мұндағы: υ – толқынның таралу жылдамдығы;
– тербеліс жиілігі. $\nu = \frac{1}{T}$

ТОЛҚЫН ТЕҢДЕУІ

Толқын теңдеуі – тербелетін нүктенің оның координаталары мен уақытының функциясы ретінде анықтайтын қатынас.

$$\xi = A\cos\omega t$$

$$\xi(x,t) = A\cos\omega(t - \Delta t)$$

$$\Delta t = \frac{x}{\upsilon}$$

$$\xi(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$$

ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕҢДЕУ

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta \xi = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$