

БЕРНУЛЛИ ТЕҢДЕУІ


Орындаған: Маукилов Аслан.
ТО-411

Гидроаэромеханика – сұйықтар мен газдардың механикалық қасиеттерін, олардың қозғалысын және олардың ішіндегі қатты денелердің қозғалысын зерттейді

- ▶ **Гидроаэростатика** сұйық немесе газдың тыныштық күйін немесе олардың қозғалыс жылдамдығы аз күйін зерттейді. *Архимед, Э.Торричелли, Б. Паскаль*
- ▶ **Гидроаэродинамика** сұйық пен газдардың қозғалысын, сол сияқты ұшқыш аппараттар мен суасты қайығының, су көліктерінің, сонымен қатар денелердің атмосферадағы қозғалысын, құстардың, жәндіктердің ұшуын зерттейді. *Д.Бернулли*

Сұйықтардың механикасының элементтері

Сұйықтар мен газдардың қозғалысын және тепе-теңдік заңдарын, сол сияқты олардың қатты денелермен әсерлесуін зерттейтін физиканың тарауын гидромеханика деп атайды.



Бернулли теңдеуі — гидромеханиканың негізгі теңдеулерінің бірі. Бұл теңдеуді швейцариялық ғалым Д. Бернулли (1700 — 1782) өзінің 1738 жылы Страсбургте жарық көрген “*Гидродинамика*” деген еңбегінде тұжырымдаған. Идеал сұйықтың қозғалысын (ағысын) сипаттайтын өрнекті 1738 жылы Д. Бернулли тұжырымдады. Бұл формуланы қорытып шығару үшін көлденең қималар әртүрлі түтікшедегі идеал сұйықтың қозғалысын қарастырайық.

Бернулли теңдеуі біртекті ауырлық күші өрісіндегі сығылмайтын сұйықтықтың бірқалыпты қозғалысы үшін төмендегіше өрнектеледі:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}$$

$$h + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = C$$

Бернулли теңдеуі **үш қысымның теңдеуі**,
үш энергия теңдеуі, **үш биіктік теңдеуі** деп те аталады.

Бернулли теңдеуі үш қысымның теңдеуі

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}$$

$\frac{\rho v^2}{2}$ - гидродинамикалық қысым

$\rho g h$ - гидростатикалық қысым

p - статикалық қысым

Бернулли теңдеуі үш энергия теңдеуі

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}$$

$\frac{\rho v^2}{2}$ - кинетикалық энергияның тығыздығы

$\rho g h$ - потенциалдық энергияның тығыздығы

p - Осы қысымның әрекетінен жасайтын жұмысымен өлшенетін сұйықтың потенциалдық энергиясының тығыздығы

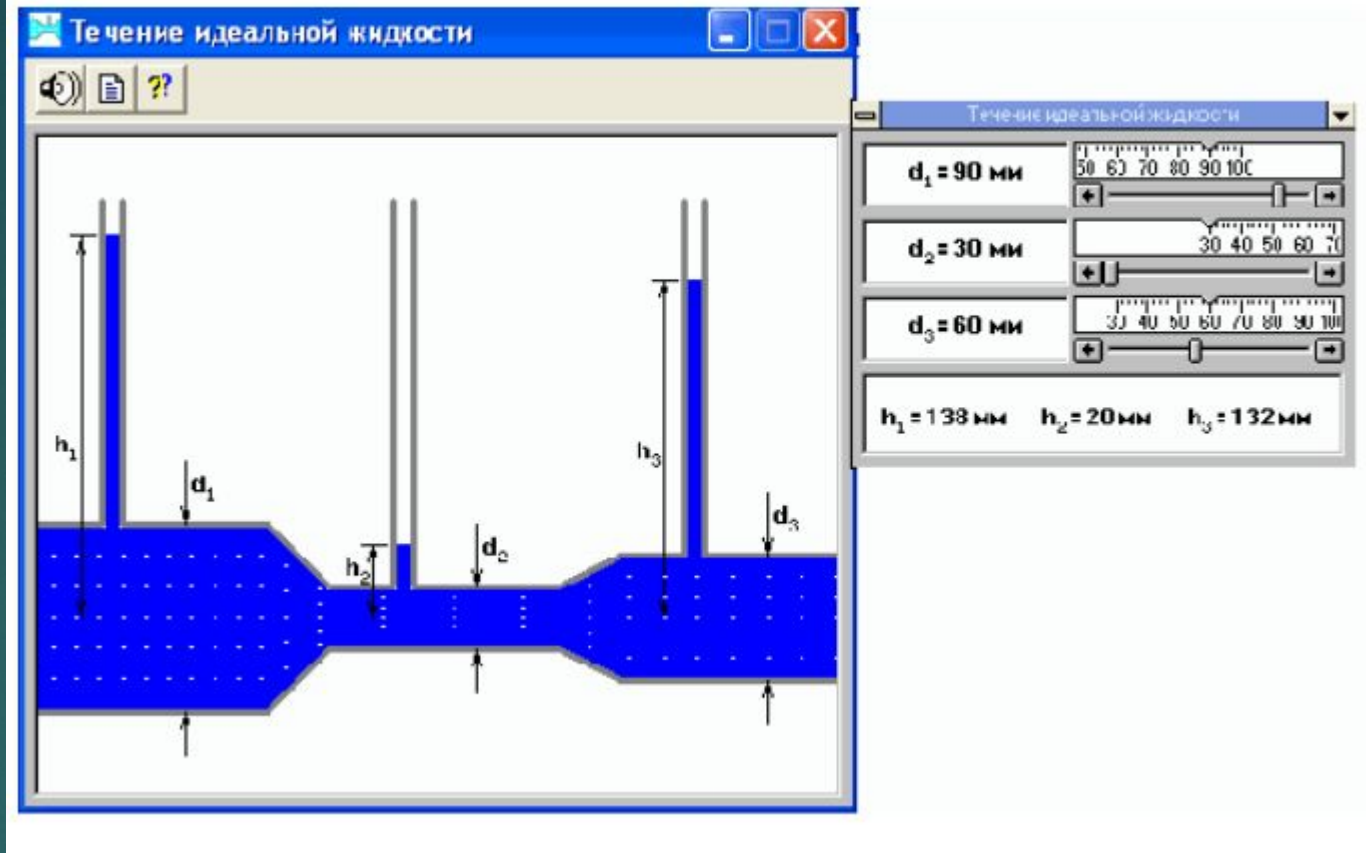
Бернулли теңдеуі үш биіктік теңдеуі

$$h + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = C$$

h - геодезиялық (геометриялық) биіктік, яғни қиманың көкжиектен жоғары жатқан бөлігі

$\frac{p}{\rho g}$ - пьезометрлік биіктік, яғни берілген қимаға өзінің салмағымен p қысым түсіретін сұйық бағанының биіктігі

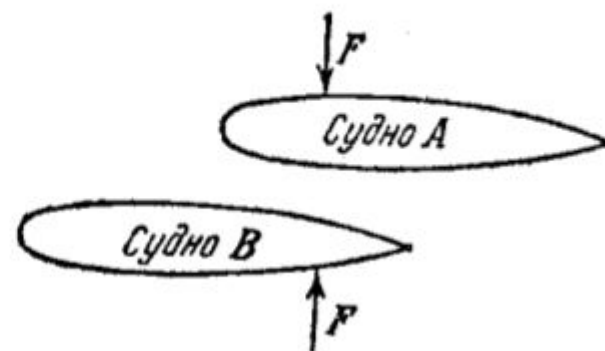
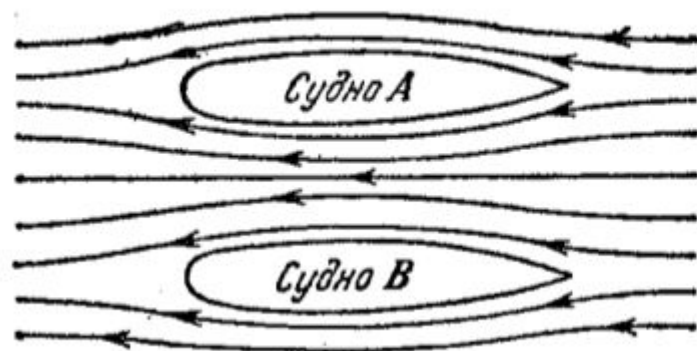
$\frac{v^2}{2g}$ - жылдамдық биіктігі, яғни сұйық бөлшектерінің вакуумда x бастапқы жылдамдықпен тік (вертикаль) жоғары көтерілу биіктігі



Бернулли теңдеуі: жылдамдығы аз бөлігінде сұйықтың (газдың) қысымы жоғары болады және керісінше.



Д. Бернулли




Бернулми теңдеуін қолдану



Флеттердің
"Ветроходы"

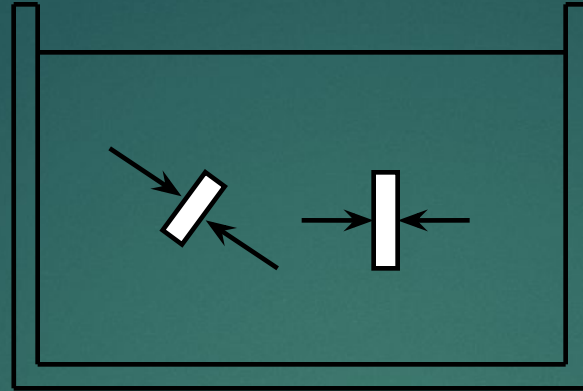


"Гоночный пылесос"
Чаппараль - 2.1



Гидромеханикада сұйықтың не газдың нақты құрылысы ескерілмейді, олар кеңістікте үзіліссіз таралған тұтас орталар ретінде қарастырылады. Тұтас орта моделі аса сиретілген газдар үшін қолдануға жарамсыз. Сұйықтар мен газдардың қатты денелерден айырмашылығы – олар өз пішіндерін сақтамайды, құйылған ыдыстың пішінін қабылдайды. Сұйықтар газдардан оларда беттік қабаттың болмайтындығымен, бірдей жағдайларда тығыздығының үлкендігімен (кризистік күйден басқа жағдайда), тығыздықтың қысымға тәуелділік сипатымен және сұйықтардың іс жүзінде сығылмайтындығымен ерекшеленеді.

КЕЗ КЕЛГЕН ТЫНЫШТЫҚТАҒЫ СҰЙЫҚҚА ЖҰҚА ПЛАСТИНА САЛАТЫН БОЛСАҚ, ОНДА ПЛАСТИНАНЫҢ АУДАНЫНА ЖАН-ЖАҒЫНДА ТҰРҒАН СҰЙЫҚТЫҢ БӨЛІГІНЕ КҮШПЕН ӘСЕР ЕТЕДІ. ӘСЕР КҮШІ МОДУЛЫ ЖАҒЫНАН БІРДЕЙ, ӘРІ ПЛАСТИНАНЫҢ ҚАЛАЙ ТҰРҒАНЫНА БАЙЛАНЫССЫЗ, ОЛ БАҒЫТЫ ЖАҒЫНАН АУДАНҒА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ӘСЕР ЕТЕДІ ДЕ ПЛАСТИНАНЫ ҚОЗҒАЛЫСҚА КЕЛТІРЕДІ. СҰЙЫҚТЫҢ ЖАҒЫНАН БІРЛІК АУДАНҒА $\frac{\Delta F}{\Delta S}$ НОРМАЛЬ КҮШТІҢ ӘСЕРІНЕН АНЫҚТАЛАТЫН ФИЗИКАЛЫҚ ШАМА ҚЫСЫМ ДЕП АТАЛАДЫ:



Қысымның өлшем бірлігі – *Паскаль* : 1 м^2 беттің ауданына бірқалыпты нормаль түсірілген 1 Н күшнің тудыратын қысымы 1 Па -ға тең.

Тепе-теңдік сұйықтардағы қысым Паскаль заңына бағынады: сұйықтың берілген нүктесіндегі қысым барлық бағыттарда бірдей, сұйықтың алып отырған барлық көлемі бойынша бірдей қысым береді. Сұйықтың салмағы осы сығылмайтын тыныштықтағы сұйықтың ішіндегі қысымның таралуына қалай әсер ететінін қарастырайық. Егер сұйық сығылмайтын болса, онда оның тығыздығы қысымға тәуелсіз. Онда көлденең аққан сұйықтың ағысы S , оның биіктігі h және тығыздығы ρ десек, салмағы $F = \rho g S h$, ал төменгі кабатындағы қысымы

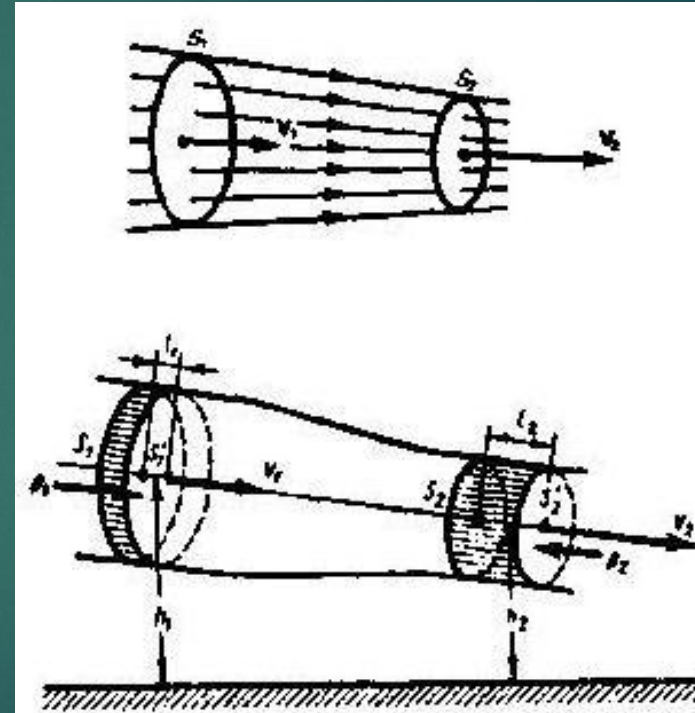
$$P = \frac{F}{S} = \frac{\rho g h S}{S} = \rho g h$$

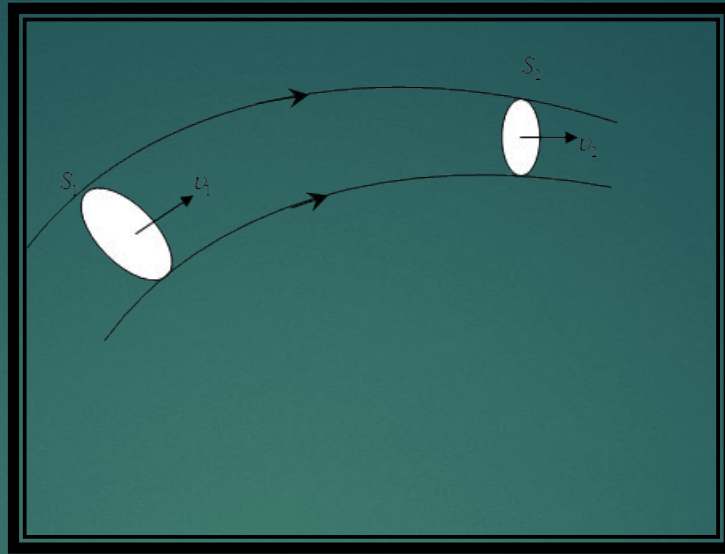
яғни қысым биіктік бойынша сызықты өзгереді. $P = \rho g h$ – гидростатикалық қысым деп аталады. Бұл теңдеу бойынша сұйықтар немесе газдардағы қысымның тереңдікке тәуелділігі оларға батырылған кез-келген денеге әсер ететін кері итеруші күштің пайда болуын тудырады.

Сұйықтың қалыптасқан қозғалысы. Сығылғыштығы және тұқырлығы ескерілмейтін тұтас ортадағы идеал сұйықтың қозғалысын қарастырайық. Сұйық қозғалысын қарастырғанда көп жағдайда сұйықты мүлдем сығылмайды деп санауға және оның бір қабаты екінші қабатымен салыстырмалы қозғалса, үйкеліс күштері (тұтқырлық) пайда болмайды деп қарауға болады. Мұндай сұйықты идеал сұйық деп атайды. Сұйық қозғалысын жете түсіну үшін ағын сызықтары және ағын түтігі деген түсініктерді пайдаланамыз.

Барлық нүктелердегі жанамалардың осы нүктелердегі сұйық жылдамдықтарының бағытымен бірдей түсетін сызықтары **ағын сызықтары** деп аталады.

- ▶ Ағын сызықтарымен шектелген сұйықтың бөлігі **ағын түтігі** деп аталады. Ағын түтігінің белгілі бір қимасындағы барлық бөлшек қозғалыс кезінде ағын түтігінен шығып кетпей оның ішімен қозғалады. Сонымен қатар ағын түтігінің ішіне де сырттан ешқандай бөлшектер енбейді.





Ағын түтігі бойымен үзіліссіз сұйық ағып жатсын. Ағын түтігі бойынан бөлшек жылдамдығының бағытына перпендикуляр S_1 және S_2 қиманы қарастырайық. Тұрақты қималардағы өтетін сұйық бөлшегінің жылдамдығын v_1 және v_2 деп белгілейік. Аз уақыт аралығында бұл Δt қималар арқылы өтетін сұйық көлемдері:

$$\Delta V_1 = S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t$$

$$\Delta V_2 = S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

Сұйықтың қалыптасқан ағыны кезінде сұйық сығылмайды деп есептесек, онда S_1 қимадан ағып өтетін сұйық көлемі дәл сондай болады, яғни $\Delta V_1 = \Delta V_2$ және $S_1 v_1 = S_2 v_2$. Олай болса, ағын түтігінің кез-келген көлденең қимасы үшін келесі қатынас орынды болады:

$$S \cdot v = \text{const}$$

Осы өрнекті *ағынның үздіксіздік теңдеуі* деп атайды. *Ағын түтігі көлденең қимасының сұйық ағысының жылдамдығына көбейтіндісі тұрақты шама болады.*

Түтікшенің ішінен S_1 және S_2 аудандармен шектелген сұйық массасын алып, оның қозғалысын бақылаймыз. Сол аудандардағы ағын жылдамдықтары мен қысымдары v_1, v_2 және p_1, p_2 болсын. Сұйықтық Δt уақыт аралығында $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$ жол жүріп, S_1 -ден S_1 күйіне, ал S_2 қимада $\Delta l_2 = v_2 \Delta t$ жол жүріп, S_2 күйіне келеді. S_1 және S_2 ағындарының арасындағы сұйық көлемі үздіксіздік теңдеуіне сәйкес S_1 және S_2 аралығындағы орналасқан сұйықтың көлеміне тең болады.

Түтік белгілі-бір еңістікке ие және олардың S_1 және S_2 қималарының центрі берілген горизонтал деңгейден h_1 және h_2 биіктікте тұр.

$\Delta m_1 = \rho \cdot S_1 \cdot v_1 \Delta t$ және $\Delta m_2 = \rho \cdot S_2 \cdot v_2 \Delta t$ екенін ескеріп, бастапқыда S_1 және S_2 қималарының арасында орналасқан сұйық массасының толық энергиясының өзгерісін келесі түрде жазуға болады.

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(\frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} + \Delta m_2 g h_2 \right) - \left(\frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} + \Delta m_1 g h_1 \right)$$

Бұл өзгеріс, энергияның сақталу заңы бойынша сыртқы күштердің жұмысына негізделген. Берілген жағдайда сәйкес S_1 және S_2 қималарға әсер ететін қысым күштері $F_1 = p_1 S_1$ және $F_2 = p_2 S_2$, мұндағы p_1 және p_2 - сәйкес қысымдар. F_1 күш пен Δx_1 орын ауыстырудың бағыттары бірдей, сондықтан F_1 күш оң жұмыс жасайды және $\Delta A_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t$ -ға тең.

F_2 қысым күші және Δx_2 орын ауыстырудың бағыттары қарама-қарсы. Олай болса, F_2 күш жұмысы теріс $\Delta A_2 = F_2 \Delta x_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t$. Сонымен, сыртқы күш $\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2$ жұмыс жасайды.

Энергияның сақталу заңы бойынша қималар энергияларының айырымы сұйықты қозғалысқа келтіру үшін істелінетін жұмыстардың айырымына тең болады. Сыртқы күштердің қосынды жұмысы $\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t$ - ға тең.

Δt уақыт ішінде S_1 және S_2 қималардан ағып өтетін сұйық көлемі $S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = \Delta V_1$ және $S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t = \Delta V_2$ үздіксіз теоремасы бойынша өзара тең $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$. Сыртқы күштердің толық жұмысы

$$\Delta A = (p_1 - p_2) \Delta V$$

Кинетикалық энергияның өзгерісі жасалынған

жұмысқа тең $\Delta T = \Delta A$,

$$\left(\frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} + \Delta m_2 g h_2 \right) - \left(\frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} + \Delta m_1 g h_1 \right) = (p_1 - p_2) \Delta V$$

$\Delta V_1 = \Delta V_2$ теңдігінен және сұйықтың сығылмайтын шартынан

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m = \rho \cdot \Delta V,$$

мұндағы ρ - сұйық тығыздығы, сондықтан өрнек келесі түрде жазылады.

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1$$

s_1 және s_2 қима аудандары ойша алынғандықтан соңғы өрнекті кез-келген түтік қималары үшін былай жазуға болады:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const$$

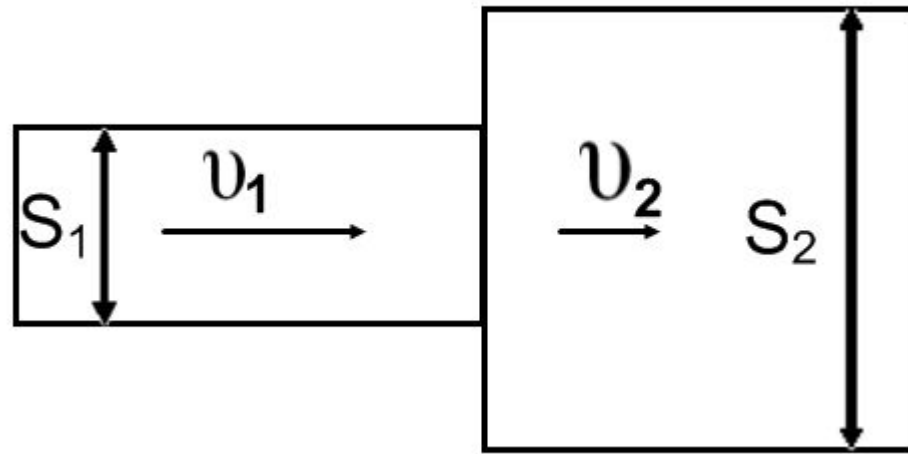
Бернулли теңдеуі деп аталады.

Сұйық ағынындағы қысым. Бернулли теңдеуіндегі:

$\frac{1}{2} \rho v^2$ - динамикалық, ρgh - гидростатикалық, P -

статикалық (сыртқы) қысым деп аталады, ал олардың қосындысы толық қысым деп аталады. Демек, идеал сұйықтың стационарлы (қалыптасқан) ағысы кезінде түтік ағынының кез-келген қимасындағы толық қысым тұрақты шама.

Ламинарлық және турбуленттік ағыстар. Тұтқырлық. Сұйықтың ағысын ламинарлық және турбуленттік деп екіге бөледі. Сұйықтың жеке қабаттары бір-бірімен қарағанда параллель, яғни сұйық қабатта бір-бірімен араласпай қозғалатын болса, онда ағысты *ламинарлық ағыс* деп атайды. Сұйық бөлшектерінің жылдамдығы артып, шекті мәнге жеткенде әр қабаттардың бір-бірімен араласуы сұйықтың *турбуленттік ағысы* деп атайды.



$$V_1 = S_1 L_1 = S_1 v_1 t$$

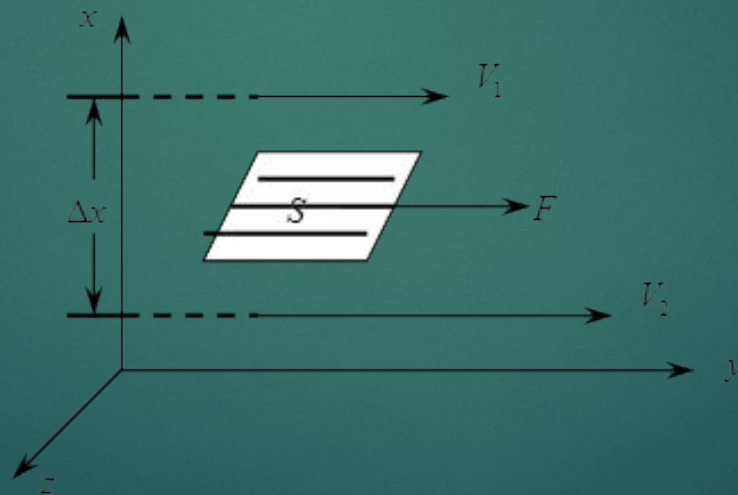
$$V_2 = S_2 L_2 = S_2 v_2 t$$

$$V_1 = V_2, \quad S_1 / S_2 = v_2 / v_1$$

Үзіліссіздік принципі: егер ағын шарттары өзгермесе, онда ыдысқа қанша сұйық құйылса, сонша сұйықтық ағып шығуы керек

Егер сұйық қабаттары бір-бірімен араласып иіріліп қозғалатын болса, мұндай ағыс – *турбулентті (иірімді)* деп аталады. Сығылмайтын тұтқыр емес сұйықты *идеал сұйық* деп, ал сығылатын тұтқыр сұйық *реал сұйық* деп аталады

Идеал сұйықтың қалыптасқан стационарлы ағысы кез-келген жылдамдықтарда ламинарлы болып табылады. Нақты сұйықтарда қабаттар арасында ішкі үйкеліс күші пайда болады, яғни нақты сұйықтар тұтқырлыққа ие болады. Сондықтан, әрбір қабат көрші қабаттың қозғалысына кедергі жасайды.



Ішкі үйкеліс күшінің шамасы қабаттарының беттесу S ауданына және жылдамдықтың dv/dz градиентіне пропорционал болады, яғни

$$F = \eta \frac{dv}{dz} \cdot S ,$$

мұндағы η – тұтқырлық коэффициенті деп аталатын пропорционалды коэффициент. Оның өлшем бірлігі $1 \frac{кг}{м \cdot с} = 1 Па \cdot с$. Тұтқырлық сұйықтың табиғатына және температурасына байланысты. Температураның өсуіне қарай тұтқырлық төмендейді

Егер ішкі үйкеліс күші және ағыс жылдамдығы аз шама болса, онда қозғалысты ламинарлық деп қарастыруға болады. Ішкі үйкеліс күшінің үлкен мәндері кезінде ағыстың қабаттық сипаты бұзылады; аса күшті араласу басталады, яғни турбулентті ағысқа көшу болады. Түтік бойымен сұйық ағысы кезіндегі ағыстың бір түрінен екінші түрге өту шарты Рейнольдс саны деп аталатын $Re_{кр}$ шамасымен анықталады:

$$Re_{кр} = \frac{\rho v D}{\eta},$$

мұндағы ρ - сұйықтың тығыздығы, v - түтік қимасы бойынша орташа ағыс жылдамдығы, D - түтік диаметрі.

$Re < Re_{кр}$ кезінде ламинарлы ағыс, ал $Re > Re_{кр}$ кезінде турбулентті ағыс болып қалыптасады. Тұтқырлықтың әсері $Re < Re_{кр}$ кезінде дөңгелек қимасы бар түтік бойынша әртүрлі қабаттардағы ағыс жылдамдықтары әртүрлі етіп жасалды. Оның орташа мәні Пуазейль өрнегі бойынша анықталады.

$$\langle v \rangle = \frac{r^2}{8\eta} \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{l}$$

мұндағы r — түтік радиусы, $(p_1 - p_2)$ — түтік ұштарындағы қысым айырымы, l — оның ұзындығы.

Тұтқырлықтың әсері ағынның қозғалмайтын денемен өзара әсерлесуі кезінде де байқалады. Тұтқырлығы η сұйық ішіндегі радиусы r , жылдамдығы v шар қозғалысына жасалатын кедергі күші мынаған тең:

$$F = 6\pi\eta r v,$$

Бұл өрнек **Стокс теңдеуі** деп аталады. Стокс өрнегі лабораториялық практикум сабағында сұйықтардың η тұтқырлық коэффициентін анықтау үшін қолданылады.

НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА РАХМЕТ!