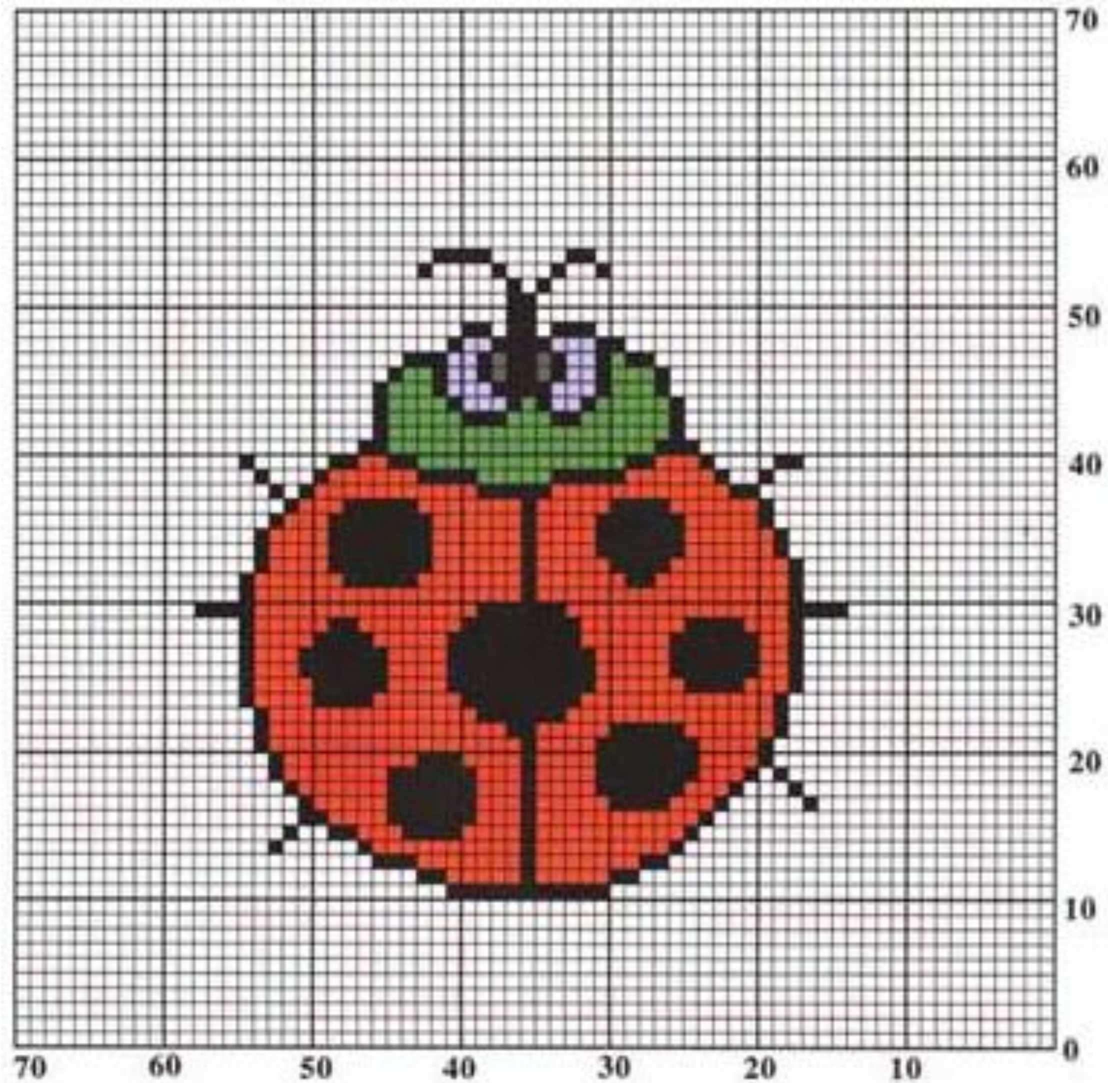
Цифровая обработка сигналов и изображений (вечерняя форма обучения).



Введение

- Лекции 20 час + лабораторные 16 час => Экзамен
- Планируется 4 лаб работ

- Студент может предложить конкретные темы лаб работ. Обсудим и решим, подходят ли они по тематике курса.
-
- Согласно Учебному плану специальности
- лаб работы заканчиваются к 29 апреля,
- последняя лекция будет 26 апреля 2017.
- Экзамен 15 мая – 4 июня.

- Контакты: email: ivanovnn@gmail.com
- Тел +375-29-1805589 Велком
- Ауд. 505-5.

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Под сигналом обычно понимают величину, отражающую состояние физической системы. Сигналы рассматриваются как функции, заданные в физических координатах. Примеры: одномерные сигналы, заданные как функции времени, двумерные сигналы заданные на плоскости, и тд.
- В дальнейшем мы будем рассматривать в основном сигналы как действительные функции времени.
- *Аналоговые* сигналы описываются непрерывны-

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Мы, в основном, будем рассматривать дискретные сигналы, заданные на конечном промежутке времени с равными интервалами времени между отсчетами сигналов.

- Понятие «сигнал» применяется в различных смыслах. Так, сигналом называют физический процесс передачи информации во времени и пространстве на некоторым физическом носите-ле – электрическим токе, в электромагнитном поле, в луче света, звуком и т.д. Примеры: радио-, теле-визионная передача, телефон, светофор, жесты

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Мы, в основном, будем рассматривать дискретные сигналы, заданные на конечном промежутке времени с равными интервалами времени между отсчетами сигналов.

$$t \in [a,b]$$

- Мы рассматриваем сигнал **x(t)** как функцию от времени **t** на конечном промежутке времени (в общем случае на бесконечном интервале). Физически значением функции может быть напряжение, сила тока, и пр.

$$i(t) = \frac{x(t)}{R}$$

- Если рассматривать **x(t)** как напряжение в цепи, то

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Мы, в основном, будем рассматривать дискретные сигналы, заданные на конечном промежутке времени с равными интервалами времени между отсчетами сигналов.
- Тогда мгновенная мощность (энергия) сигнала **x(t)** в момент **t** равна $$E(t) = x(t)i(t) = \frac{x^2(t)}{R}$$
- Если считать, что сопротивление цепи постоянно и равно 1, то энергия сигнала в момент **t** равна квадрату его величины, $\mathbf{E(t) = x^2(t)}$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Тогда энергия (работа) сигнала x(t) на интервале времени *[t_1,t_2]* будет равна

$$E(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt$$

- Энергия (работа) дискретного сигнала, которую затрачивает устройство, передающее сигнал x(t) в течение интервале времени *[1,n]* :

$$E(1,n)=\sum_{i=1}^{n} x^2(i)$$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Введение метрики на сигналах.

- Для вещественных чисел, для точек в пространстве и для векторов известна мера близости объектов (расстояние). Известно понятие нормы (длины) вектора, которая приводит к понятию нормы сигнала.

- Будем исходить и $A = (a_1, a_2)$ двумерном пространстве, но все результаты легко обобщаются на конечномерные пространства. Пусть вектор

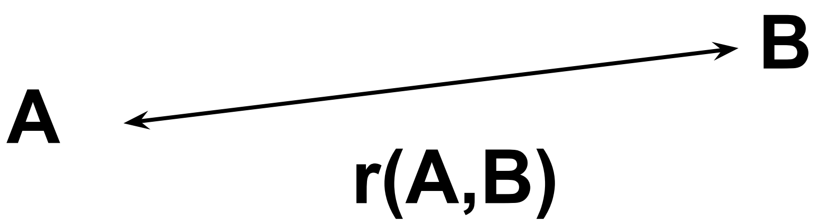
- задан своими координатами. **Евклидовой нормой** вектора A называется вещественное число

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- (Существуют другие определения нормы, неевклидовы).
- Расстояние r между векторами определяется как норма их ра $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$

$$r(A,B) = \|A - B\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$



Норма сигнала определяется аналогично.

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Пусть сигнал x(t) задан на интервале $t \epsilon [a, b]$

Нормой сигнала x(t) называется вещественное число

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}$$

- (при усло ... ует).

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{T}} \sin \omega_0 t, \text{если } t \geq 0, \\ 0, \quad \text{иначе} \end{cases}$$

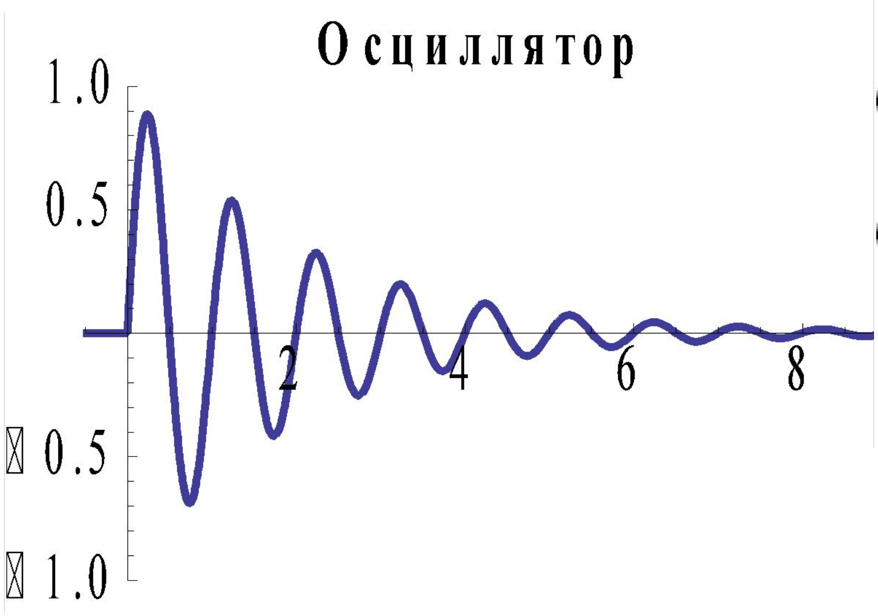
- Пример. Н ... осциллятора

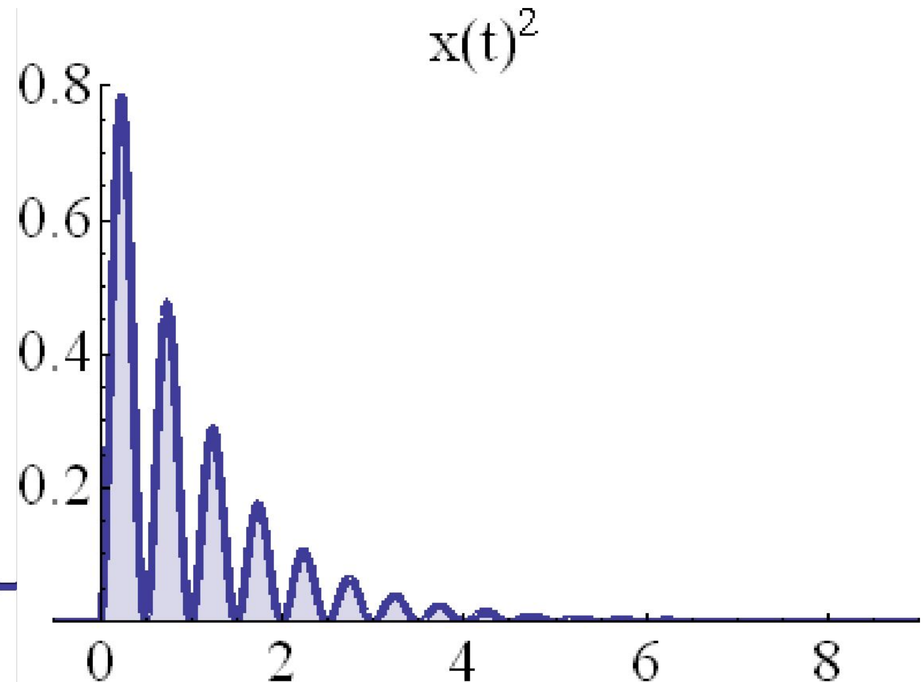
$[0, 3]$ $[7, 10]$

- На интервалах времени: 1) 2)

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Норма затухающего осциллятора на отрезках.





1. Сигналы в метрическом пространстве

- Норма затухающего осциллятора.
- Соответствующие интегралы

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}$$

$$\|x(t)\|_{[0,3]} = 0.687$$

$$\|x(t)\|_{[7,10]} = 0.020$$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- То есть, на отрезке $[7, 10]$ сигнал практически равен нулю (но конкретный вывод **зависит от поставленной задачи**!).
- Заметим, что норма сигнала на отрезке близка к энергии сигнала на этом отрезке (будет рассматриваться далее).
- **Расстояние (отклонение) между сигналами x(t) и y(t),** заданными на $t \in [a, b]$, измеряется как

$$r(x(t), y(t)) = \|y(t) - x(t)\| = \sqrt{\int_a^b (y(t) - x(t))^2 dt}$$

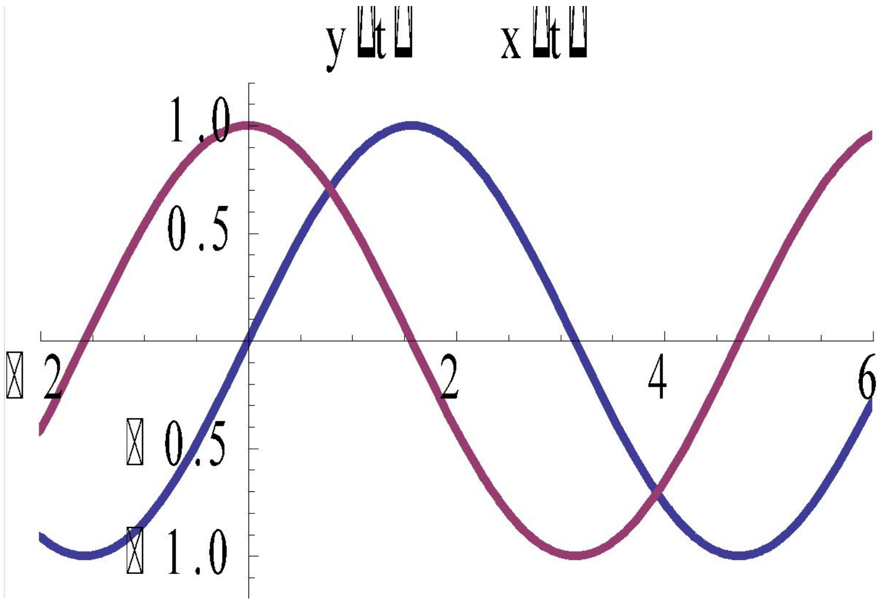
при условии, что интеграл существует

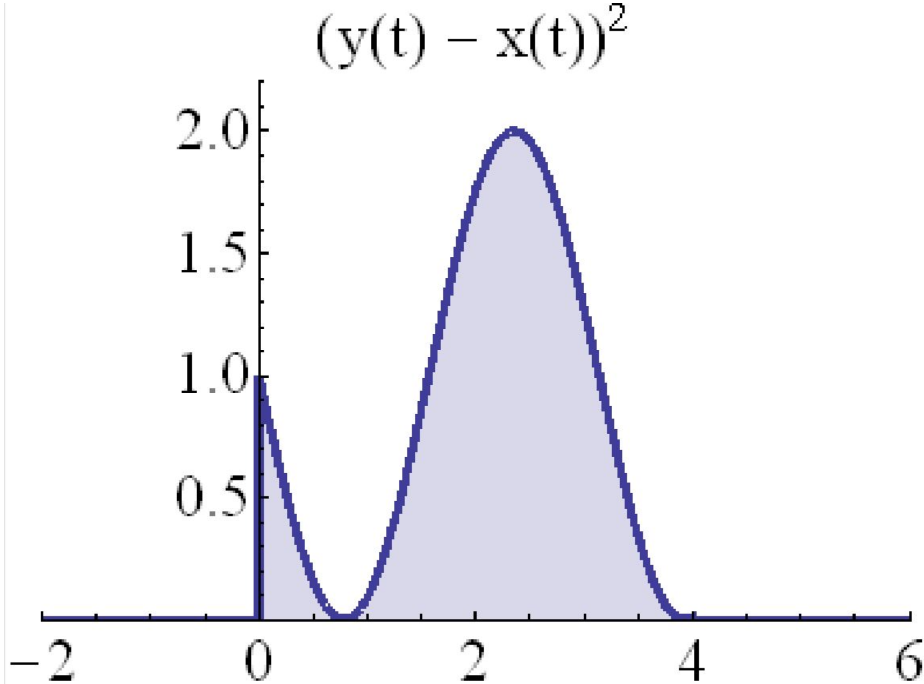
1. Сигналы в метрическом пространстве

- Пример. Найти расстояние между сигналами

$x(t) = \sin t$ и $y(t) = \cos t$ на отрезке $[0, 4]$

- Графики:





Расстояние между сигналами ***x(t)*** и ***y(t)*** равно

$$\rho = \sqrt{\int_0^4 (\cos(t) - \sin(t))^2 dt} = \sqrt{\int_0^4 (1 - \sin 2t) dt} = 1.85$$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Аналогично нормой дискретного сигнала ***x(i)*** называется вещественное число

$$\left\| x(i) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} x^2(i)}$$

- Расстояние между дискретными сигналами ***x(i)*** и ***y(i)*** $r\big(x(i), y(i)\big) = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} \big(x(i) - y(i)\big)^2}$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Наряду с нормой

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}$$

-

(*)

- существуют и другие определения нормы, например,

$$\|x(t)\| = \frac{1}{b-a}\sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}$$

Мы будем и ).

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Теперь рассмотрим два сигнал ***x(t)*** и ***y(t)***, заданных на промежутке времени $t \in [a, b]$.
- **Скалярным произведением** сигналов **x(t)** и **y(t)** называется определени

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)s(t)dt$$

- где ***s(t)*** – некоторая весовая функция. (Аналогично векторам можно найти и **косинус угла между функциями** !).
- В функцион ярное произведение функци яют в виде интеграла

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dS(t)$$

где ***dS(t) = s(t)dt***.

2.1. Сигнал и его представление

- Понятно, что рассматриваемый определенный интеграл должен существовать. Весовой функцией ***s(t)*** может служить функция с некоторыми специальными свойствами.
- В качестве ***s(t)*** можно использовать **функцию плотности распределения** некоторой непрерывной случайной величины, тогда ***S(t) - функция распределения*** этой величины.
- В некоторых случаях ***s(t) =1***, тогда ***S(t) =t, d S(t) =dt***, то есть весовая функция в этих случаях просто отсутствует.
- Норма сигнала ***x(t)*** равна корню квадратному из скалярно-го произведения сигнала с самим собой

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\int_a^b x(t)x(t)s(t)dt}$$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Норма **комплекснозначного** сигнала ***x(t)*** – это корень квадратный из скалярного произведения с сопряженным сигналом

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x, \bar{x} \rangle} = \sqrt{\int_a^b x(t)\bar{x}(t)s(t)dt}$$

- Сигналы **x(t)** и **y(t)** называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю.

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)s(t)dt = 0$$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Пример. Проверить ортогональность сигналов

$$x(t) = \cos m\omega t, \; y(t) = \sin n\omega t$$

- с весовой функцией **s(t) = 1** на отрезке
- **t ϵ [-T/2,T/2]**
- **T=2π/ω**, где **m, n** – целые числа. $\langle x, y \rangle$

произведение .

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos m\omega t \sin n\omega t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} (\sin \omega t(m+n) - \sin \omega t(m-n))dt =$$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- При *n* ≠ *m*

$$=\frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{m-n}\cos\omega t(m-n)-\frac{1}{m+n}\cos\omega t(m+n)\right)\Bigg|_{t=-T/2}^{T/2}=$$

$$=\left[\omega=\frac{2\pi}{T}\right]\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{m-n}\cos\frac{\pi}{2}(m-n)-\frac{1}{m+n}\cos\frac{\pi}{2}(m+n)\right)=0$$

- При *n* = *m*

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\sin 2n\omega t\,dt=-\frac{1}{4n\omega}\cos 2n\omega t\Bigg|_{t=-\pi/\omega}^{\pi/\omega}=0$$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Сигнал **x(t)** не обязательно зависит от времени, аргумент **t** может быть любой природы. Можно обобщить понятие сигнала на многомерный случай. Так изображение размерности ***a*** на ***b*** можно задать как сигнал ***x(u,v)***, где

$$u \in [0,a], v \in [0,b]$$

а значение интенсивности ***x(u,v)*** для полутоновых изображений лежит в интервале вещественных чисел от 0 до 255.

На изображения переносятся определения нормы, расстояния и энергии.

Переменные ***u*** и ***v***, значения интенсивности могут быть дискретными, например, целыми числами; тогда получаем дискретное (цифровое) изображение.

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Для объяснения и обоснования понятий и результатов теории сигналов необходимо элементарное знание математики.
- **Тригонометрические функции**.
- В радиоэлектронике в основном используются сигналы, происходящие от колебаний. Периодические колебания хорошо описываются функциями синус и косинус.
- Функция ***sin(t)*** периодическая, ограниченная, определена для любого значения аргумента ***t***.
- **Периодом функции *f(t)*** называется минимальное неотрицательное число ***T***, такое, что для любого ***t***

$$f(t+T) = f(t)$$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Функция ***sin(t)*** имеет период $T = 2\pi$, если аргумент ***t*** – это время, выраженное в секундах, то через 2π секунд функция начнет повторять свои значение, начнется новое колебание. Тогда частота колебаний функции ***sin(t)*** равна

$$f = \frac{1}{2\pi}$$ Hz (колебаний в секунду)

- Если рассматривать t как угол вращения вектора, то частоту колебаний можно выражать величиной изменения угла в единицу времени. Угол измеряется в радианах, функция sin(t) за время $T = 2\pi$ секунд выполнит полный оборот, то есть пройдет угол 2π радиан, тогда угловая скорость равна

$$w = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$ (радиан в секунду)

1. Сигналы в метрическом пространстве

- В математическом анализе выводится формула Эйлера, выражающая функции ***sin(t)*** и ***cos(t)*** через комплексные числа.
- Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi),$$

- Отсюда, взяв угол ***ϕ*** с положительным и отрицательным знаком, получаем значения ***sin(t)*** и ***cos(t)*** .

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$\sin(\varphi) = i\frac{e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}}{2}.$$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- В дальнейшем нам понадобится выражение для суммы $$a\cos(\varphi)+b\sin(\varphi)$$

в комплексной форме

$$a\cos(\varphi)+b\sin(\varphi)=a\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}+b\,i\,\frac{e^{-i\varphi}-e^{i\varphi}}{2}=$$

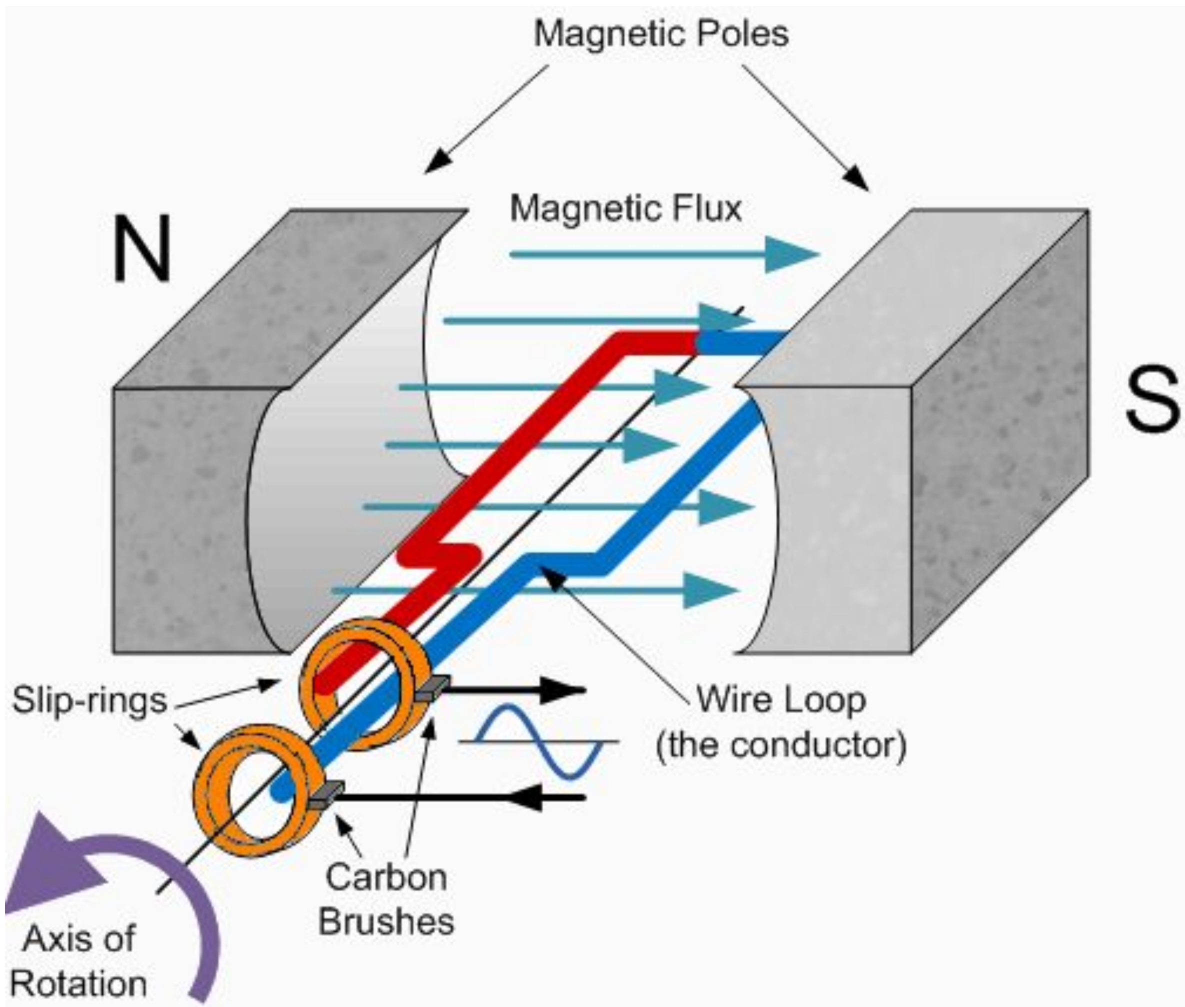
$$=\frac{1}{2}\Big(\big(a-b\,i\big)e^{i\varphi}+\big(a+b\,i\big)e^{-i\varphi}\Big)$$

1. Сигналы в метрическом пространстве

- **Понятие спектра сигнала.**
- Электрический сигнал ***sin(t)*** для передачи по проводам можно получить, равномерно вращая металлическую рамку в магнитном поле. При этом на концах рамки будет наблюдаться периодический электрический сигнал. Частота этого сигнала равна 1 (радиан в секунду) – это угловая скорость вращения рамки. Если параллельно соединить две вращающиеся рамки, то выходной сигнал будет получен смешиванием частот первого и второго сигнала.
- Разумно предположить, что любой сигнал с некоторой погрешностью можно разложить в сумму функций ***sin(.)*** и ***cos(.)*** с некоторыми аргументами и амплитудами.

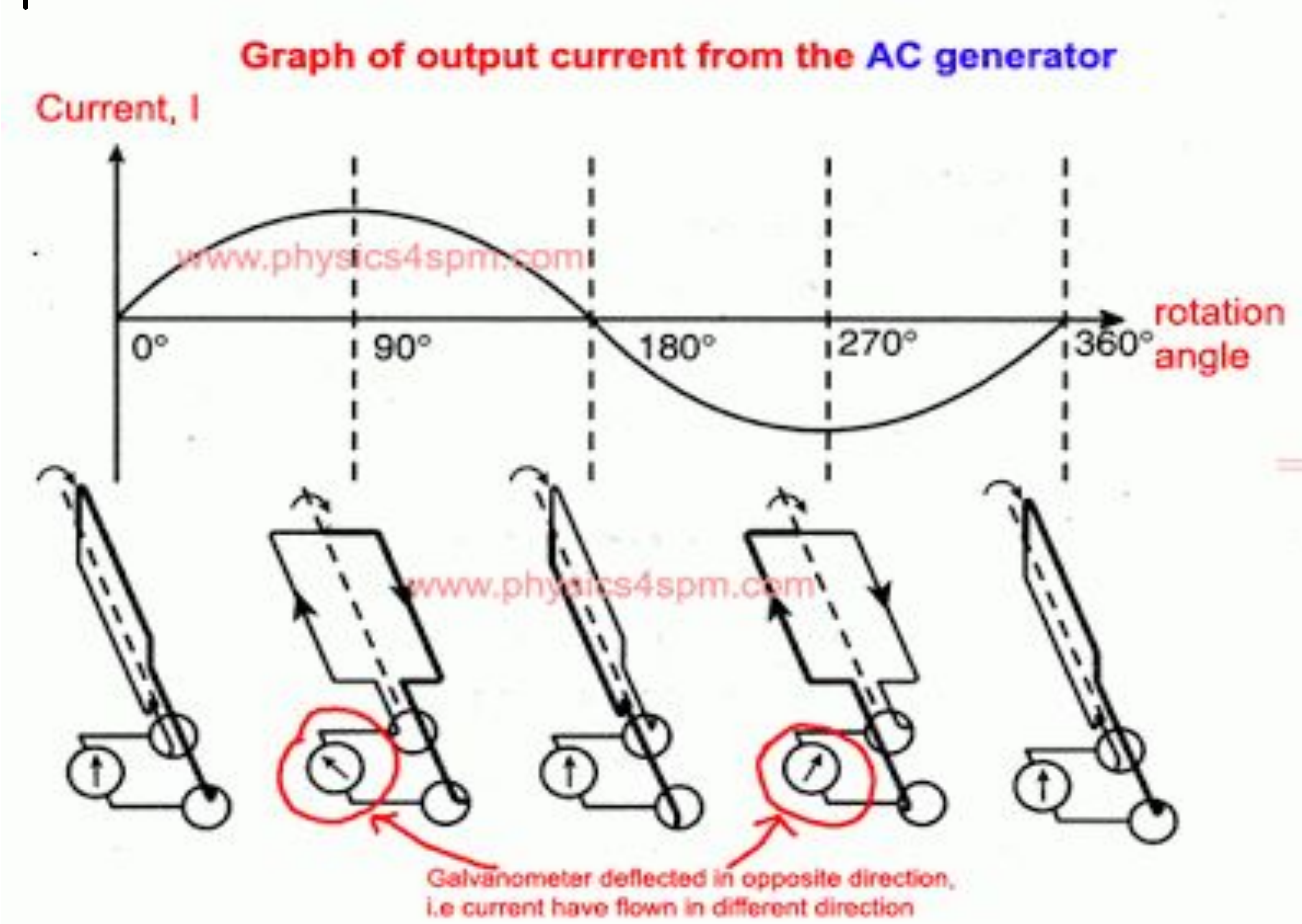
1. Сигналы в метрическом пространстве

- Генерация электрических сигналов ***cos(t)*** и ***sin(t)*** в магнитном поле. В зависимости от скорости вращения рамки изменяется период и соответственно частота сигнала.



1. Сигналы в метрическом пространстве

- Зависимость напряжения сигнал от угла рамки в линиях напряженности магнитного поля.



1. Сигналы в метрическом пространстве

- **Понятие спектра сигнала.**
- Электрический сигнал ***sin(t)*** для передачи по проводам можно получить, равномерно вращая металлическую рамку в магнитном поле. При этом на концах рамки будет наблюдаться периодический электрический сигнал. Частота этого сигнала равна 1 (радиан в секунду) – это угловая скорость вращения рамки. Если параллельно соединить две вращающиеся рамки, то выходной сигнал будет получен смешиванием частот первого и второго сигнала.

1. Сигналы в метрическом пространстве

- Разумно предположить, что любой сигнал с некоторой погрешностью можно разложить в сумму функций ***sin(.)*** и ***cos(.)*** с определенными аргументами и амплитудами (то есть коэффициентами перед этими функциями).

2. Ортогональные функции

- Ортогональность функций. Система линейно независимых функций {***f0(t)**, **f1(t)**, ..., **fk(t)**,* ...}, заданных на некотором отрезке ***[a, b]*** называется ортогональной системой функций, если все они попарно ортогональны на этом отрезке.

- Если все функции системы имеют норму 1, то система называется ортонормированной.

- Пример ортогональной системы функций :
- функции **cos (kωt), k=0,1**,... ортогональны на отрезке ***[-π/ω, π/ω]***, но система не ортонормирована.

2. Ортогональные функции

- **Функции Хаара**. В 1909 г Альфред Хаар предложил систему кусочно-постоянных функций, которая стала широко применяться с 80-х годов прошлого века для построения вейвлетов – интегральных преобразований, учитывающих временнЫе интервалы передачи сигнала.
- Для построения ортогональной системы Хаара вначале введем понятие диадических интервалов.
- Для любой пары неотрицательных целых чисел j, k определим интервал $I_{j,k}$.

$$I_{j,k} = \left[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\right)$$

Такие интервалы, определенные для всех таких пар j, k называется семейством **двоичных интервалов**.

2. Ортогональные функции

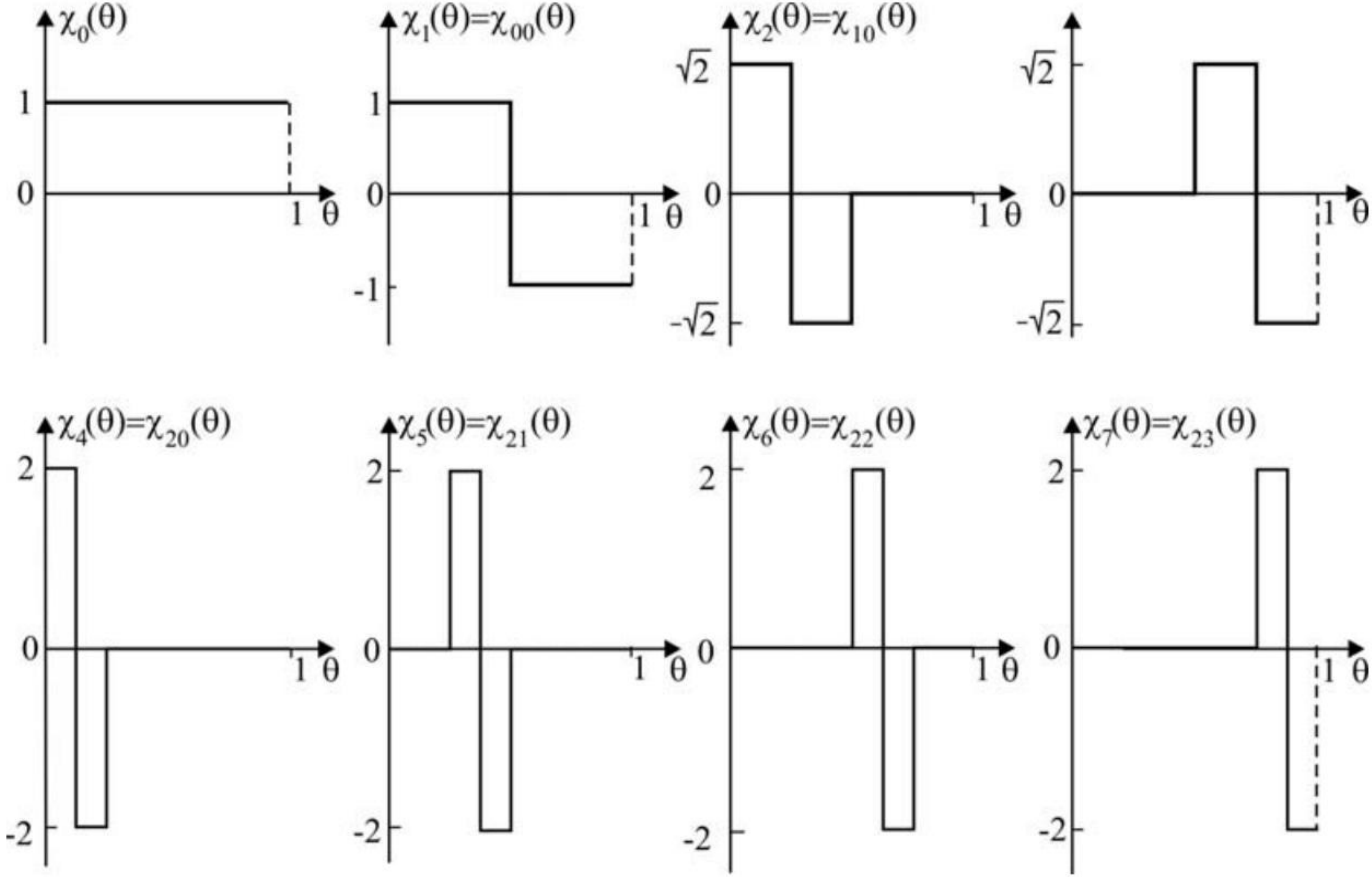


Рис. 5.1. Графики первых восьми функций Хаара

2. Ортогональные функции

- Семейство двоичных интервалов имеет важные для дальнейших построений свойства.
- Взаимное положение интервалов. Пусть j_0, k_0, j_1, k_1 – неотрицательные целые. Если $j_0 \neq j_1, k_0 \neq k_1$, тогда справедливо одно и только одно из соотношений:

либо $a)\ I_{j0,k0} \cap I_{j1,k1} = \varnothing,$

либо $b)\ I_{j0,k0} \subset I_{j1,k1},$

либо $c)\ I_{j1,k1} \subset I_{j0,k0},$

- при этом в случаях ***b)*** и ***c)*** меньший интервал входит либо в левую, либо в правую половину большего.

2. Ортогональные функции

- Если интервал $I_{j+1,\ k0}$ входит в интервал $I_{j,\ k}$, то либо $k0=2k$ (левая половина интервал $I_{j,\ k}$), либо $k0=2k+1$ (правая половина).
- Для операций на двоичных интервалах введем **оператор растяжения** D_a и **оператор переноса** T_b

$$D_a f(t) = a^{1/2} f(at),$$
$$T_a f(t) = f(t-b).$$

- По определению функции-индикатора множества

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

2. Ортогональные функции

- Если интервал $I_{j+1,\, k0}$ входит в интервал $I_{j,\, k}$, то либо $k0=2k$ (левая половина интервал $I_{j,\, k}$), либо $k0=2k+1$ (правая половина).
- Для операций на двоичных интервалах введем **оператор растяжения** D_a **и оператор переноса** T_b

$$D_a f(t) = a^{1/2} f(at),$$

$$T_a f(t) = f(t-b).$$

По определению функции-индикатора множества

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

2. Ортогональные функции

- Теперь определим вспомогательную функцию

$$p(t) = \chi_{[0,1)}(t),$$

$$p_{j,k}(t) = D_{2^j} T_k p(t) = D_{2^j} p(t-k) = 2^{j/2} p(2^j t - k).$$

- Функции $p_{j,k}(t)$ называются весовыми функциями Хаара. Тогда очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{j,k}(t)dt = 2^{-j/2} 2^j = 2^{-j/2},$$

$$\left\| p_{j,k}(t) \right\| = \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{j,k}(t))^2 dt = 2^{-j} 2^j = 1.$$

2. Ортогональные функции

- **Функции Хаара**, которые являются целью построения, получаются делением интервала-носителя функций $p_{j,k}()$ на две равные части, левую и правую, на левом подинтервале функция Хаара равна +1, на правом -1.

$$h(t) = \chi_{[0,1/2)}(t) - \chi_{[1/2,1)}(t),$$

$$h_{j,k}(t) = D_{2^j} T_k h(t) = 2^{j/2} h(2^j t - k).$$

- Ввиду знаков функций $h_{j,k}(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{j,k}(t)dt = 0,$$

$$\left\| h_{j,k}(t) \right\| = \left\| p_{j,k}(t) \right\| = 1.$$

2. Ортогональные функции

- Множество функций Хаара {***h(t), $h_{j,k}$()*** }, где ***j, k*** – пробегают все неотрицательные целые числа, называется **ортогональной системой Хаара**. Покажем, что функции, входящие в систему, попарно ортогональны.
- Очевидно, что ***$h_{j,k0}$(t)*** и ***$h_{j,k1}$(t)*** при различных ***k0 и k1*** имеют непересекающиеся носители, поэтому их произведение равно нулю и они ортогональны.
- Если функции Хаара имеют разные индексы ***j***, то положим для определенности $j0>j1$. Возможны 3 случая <u>Взаимномного расположения интервалов</u> (слайд 32).
- Случай $a)\ I_{j0,k0} \cap I_{j1,k1} = \varnothing$, тогда носители функций не пересекаются и произведение равно нулю (то есть функ-ции ортогональны).

2. Ортогональные функции

- Случаи ***b)*** и ***c)*** - это когда один носитель входит в левую или правую половину другого, но и в той и в другой половине функция постоянна, то есть произведение сводится к интегралу на меньшем носителе, а он равен нулю (то есть и в этом случае функции ортогональны).
- Таким образом, показано, что **функции Хаара попарно ортогональны**.
- Функции Хаара широко применяются в приложениях, в частности, на основе этих функций построены вейвлеты Хаара.

2. Ортогональные функции

- **Ортогональное разложение**. Одной из основных задач для ортогональных функций является задача разложения заданной функции в ряд по этому ортогональному базису. Такое разложение называется **ортогональным разложением**.
- Пусть $\{P_0(t),\ P_1(t),\ \ldots\}$ – ортогональный базис в некото-ром пространстве функций.
- Задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты разложения функции $y(t)$ в ряд

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(t),$$

  - на интервале **[a, b]**.
  - Требуется найти коэффициенты разложения A_k по заданной функции $y(t)$ и известным базисным функциям.

2. Ортогональные функции

- Для того, чтобы найти A_{k0} для конкретного $k0$, умножим обе части равенства на $P_{k0}(t)$ и на $s(t)$ и на интервале ортогональности $[a, b]$ проинтегрируем по t.

$$\int_a^b y(t)P_{k0}(t)s(t)dt = \int_a^b \left(P_{k0}(t)s(t)\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(t) \right) dt$$

- В предположении, что ряд сходится абсолютно и интегралы существуют, меняем порядок интегрирования

$$\int_a^b y(t)P_{k0}(t)s(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\int_a^b P_{k0}(t)P_k(t)s(t)dt \right)$$

2. Ортогональные функции

- Ввиду ортогональности базисных функций $P_k(t)$ все интегралы в правой части, кроме слагаемого с индексом ***k0***, обращаются в нули. Получаем:

$$\int_a^b y(t)P_{k0}(t)s(t)dt = A_{k0}\int_a^b P_{k0}^2(t)s(t)dt$$

- Норму в квадрате $$\int_a^b P_{k0}^2(t)s(t)dt = \left\| P_{k0}(t) \right\|^2$$

- Обозначим через N_{k0}, тогда

$$A_{k0} = \frac{1}{N_{k0}}\int_a^b y(t)P_{k0}(t)s(t)dt$$

2. Ортогональные функции

- Записывая для простоты результат с индексом **k**, получаем формулу

$$A_k = \frac{1}{N_k}\int_a^b y(t)P_k(t)s(t)dt$$

- Так получаются и формулы разложения в ряд Фурье по базисным функциям **sin(·)** и **cos(·)** , и разложение по базисам Уолша и Хаара.
- Мы не рассматриваем громоздкие вопросы о сходимос-ти функциональных рядов и об их абсолютной сходимос-ти. Эти важные вопросы рассматриваются в высшей мате-матике, однако многие признаки сходимости основаны на сходимости геометрической

2. Ортогональные функции

- Исходная составляющая один период на кольце (время, за которое тепло проходит полный круг), была названа главной гармоникой, а составляющие с меньшими периодами — соответственно второй, третьей и т.д. гармоникой. Так был построен ряд Фурье.
- Фурье свёл функцию распределения тепла, трудно поддающуюся математическому описанию, к удобным для анализа суммам синусов и косинусов, оказалось, что эти суммы очень точно описывают распределение тепла в твердом теле.

2. Ортогональные функции

- В основе ряда Фурье лежат тригонометрические ортогональные функции.

$$F_k = A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)$$

- Это базисные функции ряда Фурье. Главная гармоника имеет период **T**, соответственно **ω = 2π/T** – частота (угловая скорость). Весовая функция ***s(t) = 1***.
- Ортогональность базисных функций разложения означает, что

$$\int_{-T/2}^{T/2} F_n F_m dt = \begin{cases} 0, \textit{если } n \neq m, \\ \neq 0, \textit{иначе} \end{cases}$$

Проверим это свойство интегрированием.

2. Ортогональные функции

- Проверим ортогональность сигналов

$$x(t) = \sin m\omega t \quad y(t) = \sin n\omega t$$

- с весовой функцией ***s(t) = 1*** на отрезке ***t € [-T/2,+T/2]***
- ***T=2π/ω***, где **m, n** – целые числа.
- Найдем скалярное произведение $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt \equiv \int_{-T/2}^{+T/2} \sin m\omega t \sin n\omega t dt =$$

- Применим формулу

$$sin(a)sin(b) = 1/2(cos(a-b) - cos(a+b))$$

2. Ортогональные функции

- Если $m \neq n$ (при интегрировании нужно будет делить на $m - n$), то

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left(cos(m-n)\omega t - cos(m+n)\omega t \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{sin(m-n)\omega t}{(m-n)\omega} - \frac{sin(m+n)\omega t}{(m+n)\omega} \right) \Bigg|_{t=-T/2}^{T/2} =$$

$$\left[\omega = \frac{2\pi}{T} \right]$$

2. Ортогональные функции

$$= \frac{T}{4\pi}\left(\frac{sin(m-n)\pi}{m-n} - \frac{sin(m+n)\pi}{m+n} - \right.$$

$$\left. - \frac{sin(n-m)\pi}{m-n} + \frac{sin(-m-n)\pi}{m+n}\right) = 0,$$

- То есть, для любых целых параметров **m ≠ n** сигналы ортогональны. При **m=n=0** получаем

$$\langle x, y\rangle = \int_{-T/2}^{+T/2} \sin 0 \sin 0 \, dt = 0,$$

- То есть нулевой сигнал **x(t)=0 ортогонален сам себе**. (Такой необычный случай желательно исключить).

2. Ортогональные функции

- При **m=n ≠0** получаем

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega t \sin n\omega t \, dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1 - 2\cos n\omega t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin 2n\omega t}{2n\omega}\right)\Bigg|_{t=-T/2}^{T/2} = \frac{T}{2}.$$

- То есть, норма сигнала ***sin nωt*** равна $\left\|\mathbf{sin\,n}\omega\mathbf{t}\right\| = \sqrt{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{2}}},$

- норма сигнала ***cos nωt*** также равна $\left\|\mathbf{cos\,n}\omega\mathbf{t}\right\| = \sqrt{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{2}}}.$

2. Ортогональные функции

- Окончательно получаем:
- 1) норма сигнала ***sin nwt*** при n=1,2,... равна $\sqrt{\frac{T}{2}}$,
- при n=0 норма ***sin nwt*** равна 0.
- 2) норма сигнала ***cos nwt*** при n=1,2,... также равна $\sqrt{\frac{T}{2}}$,
- при n=0 норма ***cos nwt*** равна $\sqrt{T}$.
- Ввиду отличия норм нулевой базисной функции F_0 коэффициенты разложения при этой функции имеют особый вид, не соответствующий общей формуле коэффициентов.

2. Ортогональные функции

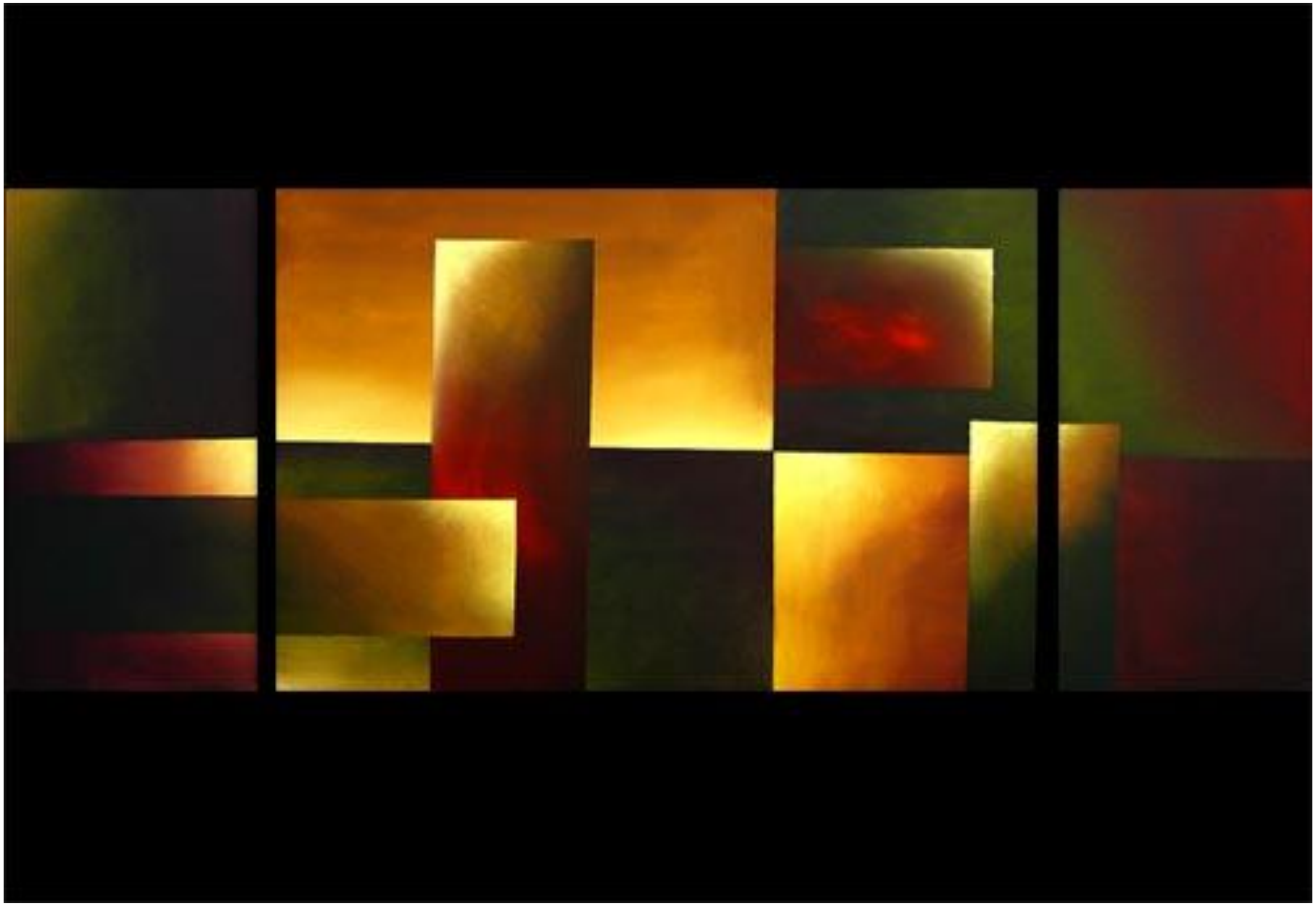
- 3) Сигнала ***sin nwt*** и ***sin mwt*** при ***n≠m*** для всех целых ***n*** и ***m*** ортогональны.
- 4) Сигнала ***cos nwt*** и ***cos mwt*** при ***n≠m*** для всех целых ***n*** и ***m*** ортогональны (доказать).
- 5) Сигнала ***sin nwt*** и ***cos mwt*** для всех целых ***n*** и ***m*** ортогональны (доказано в п. 2.2).

- Исходя их этих результатов легко получить коэффициенты разложения сигнала в ряд Фурье, используя общую формулу коэффициентов разложения в ортогональный ряд.

2. Ортогональные функции

- **Упражнение. Проверить ортогональность сигналов**

$$x(t) = \cos m\omega t \quad y(t) = \cos n\omega t$$



3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

- Коэффициенты A_k, B_k ряда Фурье вычисляются с применением свойства ортогональности базисных функций. Общий вид разложения

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t$$

- Вначале найдем коэффициенты A_0, B_0

$$x(t) = A_0 \cos 0\omega t + B_0 \sin 0\omega t +$$

$$+ A_1 \cos 1\omega t + B_1 \sin 1\omega t + \ldots \qquad (*)$$

3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

- Так как ***sin0 =0***, то ***B_0*** – любое число, для определенности положим его равным нулю, ***B_0 =0***.
- Коэффициент A_0 вычислим, умножив обе части (*) на
- ***cos 0*** и интегрируя обе части равенства

$$\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cos 0\, dt = \mathbf{A}_0 \int_{-T/2}^{+T/2} \cos 0 \cos 0\, dt + 0 +$$

$$+\mathbf{A}_1 \int_{-T/2}^{+T/2} \cos 0 \cos \omega t\, dt + \mathbf{B}_1 \int_{-T/2}^{+T/2} \cos 0 \sin \omega t\, dt + \ldots$$

3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

- Так как по результатам п 3.1. сигналы ***cos nωt*** и ***cos mωt*** при ***n≠m*** для всех целых ***n*** и ***m*** ортогональны и сигналы ***sin nωt*** и ***cos mωt*** для всех целых ***n*** и ***m*** также ортогональны, то все интегралы, кроме выражения левой части и первого слагаемого правой части обращаются в нуль. Тогда получаем

$$\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cos 0\, dt = \mathbf{A}_0 \int_{-\mathbf{T/2}}^{+\mathbf{T/2}} \mathbf{\cos 0 \cos 0\, dt}$$

- По результатам п 3.1.квадрат нормы ***cos 0*** равен ***T***, Тогда получаем

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cos 0\, dt = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}}\int_{-\mathbf{T/2}}^{+\mathbf{T/2}} \mathbf{x(t)\, dt}.$$

3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

- Коэффициенты A_k, B_k вычисляем аналогично, для построения A_k умножаем обе части (*) на ***cos kωt*** и проинтегрируем обе части выражения

$$\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cos k\omega t\, dt = \mathbf{A}_0 \int_{-\mathbf{T}/2}^{+\mathbf{T}/2} \mathbf{cos}\, k\omega t\, \mathbf{cos}\, \mathbf{0}\, \mathbf{dt} + 0 +$$

$$+\mathbf{A}_1 \int_{-\mathbf{T}/2}^{+\mathbf{T}/2} \mathbf{cos}\, k\omega \mathbf{t}\, \mathbf{cos}\, \omega t\, \mathbf{dt} + \mathbf{B}_1 \int_{-\mathbf{T}/2}^{+\mathbf{T}/2} \mathbf{cos}\, k\omega \mathbf{t}\, \mathbf{sin}\, \omega \mathbf{t}\, \mathbf{dt} + \ldots +$$

$$+\mathbf{A}_k \int_{-\mathbf{T}/2}^{+\mathbf{T}/2} \mathbf{cos}\, k\omega \mathbf{t}\, \mathbf{cos}\, k\omega t\, \mathbf{dt} + \mathbf{B}_k \int_{-\mathbf{T}/2}^{+\mathbf{T}/2} \mathbf{cos}\, k\omega \mathbf{t}\, \mathbf{sin}\, k\omega \mathbf{t}\, \mathbf{dt} + \ldots$$

3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

- Ввиду ортогональности все интегралы обращаются в нуль, кроме интеграла с коэффициентом ***A$_k$***, и с учетом нормы ***cos kwt*** получаем выражение

$$\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cos k\omega t\,dt = \mathbf{A}_k \int_{-\mathbf{T}/2}^{+\mathbf{T}/2} \mathbf{cos}\, k \qquad k\omega t \quad ,$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cos k\omega t\,dt = \mathbf{A}_k \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{2}}.$$

3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

•Отсюда коэффициент A_k для ***k=1,2,...*** равен

$$\mathbf{A}_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\,\mathbf{cos}\,k\omega t\,dt. \qquad (*)$$

- A_0 получили раньше

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}}\int_{\mathbf{-T/2}}^{\mathbf{+T/2}} \mathbf{x(t)\,dt}.$$

- коэффициент B_k вычисляем аналогично, для этого умножаем обе части (*) на ***sin kωt*** и интегрируем обе части полученного выражения, окончательно

$$\mathbf{B}_\mathbf{k} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{T}}\int_{\mathbf{-T/2}}^{\mathbf{+T/2}} \mathbf{x(t)\,sin\,k\omega\,t\,dt}, \qquad \mathbf{B}_0 = 0.$$

3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

- Если разложение в ряд Фурье функции ***x(t)*** записать в виде

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + B_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \\ + A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}2t\right) + B_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}2t\right) + \cdots$$

- То формула для A_k справедлива и для ***k=0***. Таким образом, для ***k=0,1,2,…***

$$A_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cos k\omega t\, dt$$

- для ***k=1,2,…***

$$B_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\sin k\omega t\, dt.$$

3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

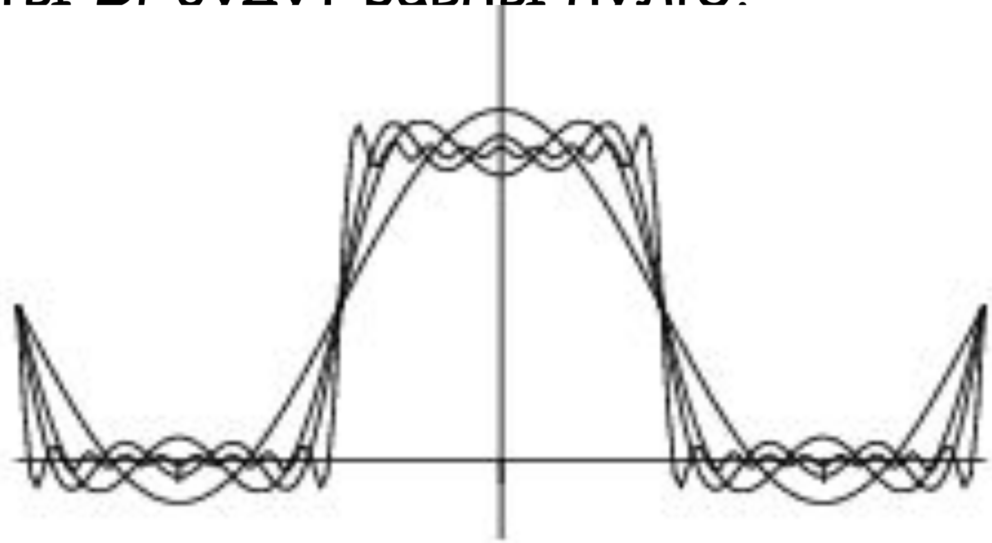
- Легко показать, что при разложении **нечетной функции** коэффициенты ряда Фурье при базисных функциях ***cos(·)*** равны нулю, то есть разложение разложения нечетной функции не содержит базисных функций ***cos(·)***.

- При разложения **четной функции** ряд Фурье не содержит базисных функций ***sin(·)***.

- Ряд Фурье хорошо приближает периодические функции. Можно рассматривать любую (в том числе непериодическую) **функцию на отрезке** и разлагать ее в ряд Фурье только на отрезке, для непериодической функции удобно считать **длину этого отрезка** ее **периодом**.

3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

- Прямоугольная функция четная. Ряд Фурье для прямоугольной функции содержит только ***cos(•)***: Коэффициенты ***B***. будут равны нулю.

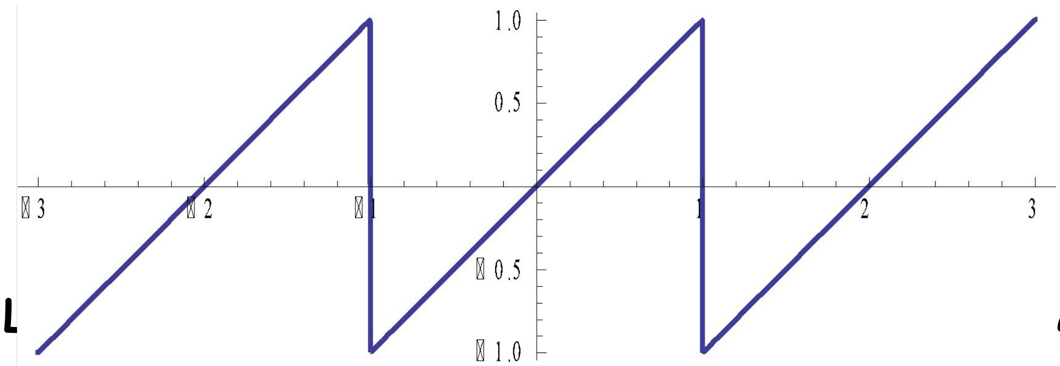


$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos\omega x - \frac{1}{3}\cos 3\omega x + \frac{1}{5}\cos 5\omega x + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{\cos(2k-1)\omega x}{2k-1}$$

3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

- Ряд Фурье для нечетной функции:



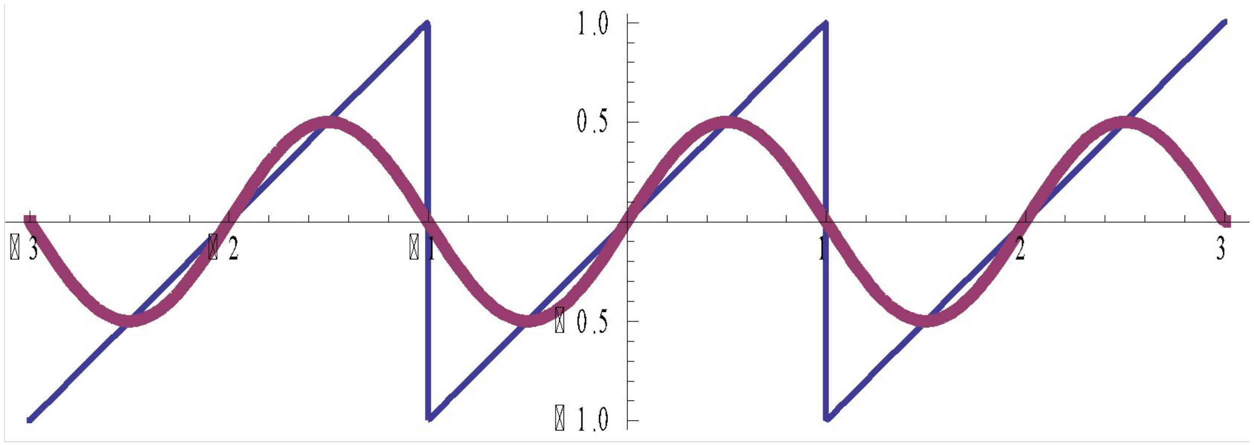
- Эта функц **2, ω=π** (здесь разложение до **k = 4**).

$$A_k = 0, B_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} t\sin(k\pi t)dt$$

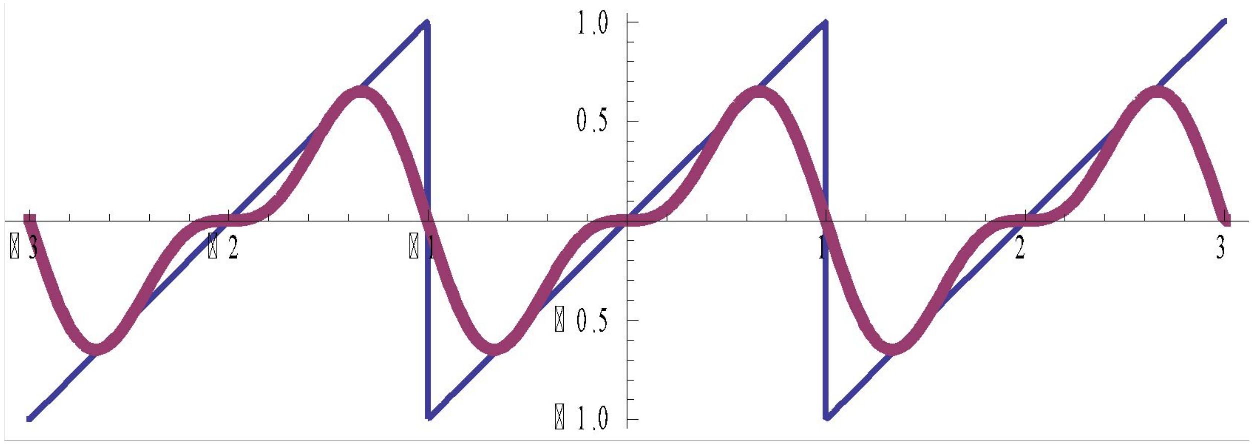
$$B[k = 1 \div 6] = \left\{\frac{2}{\pi}, -\frac{1}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, -\frac{1}{2\pi}, \frac{2}{5\pi}, -\frac{1}{3\pi}\right\}$$

3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

k = 1

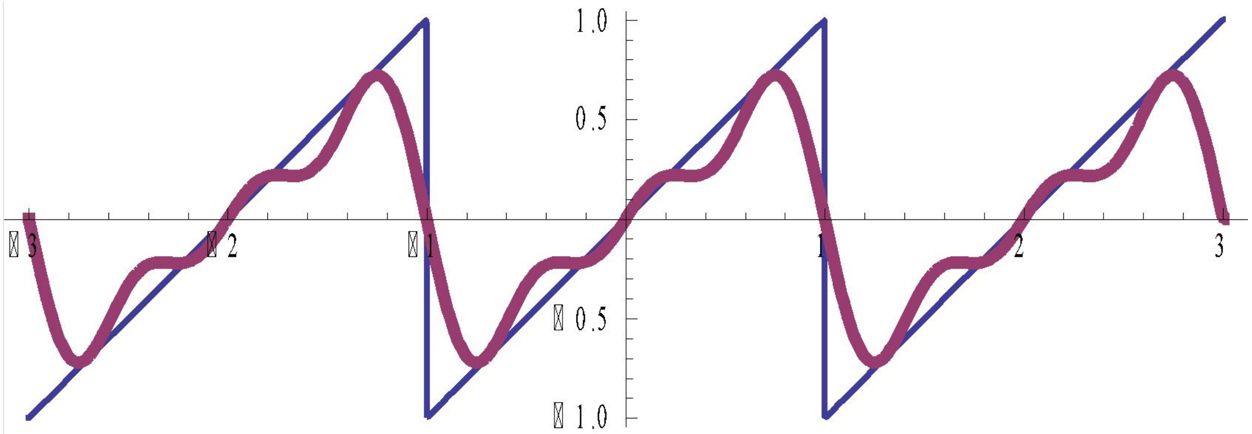


k = 2

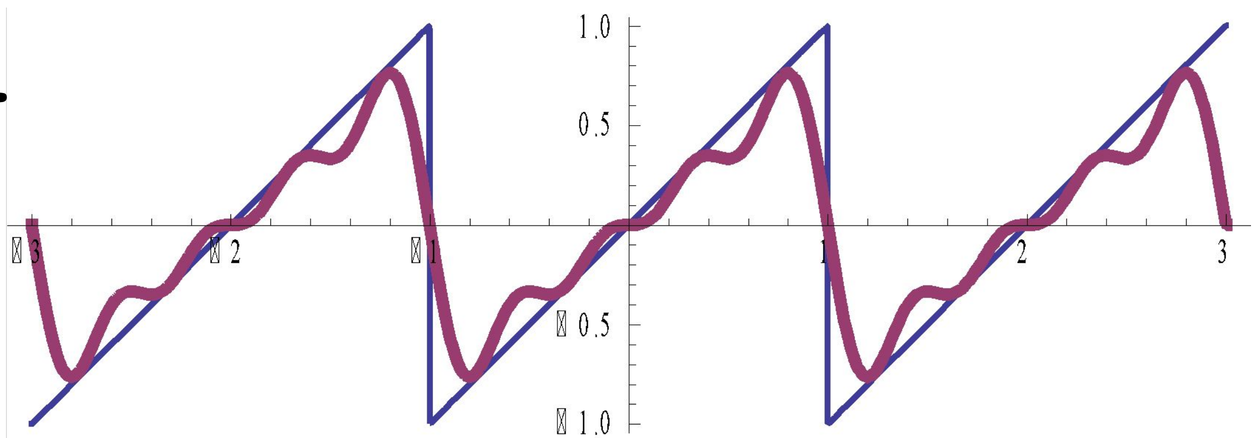


3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

k = 3



k = 4



3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

- Разложим $\boldsymbol{x(t) = t^2}$ на отрезке **[-1, 1]**, принимаем $\boldsymbol{T=2}$. Функция четная, поэтому ряд содержит только cos(·).

$$A_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} t^2 \cos\left(k\frac{2\pi}{2}t\right)dt, \text{в частности } A_0 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$t^2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi t + \frac{1}{\pi^2}\cos 2\pi t - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi t$$

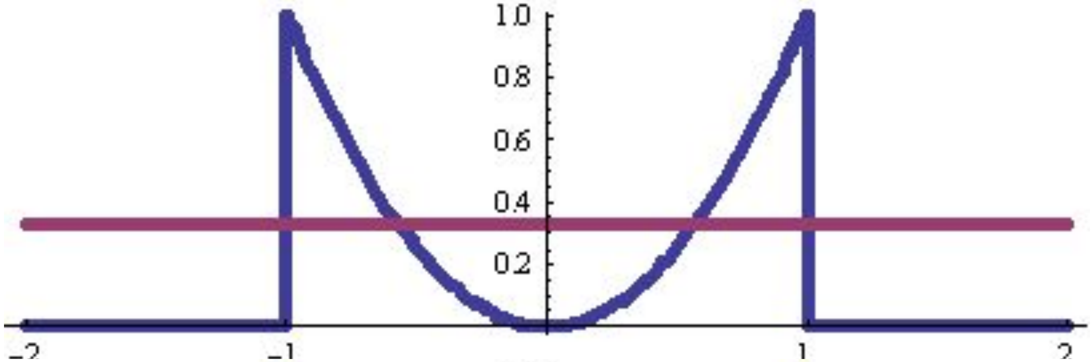
$$+ \frac{1}{4\pi^2}\cos 4\pi t - \frac{4}{25\pi^2}\cos 5\pi t + \ldots$$

3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

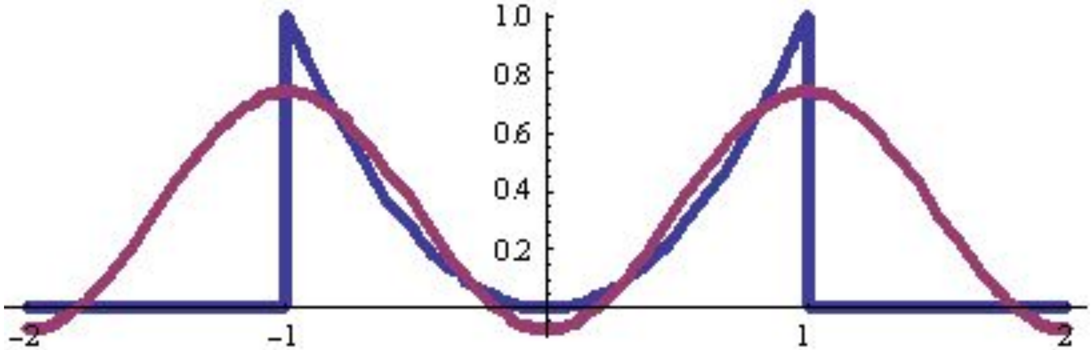
- Ряд Фурье для четной функции **x(t)** = **t**^{2}

на отрезке **[-1,+1]** (то есть, **T=2**):

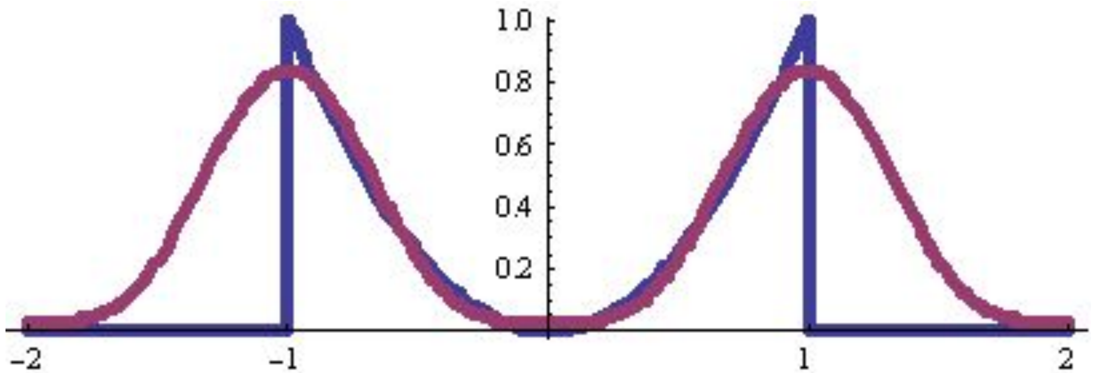
k = 0



k = 1



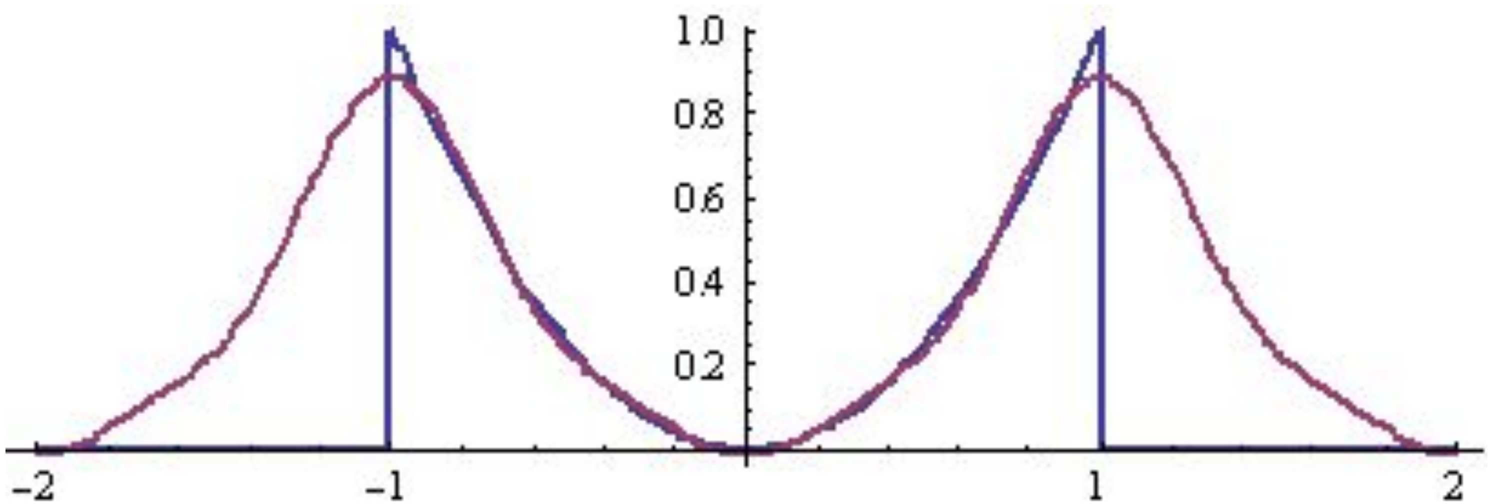
k = 2



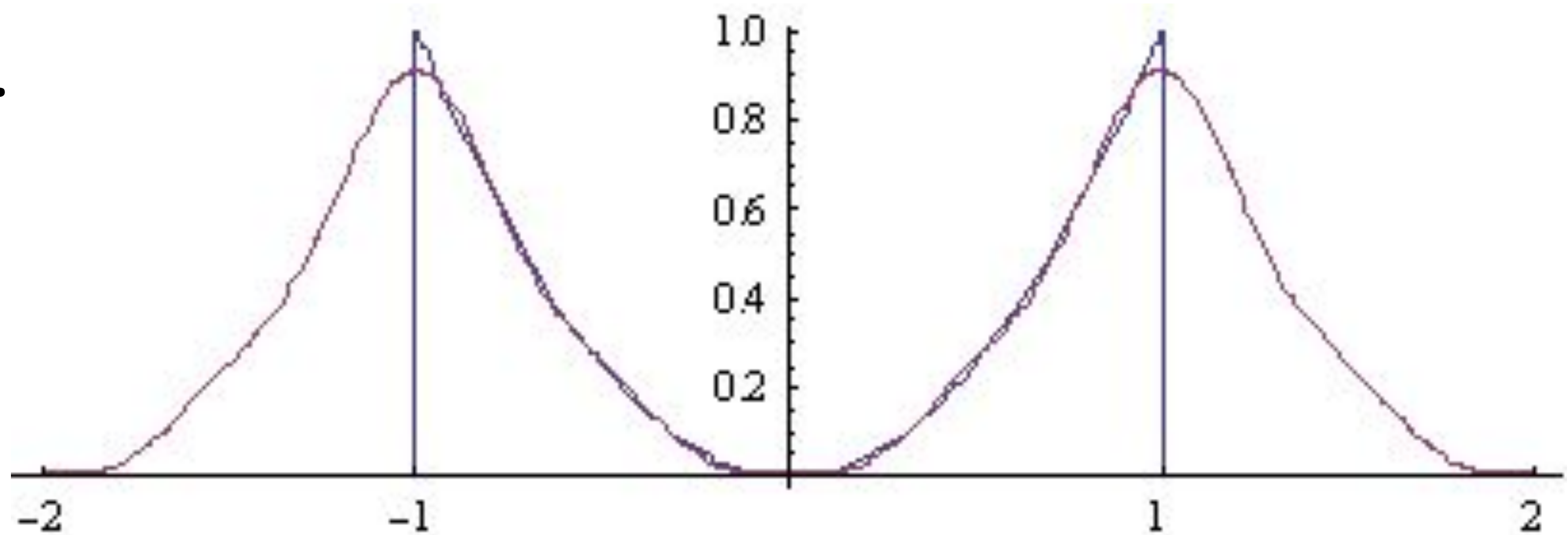
3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

•Ряд Фурье для четной функции **x(t) = t**^{2} **:**

k = 3

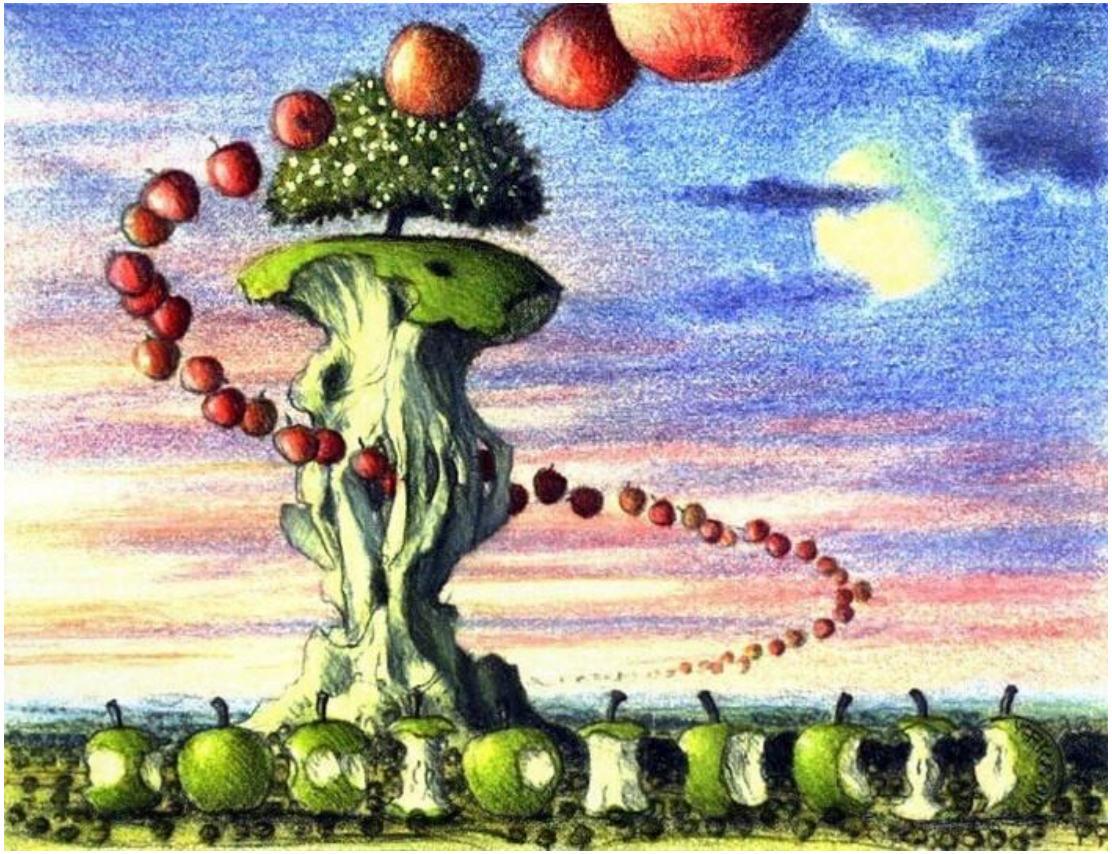


k = 4



3. Коэффициенты разложения в ряд Фурье

- Следует заметить, что для некоторых функций ряд Фурье **расходится**, для некоторых ряд Фурье не сходится к разлагаемой функции, в обоих случаях говорят, что функция не разлагается в ряд Фурье.

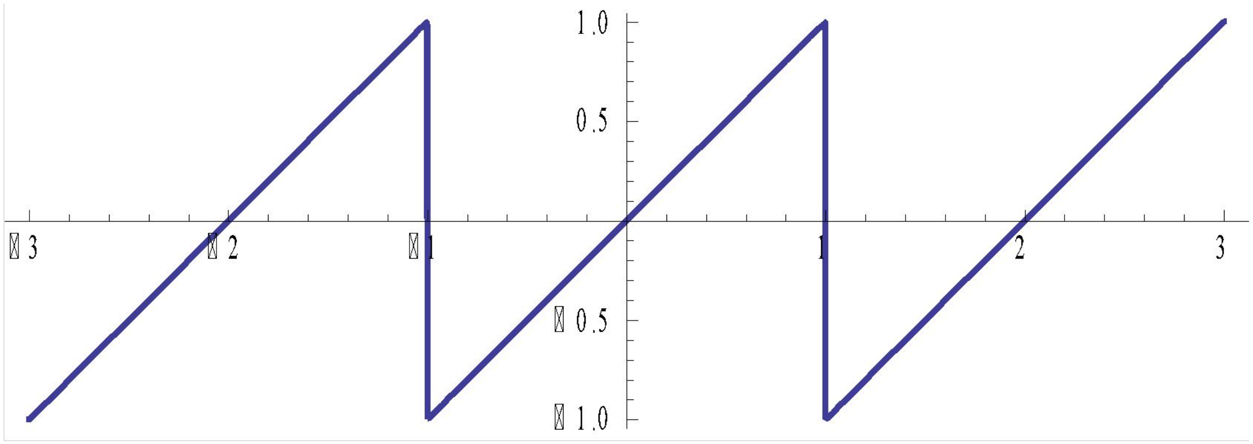


4.Временная и частотные области сигнала

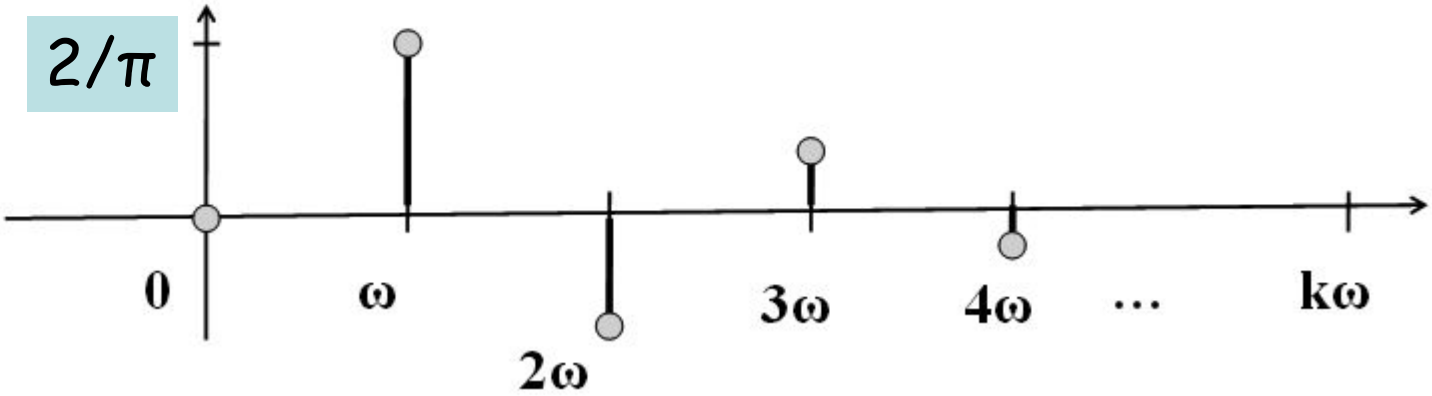
- Сигнал моделируется в виде функции **x(t)**, зависящей от времени **t**. Говорят, что сигнал моделируется во **временной области**. При разложении в ряд Фурье с периодом **T** сигнал представляется в виде ряда от **sin(·)** и **cos(·)** от аргументов **ω**, **2ω**, **3ω**, . . ., где частота
- **ω = 2π/T.**
- Таким образом, сигнал разлагается по функциям с аргументами, содержащими **частоты kω**. Коэффициенты $A_к$ и $B_к$ называются **частотными коэффициентами**. Такое представление сигнала называется представлением в **частотной области**.

- Из представления **x(t)** во временной области разложением в ряд Фурье можно получить представление в частотной области и наоборот (если существует разложение функции ***x(t)*** в ряд Фурье).

4.Временная и частотные области сигнала

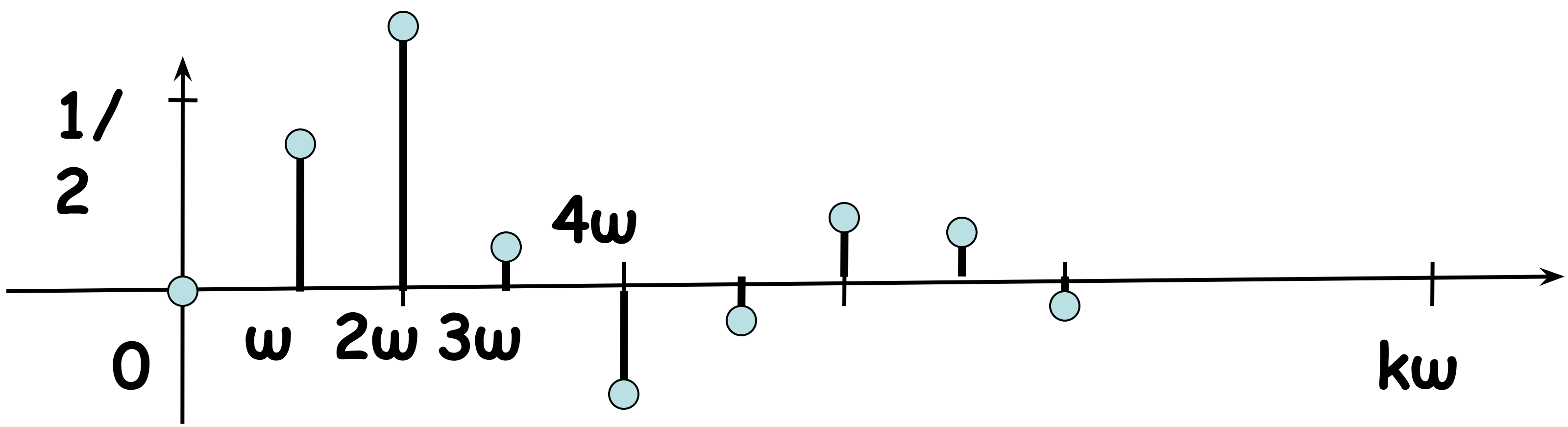


$$B[k=1\div 6]=\left\{\frac{2}{\pi},-\frac{1}{\pi},\frac{2}{3\pi},-\frac{1}{2\pi},\frac{2}{5\pi},-\frac{1}{3\pi}\right\}$$



4.Временная и частотные области сигнала

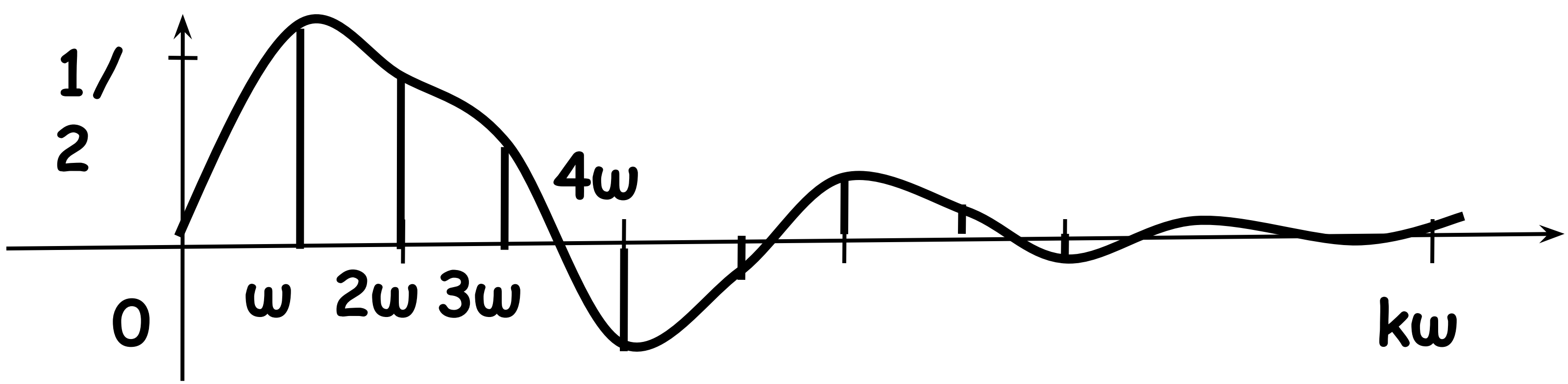
- Если увеличить период **T**, то частота **ω** уменьшится и на график коэффициентов (частотный график) изменится. точки (или отрезки в зависимости от того, как представлены коэффициенты на графике):
- Для разложения «пилы» предыдущего слайда с удвоенным параметром **ω** график частот станет такой:



4.Временная и частотные области сигнала

- Можно и дальше увеличивать период **T**, при $T \to +\infty$ график частот приближается к некоторой кривой.

- Ряд приближается к интегральному преобразованию, это преобразование сигнал в некоторую функцию (частотную функцию):



Это преобразование Фурье исходного сигнала x(t).
Штриховая линия – Фурье-образ сигнала x(t).

3.4. Комплексная форма ряда Фурье

- Известна формула Эйлера, связывающая экспоненту с тригонометрическими функциями.

$$\boldsymbol{e^{i\omega} = \cos\omega + i\ \sin\omega}$$

$$\cos k\omega\, t = \frac{1}{2}\left(e^{k\omega ti} + e^{-k\omega ti}\right)$$

$$\boldsymbol{\sin k\omega t = \frac{1}{2} i\left(e^{-ik\omega t} - e^{ik\omega t}\right)}$$

Заменяя sin() и cos() экспонентами, получаем ряд Фурье в следующем виде:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(A_k - iB_k)\, e^{k\omega ti} + \frac{1}{2}(A_k + iB_k)e^{-k\omega ti}$$

3.4. Комплексная форма ряда Фурье

- Введем новые обозначения

$$C_0 = \frac{1}{2}A_0 \quad C_k = \frac{1}{2}(A_k - iB_k) \quad C_{-k} = \frac{1}{2}(A_k + iB_k)$$

- где C_k и C_{-k} комплексные числа. Запишем ряд Фурье **в комплексной форме**:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} C_k e^{k\omega t i}$$

C_k и C_{-k} комплексно сопряженные числа. Зная один из коэффициентов C_k или C_{-k}, можно найти другой, поменяв знак мнимой части. Это означает, что в комплексной форме достаточно разложить сигнал x(t) только для **k = 0, 1, 2, …** или для **k = 0, -1, -2, …** и изменив знак мнимой части, получить остальные коэффициенты разложения.

3.4. Комплексная форма ряда Фурье

• Множество вещественных чисел

$$\left|C_k\right| = \frac{1}{2}\sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

называется **спектром амплитуд** сигнала.

$$Arg(C_k) = \operatorname{arctg}\frac{B_k}{A_k}$$ - **спектр фаз**

$$|C_k|^2$$ - **спектр мощности** (или **энергии**) сигнала (подробнее рассмотрим при изучении равенства Парсеваля).