Лекция 3. Подобие физических явлений. **Основы теории подобия.** Примеры применения теории подобия для выбора условий испытаний и параметров моделей

Дополнительная литература по теме:

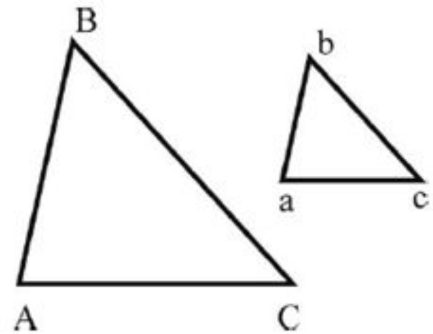
1. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В.С. Авдуевский, Б.М. Галицейский, Г.А. Глебов и др. М.: Машиностроение, 1992. 528 с.

2. Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций. М.:
Машиностроение, 1990. 288 с.

3. Михеев М.А., Михеева И.М. М.: Энергия, 1977. 344 с.

Геометрическое подобие и подобие физических

$$\frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac}=\frac{BC}{bc}=n$$



константы подобия

$$\frac{d'}{d}=\frac{L'}{L}=C_1;\ \frac{d''}{d}=\frac{L''}{L}=C_2.\qquad C_1\neq C_2.$$

$$\frac{d}{L}=\frac{d'}{L'}=\frac{d''}{L''}=i.$$

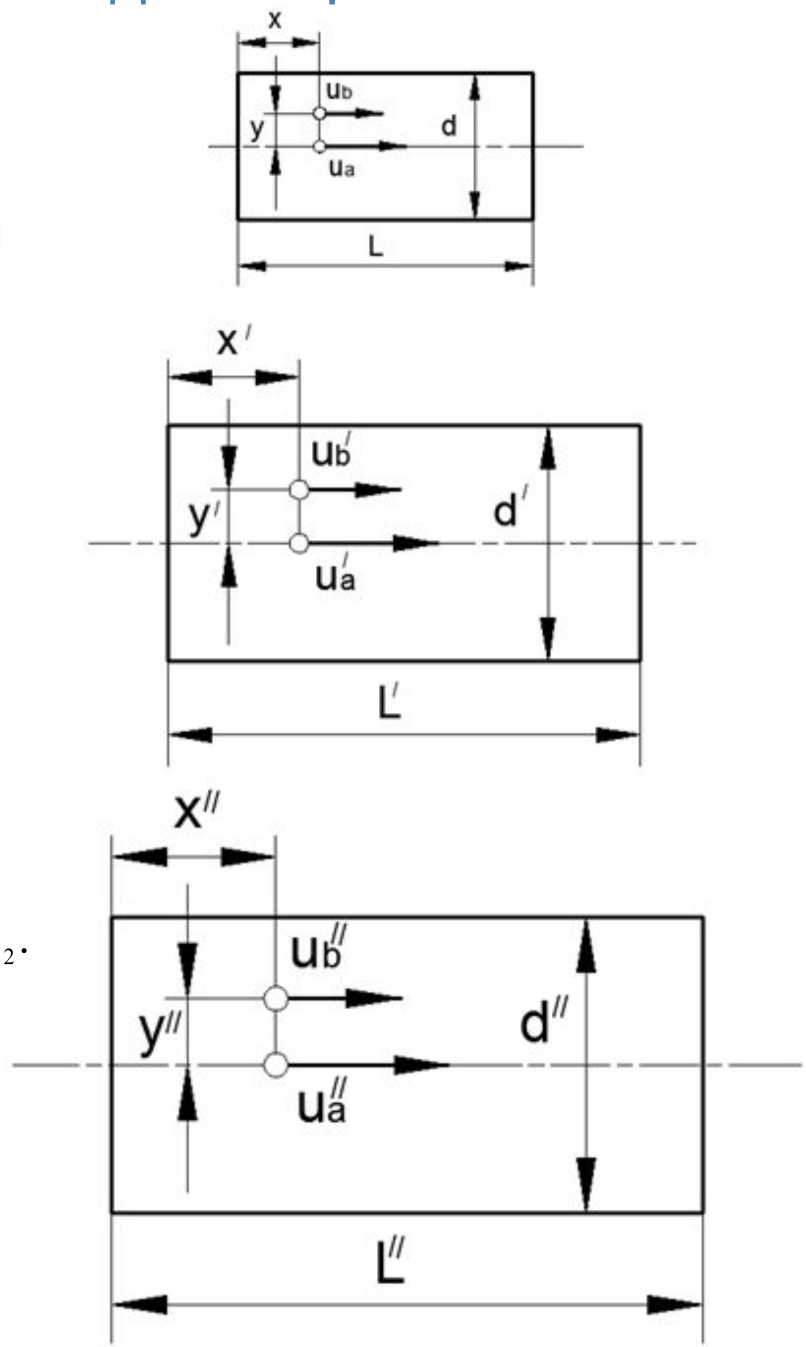
инвариант подобия

$$x'/x=y'/y=C_1;\ x''/x=y''/y=C_2$$

$$C_{u1}=\frac{u'_a}{u_a}=\frac{u'_b}{u_b};\ C_{u2}=\frac{u''_a}{u_a}=\frac{u''_b}{u_b};\qquad C_{u1}\neq C_{u2};\ C_{\rho 1}\neq C_{\rho 2}.$$

$$C_{\rho 1}=\frac{\rho'_a}{\rho_a}=\frac{\rho'_b}{\rho_b};\ C_{\rho 2}=\frac{\rho''_a}{\rho_a}=\frac{\rho''_b}{\rho_b}.$$

$$i_u=\frac{u_b}{u_a}=\frac{u'_b}{u'_a}=\frac{u''_b}{u''_a};\ i_\rho=\frac{\rho_b}{\rho_a}=\frac{\rho'_b}{\rho'_a}=\frac{\rho''_b}{\rho''_a}.$$



Теоремы подобия

1. К первой теореме подобия (примеры): $\mathrm{Re} = idem;\ \mathrm{Pr} = idem\ldots$

Безразмерные комплексы, образованные из размерных величин

Определяемые величины (температура, перепад температур)

Определяющие величины (продолжительность нагрева, геометрические размеры, физические свойства)

2. Ко второй теореме подобия (пример): $Nu = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, Gr\ldots)$

Условия однозначности

Геометрические свойства (форма и размеры тел)

Физические свойства (характеристики материалов)

Краевые условия (НУ, ГУ)

3. К третьей теореме подобия: подобие = условия однозначности + критерии подобия

Условия полного подобия модели реальному объекту

1. Процессы в модели и образце относятся к одному классу явлений.
2. Эти процессы описываются одними и теми же уравнениями.
3. Соблюдается геометрическое подобие.
4. Краевые условия одинаковы.
5. Определяющие критерии подобия численно равны.

Методы исследования сложных явлений на моделях

1. Теоретический анализ, на основании которого устанавливаются физические величины, характеризующие рассматриваемое явление.
2. Составление условий однозначности и формулировка уравнений связи.
3. Выявление критериев подобия, выделение среди них определяемого
(который содержит искомую величину).
4. Проведение эксперимента и измерение величин, входящих в установленные критерии подобия.
5. Обработка опытных данных, получение зависимости определяемого
критерия от определяющих (в критериальной форме). Найденная зависимость может быть аппроксимирована в виде эмпирического уравнения (критериальное) с указанием пределов его применимости.

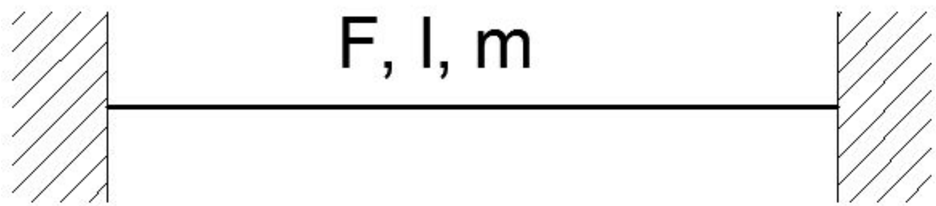
а) Метод анализа размерности.

б) Метод масштабных преобразований уравнений теплообмена в прототипе и модели.

Метод анализа размерности (алгебраический метод Рэлея)

$$[a] = P^{\alpha} \cdot Q^{\beta} \cdot R^{\gamma} \cdot S^{\delta}, \text{ где } PQRS - \text{система единиц измерения}$$

Пусть размерности N величин выражаются через K размерностей основных единиц размерности (K<N)



$$\nu = \varphi(F, l, m) - ? \quad (1)$$

$$\nu \cdot F^{\alpha} \cdot l^{\beta} \cdot m^{\gamma} = Const \quad (1a)$$

$$[\nu] = м \cdot c^{-1}; [l] = м; [m] = кг; [F] = кг \cdot м \cdot c^{-2} \quad (2) \qquad N = 4; K = 3; N - K = 1$$

$$м \cdot c^{-1} \cdot кг^{\alpha} \cdot м^{\alpha} \cdot c^{-2\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot кг^{\gamma} = Const = м^{0} \cdot c^{0} \cdot кг^{0} \quad (3)$$

$$м^{1+\alpha+\beta} \cdot c^{-1-2\alpha} \cdot кг^{\alpha+\gamma} = м^{0} \cdot c^{0} \cdot кг^{0} \quad (3a)$$

$$\begin{cases} [м] : 1 + \alpha + \beta = 0 \\ [c] : -1 - 2\alpha = 0 \\ [кг] : \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}; \beta = -\frac{1}{2}; \gamma = \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\nu = Const \cdot \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \quad (5)$$

Const - экспериментально

Метод анализа размерности (продолжение)

Рассмотрим задачу о теплообмене при стационарном турбулентном течении теплоносителя (газа или жидкости) в трубе.

$$N - K = 7 - 4 = 3$$

$$w = \rho \cdot u; \quad [w] = \frac{кг}{м^2 \cdot с}$$

$$[\alpha] = \frac{Дж}{м^2 \cdot К \cdot с}; [u] = \frac{м}{с}; [\rho] = \frac{кг}{м^3}; [c] = \frac{Дж}{кг \cdot К}; [\lambda] = \frac{Дж}{м \cdot К \cdot с}; [\mu] = \frac{кг}{с \cdot м}; [D] = м. \quad [Дж] = \frac{кг \cdot м^2}{с^2}$$

$$\alpha = f(w, c, \lambda, \mu, D) \qquad \alpha = C \cdot w^{x1} c^{x2} \lambda^{x3} \mu^{x4} D^{x5}, \text{ где } C - \text{безразмерный коэффициент}$$

$$\frac{Дж}{м^2 \cdot К \cdot с} = C \cdot \left(\frac{кг}{м^2 \cdot с}\right)^{x1} \left(\frac{Дж}{кг \cdot К}\right)^{x2} \left(\frac{Дж}{м \cdot К \cdot с}\right)^{x3} \left(\frac{кг}{с \cdot м}\right)^{x4} (м)^{x5}$$

$$\begin{cases} [кг]: 0 = x1 - x2 + x4, \\ [м]: -2 = -2x1 - x3 - x4 + x5, \\ [с]: -1 = -x1 - x3 - x4, \\ [Дж]: 1 = x2 + x3, \\ [К]: -1 = -x2 - x3, \end{cases}$$

$$\Rightarrow x3 = 1 - x2, \; x4 = x2 - x1, \; x5 = x1 - 1.$$

$$\alpha = C \cdot w^{x1} c^{x2} \lambda^{1-x2} \mu^{x2-x1} D^{x1-1}$$

$$\left(\frac{\alpha D}{\lambda}\right)^{1} = C \cdot \left(\frac{w \cdot D}{\mu}\right)^{x1} \left(\frac{c \cdot \mu}{\lambda}\right)^{x2}.$$

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} - \text{число Нуссельта};$$

$$\mathrm{Re} = \frac{w \cdot D}{\mu} = \frac{\rho u \cdot D}{\mu} - \text{число Рейнольдса};$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{c \cdot \mu}{\lambda} - \text{число Прандтля}.$$

$$Nu = C \cdot \mathrm{Re}^{a}\, \mathrm{Pr}^{b}$$

Константы C, a, b находятся при проведении экспериментов. Так для цилиндрической трубы:

$$Nu = 0{,}023 \cdot \mathrm{Re}^{0,8}\, \mathrm{Pr}^{0,33}$$

Метод масштабных преобразований уравнений теплообмена в прототипе и модели

Пример: уравнение стационарного конвективного теплообмена.

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{cm},$$ где – q –тепловой поток в стенку;

$$q = \alpha \cdot \Delta T,$$ q – коэф-т теплоотдачи.

Рассмотрим две подобные в тепловом отношении системы (подобны тепловые потоки). Соблюдается также геометрическое и гидродинамическое подобие.

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot (\Delta T)_1 = -\lambda_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial y}, \\ \alpha_2 \cdot (\Delta T)_2 = -\lambda_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial y_2}, \end{cases}$$

$$C_\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}; C_T = \frac{(\Delta T)_2}{(\Delta T)_1}; C_y = \frac{y_2}{y_1}; C_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

$$C_\alpha \cdot C_T \cdot \alpha_1 \cdot (\Delta T)_1 = -\frac{C_\lambda \cdot C_T}{C_y} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \rightarrow C_\alpha \cdot C_T = \frac{C_\lambda \cdot C_T}{C_y} \rightarrow \frac{C_\alpha \cdot C_y}{C_\lambda} = 1.$$

$$\frac{\alpha_1 \cdot y_1}{\lambda_1} = \frac{\alpha_2 \cdot y_2}{\lambda_2} = idem = Nu.$$

Получили критерий подобия рассматриваемого процесса – число Нуссельта.

Плоская поверхность твердого тела омывается жидкой или газообразной средой.

Добавятся уравнения энергии, движения и неразрывности. Аналогично слайду 7.

Из уравнения энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]\leftrightarrow\frac{C_T}{C_t}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)+\frac{C_u C_T}{C_l}\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{C_a C_T}{C_l^{\ 2}}\left[a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right].$$

$$\frac{C_T}{C_t}=\frac{C_u C_T}{C_l}=\frac{C_a C_T}{C_l^{\ 2}}\rightarrow\frac{C_a C_t}{C_l^{\ 2}}=1;\ \frac{C_u C_l}{C_a}=1$$

$$Fo=\frac{at}{l^2}-критерий\ Фурье;\ Pe=\frac{ul}{a}-критерий\ Пекле$$

Из уравнения движения (например, проекция на OX):

$$OX:\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$C_\rho\frac{C_u}{C_t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{C_\rho C_u^{\ 2}}{C_l}\left(\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=C_\rho C_g\left(\rho g_x\right)-\frac{C_\rho}{C_l}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{C_\mu C_u}{C_l^{\ 2}}\left(\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{C_\rho C_u}{C_t}=\frac{C_\rho C_u^{\ 2}}{C_l}\rightarrow Sh=\frac{ut}{l}-критерий\ Струхаля;\ \frac{C_\rho C_u^{\ 2}}{C_l}=C_\rho C_g\rightarrow Fr=\frac{u^2}{gl}-критерий\ Фруда;$$

$$\frac{C_\rho C_u^{\ 2}}{C_l}=\frac{C_\rho}{C_{l\ g}}\rightarrow Eu=\frac{\rho}{\rho u^2}-критерий\ Эйлера;\ \frac{C_\rho C_u^{\ 2}}{C_l}=\frac{C_\mu C_u}{C_l^{\ 2}}\rightarrow \mathrm{Re}=\frac{ul\rho}{\mu}-критерий\ Рейнольдса$$

Основные критерии подобия

Гидродинамические критерии подобия	
Число Рейнольдса (Re)	Определяет соотношение между силами инерции и силами трения в потоке
Число Эйлера (Eu)	Характеризует соотношение сил давления и сил инерции в потоке
Число Фруда (Fr)	Характеризует отношение сил инерции и тяжести в потоке
Число Струхаля (Sh)	Характеризует отношение времени к периоду релаксации потока
Тепловые критерии подобия	
Число Нуссельта (Nu)	Характеризует отношение интенсивностей конвективного и кондуктивного переноса тепла
Число Прандтля (Pr)	Является критерием подобия температурного и скоростного полей, а также характеризует свойства теплоносителя
Число Фурье (Fr)	Характеризует отношение времени к периоду релаксации поля температур в теле
Число Пекле (Pe)	Характеризует соотношение между конвективным и молекулярным переносом теплоты в потоке

Обобщение опытных данных на основе теории подобия

1. Какие величины нужно измерять в опыте? – Все величины, содержащиеся в числах подобия изучаемого процесса (1 теорема).
2. Как обрабатывать результаты опыта? – Результаты опыта следует обрабатывать в числах подобия и зависимость между ними представлять в виде
Уравнений подобия. Это позволит найти общую закономерность, справедливую
для всех процессов, подобных изучаемому (2 теорема).
3. Какие явления подобны изучаемому? – Подобны те явления, у которых подобны условия однозначности и равны определяющие числа подобия (3 теорема).

Например, располагая данными измерений коэффициента теплоотдачи при вынужденном движении воздуха, по опытным данным можно получить графическую зависимость от скорости:

$$\alpha = f(\omega) \rightarrow \alpha = c_1 \cdot \omega^n, \textit{где } c_1 \textit{ и } n - \textit{постоянные}$$

Справедливо лишь для частного случая! Для того, чтобы результаты опытов можно было распространить на все подобные процессы, обработка результатов опытов должна производиться в числах подобия.
Так, для воздуха Pr=0,7. Можно записать уравнение подобия:

$$Nu = f(\mathrm{Re}) \textit{ или } \alpha \cdot l \cdot \lambda = f(\omega \cdot l / \mu)$$

$$Nu = C \cdot \mathrm{Re}^a$$

Обобщенная формула позволяет установить, какое влияние на коэффициент теплоотдачи оказывают такие величины, как геометрический размер, к-т вязкости среды без проведения дополнительных измерений. И для всех подобных процессов!