Розділ 4

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ. СИСТЕМА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА

LOGO

Зміст

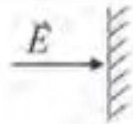
Згадаємо основні базові співвідношення

Таблиця 4.1 Основні співвідношення для електростатики та магнітного поля постійного струму

$q,\rho \rightleftarrows \vec{E},\vec{D}$ $\nwarrow\!\searrow \quad \nearrow\!\swarrow$ φ	$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$ Сила Лоренца	$I,\vec{J} \rightleftarrows \vec{H},\vec{B}$ $\nwarrow\!\searrow \quad \nearrow\!\swarrow$ $\vec{A}$
$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}, \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$	$\sigma = \sigma_{Cu} \sigma_r$ $\sigma_{Cu} = 5{,}7 \cdot 10^7, \dfrac{\text{См}}{\text{м}}$ Закон Ома у диференціальній формі: $\vec{J}_{пр} = \sigma \vec{E}$	$\mu = \mu_r \mu_0$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}, \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$

$\vec{F} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2} \vec{1}_r$, $\vec{F} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^3} \vec{r}$, де $\vec{r} = \vec{1}_r r$	$\vec{F}_м = \dfrac{q_{м1} q_{м2}}{4\pi\mu r^2} \vec{1}_r$ $d\vec{H} = \dfrac{\overrightarrow{Idl}}{4\pi r^2} \times \vec{1}_r$
$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$	$\vec{H} = \dfrac{\vec{F}_м}{q_м}$
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$
$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_\Sigma$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = q_{м\Sigma} = 0$
$div\vec{D} = \rho$	$div\vec{B} = \rho_м = 0$
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_\Sigma$

Продовження таблиці 4.1

$rot\vec{E} = 0$	$rot\vec{H} = \vec{J}$
$\vec{E} = -grad\,\varphi$ $\varphi = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} + C$	$rot\vec{H} = \frac{1}{\mu} rot\vec{A}$
$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{D} dV$	$\int_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S rot\vec{H} \cdot d\vec{S}$
$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$	$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$
$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho}{r} dV$	$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r} dV = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{I}{r} d\vec{l}$
Граничні умови	
$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$	$H_{\tau 1} - H_{\tau 2} = J_{пов}$
$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s$	$B_{n1} = B_{n2}$
Граничні умови, якщо одне з середовищ – *ідеальний провідник* ($E_2 = 0; H_2 = 0; D_2 = 0; B_2 = 0$)	
$E_{\tau 1} = 0$ $E_{n1} \neq 0$ 	$H_{\tau 1} \neq 0$ $H_{n1} = 0$ 
Електрична ємність	Індуктивність
$C = \frac{q}{U}$	$L = \frac{\psi}{I}$
Енергія	
$W_E = \frac{CU^2}{2}$	$W_H = \frac{LI^2}{2}$
$W_E = \int_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} dV = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2} dV$	$W_H = \int_V \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} dV = \int_V \frac{\mu H^2}{2} dV$

4.1 Закон збереження електричного заряду

Електричний струм через замкнуту поверхню *S* – це швидкість зміни кількості заряду *q* в об‘ємі *V*, обмеженому поверхнею *S*.
Для пояснення закону збереження електричного заряду розглянемо модель деякого фізичного тіла, яке має об’єм *V*, обмежений поверхнею *S* (рис.4.1). Нехай це тіло має деякий заряд. Вважаємо, що зі зміною часу відбувається зміна цього заряду. В момент часу t_1 значення заряду - , а в момент t_2 – , та $|q_2| < |q_1|$. Тобто частина зарядів відійшла з цього об’єму, але вони не зникли на основі закону збереження матерії й утворили електричний струм, математично це може бути представлено як похідна за часом:

$$I = -\frac{dq}{dt} \qquad (4.1)$$

Знак “–“ означає, що заряд із зростанням часу зменшується, тобто якщо $t_2 – t_1 = \Delta t > 0$, то $q_1 – q_2 = \Delta q < 0$.

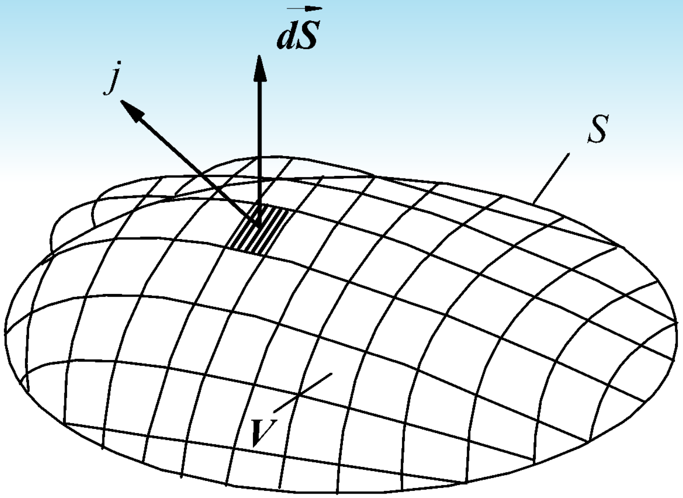


Рисунок 4.1. Модель спливання заряду

Струм через одиницю поверхні називають *густиною струму*:

$$\vec{J} = \frac{dI}{dS}\vec{1}_n \qquad (4.2)$$

де $\vec{1}_n$ - нормаль до площини *dS* .

На підставі (4.1-2) сила струму:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \qquad (4.3)$$

Формула (4.3) показує, що електричний струм можна трактувати як потік зарядів і тому на основі (4.1) та (4.3) маємо:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \qquad (4.4)$$

ормула (4.4) відображає *закон збереження заряду в інтегральній формі:* будь-яка зміна ряду всередині деякого об'єму у часі супроводжується спливанням відповідної кількості рядів через поверхню, що обмежує цей об'єм.

Розглянемо ці ж процеси в конкретній точці об′єму *V* за умов змінення заряду. ористаємось перетворенням Гаусса-Остроградського стосовно (4.4):

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{J}dV \tag{4.5}$$

Використовуючи формули $q = \int \rho dV$, (4.4) та (4.5) маємо:

$$\int_V div\vec{J}dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV \tag{4.6}$$

За умов незмінної поверхні, похідну за часом вважають частинною похідною й з урахуванням, що у виразі (4.6) інтегрування виконується за тією ж змінною є допустимою зміна порядку інтегрування та диференціювання, отримаємо співвідношення:

$$div\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4.7}$$

Рівняння (4.7) описує *закон збереження заряду в диференціальній формі:* дивергенція густини потоку (струму) визначається похідною за часом густини заряду у конкретній точці, з протилежним знаком. Припустимо, що у (4.7), $\rho = const$ тоді $div\vec{J} = 0$ (4.8)

Це співвідношення означає, що алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює 0 , а це є положення *першого закону Кірхгофа*.
Оскільки кількість вільних зарядів у середині об'єму характеризує провідні властивості середовища, то створений цими зарядами струм має назву *струму провідності.*
В розділах 2 та 3 наведені дані щодо електричного та магнітного полів без їх взаємозв'язку, але такий зв'язок вочевидь повинен бути тому, що першоджерелом електричного та магнітного полів є електричний заряд:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \qquad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = -\frac{dq}{dt}$$

Тобто характеристики полів (електричного та магнітного) та їх джерела повинні бути взаємно пов'язані та описані відповідною системою рівнянь. Легко запам'ятати, що їх повинно бути шість, адже вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ в просторі мають по три проекції. Ця система складена Дж. Кларком Максвеллом (1831-1879) в 1873 р. На підставі отриманих раніше законів та положень: Ампера (повного струму), Фарадея, Гаусса-Остроградського та інших.
В роботі Максвелла була складна форма запису рівнянь.
Сучасний вигляд вони набули в працях Г. Герца, Л. Лоренца, О. Хевісайда.

4.2 Перше рівняння Максвелла (закон повного струму або коловий закон Ампера)

Перше рівняння Максвелла базується на законі повного струму:

$$rot\vec{H} = \vec{J}_{np}$$ – диференціальна форма, (4.9),

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{np}$$ – інтегральна форма. (4.10)

Закон повного струму був сформульований за умови існування постійного струму провідності. Чи буде закон повного струму справедливий для змінного струму? Знайдемо дивергенцію від обох частин рівняння (4.9):
За визначенням, дивергенція ротора дорівнює нулю, тобто:

$$div\ rot\vec{H} = 0 \qquad (4.11)$$

Але з іншого боку маємо для змінного струму (4.7), враховуючи, що йдеться про струм провідності:

$$div\vec{J}_{np} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \qquad (4.12)$$

Тобто на підставі формули (4.12) можна зробити висновок, що рівність (4.9) справедлива лише для постійного струму. Щоб цей вираз можна було застосовувати для змінного струму, треба здійснити корегування, що реалізував Д. К. Максвелл. У праву частину (4.9) додамо деякий вектор $\vec{X}$, такий, що в результаті загальний вектор дорівнює ротору вектора напруженості магнітного поля:

$$rot\vec{H} = \vec{J}_{np} + \vec{X} \qquad (4.13)$$

Виконаємо тепер ту ж саму операцію: знайдемо дивергенцію від обох частин рівняння (4.13), та скористаємось тотожністю, що дивергенція ротора вектора напруженості магнітного поля дорівнює нулю:

$$div\ rot\vec{H} = div\left(\vec{J}_{np} + \vec{X}\right) = 0 \tag{4.14}$$

З формули (4.14) випливає, що:

$$div\vec{J}_{np} = -div\vec{X} \tag{4.15}$$

У відповідності із законом збереження заряду з урахуванням (4.7) можна переконатись, що $\rho = div\vec{D}$ й можливістю змінення порядку диференціювання вираз (4.15) можна переписати:

$$div\vec{J}_{np} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial div\vec{D}}{\partial t} = -\frac{div\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{4.16}$$

Звідки маємо

$$div\vec{X} = div\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{4.17}$$

Тобто невідомий вектор $\vec{X}$ має одиницю виміру [А/м^2] й дорівнює:

$$\vec{X} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_{зм} \tag{4.18}$$

Таким чином, величину $\vec{X}$ визначають похідною за часом вектора $\vec{D}$, вона має назву *вектор густини струму зміщення* у діелектрику (введення поняття струму зміщення – велика заслуга Максвелла).
Таким чином перше рівняння Максвелла у диференціальній формі записують таким чином:

$$rot\vec{H} = \vec{J}_{пр} + \vec{J}_{зм} \tag{4.19}$$

Перепишемо рівняння (4.19) інакше:

$$rot\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{4.20}$$

де

$$\sigma\vec{E} = \vec{J}_{пр} \tag{4.21}$$

$$\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_{зм} \tag{4.21a}$$

Формула (4.21) є ***матеріальним рівнянням провідного середовища або законом Ома в диференціальній формі.***
З рівняння (4.19) витікає, що магнітне поле створюється струмами провідності й струмами зміщення. Якщо середовище – ідеальний діелектрик, то струму провідності в ньому немає: $\vec{J}_{пр} = 0$. Тоді формула (4.20) набуває вигляд:

$$rot\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{4.21}$$

З формули (4.19) можна визначити, що вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні. Вектори $\vec{E}$ та $rot\vec{H}$ мають однаковий напрямок, а будь-який вектор та вектор його ротора взаємно перпендикулярні. Додатково проілюструємо це на рис.4.2.

З використанням оператора Гамільтона (вектор ∇ – набла) операцію ротор записують:

$$rot\vec{H} = \nabla \times \vec{H} \tag{4.22}$$

Відповідна графічна побудова стосовно (4.22) та (4.21) наведена на рис. 4.2, звідки випливає, що в однорідному просторі вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні.

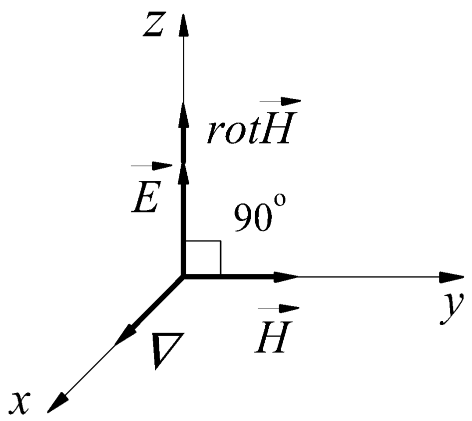


Рисунок 4.2 - Визначення взаємної орієнтації в просторі векторів напруженості магнітного та електричного полів

Перше рівняння Максвелла в диференціальній формі описує зв'язок струму у конкретній точці з проекціями вектора $\vec{H}$. Для того, щоб отримати інтегральну форму, проінтегруємо рівняння (4.18) за поверхнею та отримаємо вираз:

$$\int_S rot\vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_{пр} \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J}_{зм} \cdot d\vec{S} \tag{4.23}$$

З використанням перетворення Стокса $\int\limits_S rot\vec{H}\cdot d\vec{S} = \int\limits_l \vec{H}\cdot d\vec{l}$ отримаємо:

$$\oint\limits_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{пр} + I_{зм} \tag{4.24}$$

Рівняння (4.24) - це *закон повного струму(в англомовній літературі – Ampere's circuital law* – коловий закон Ампера*)* *в інтегральній формі* – перше рівняння Максвелла в інтегральній формі: циркуляція вектора напруженості магнітного поля за замкнутим контуром визначається сумою всіх струмів, які охоплені контуром, тобто струмів провідності $I_{пр}$ та зміщення $I_{зм}$; рівняння (4.18) – у диференціальній формі.

4.3 Друге рівняння Максвелла

Друге рівняння Максвелла представляє закон електромагнітної індукції Майкла Фарадея. Цей закон формулюється таким чином: *якщо провідний замкнутий контур перетинає змінний магнітний потік Ф, то в контурі створюється електрорушійна сила ЕРС, значення якої дорівнює швидкості зміни магнітного потоку, взяте з протилежним знаком:*

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{4.25}$$

Максвелл узагальнив цей закон для довільного контура. Тобто Максвелл припустив, що рівняння (4.25) справедливе також і в тому випадку, якщо середовище не має провідних властивостей.

Магнітний потік *Ф* зв'язаний з величиною магнітної індукції (густиною магнітного потоку) $\vec{B}$ співвідношенням:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{4.26}$$

Одиниця виміру магнітного потоку:

$$\Phi \Rightarrow \left[\frac{В \cdot с}{м^2} \cdot м^2 \right] = [Вб]$$

Якщо провідник має декілька витків, тоді використовують поняття потокозчеплення ψ :

$$\psi = N\Phi ,$$

де N-кількість витків.

Підставимо в формулу (4.25) визначення для магнітного потоку (4.26) та отримаємо:

$$e = -\frac{d\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}{dt} \qquad (4.27)$$

За фізичним змістом *ЕРС* це робота з переміщення заряду з однієї точки в іншу крізь джерело, але цю ж роботу можна уявити як різницю потенціалів, тобто ЕРС можна зв'язати з параметрами електричного поля.

Представимо ЕРС як характеристику роботи, тобто циркуляції вектора $\vec{E}$ по замкнутому контуру *l*:

$$\varphi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (4.28)$$

Перепишемо останнє рівняння з використанням формули для магнітного потоку (4.26) та за умов незмінної площини скористаємось частинною похідною:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}{\partial t} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}. \qquad (4.29)$$

Формула (4.29) визначає друге рівняння Максвелла в інтегральній формі.
Застосуємо до лівої частини (4.29) перетворення Стокса:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S rot\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}. \qquad (4.30)$$

Оскільки в (4.30) інтегрування здійснюється за поверхнею в лівій і правій частинах, то

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad (4.31)$$

або

$$rot\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \qquad (4.31а)$$

Це друге рівняння Максвелла в диференціальній формі.

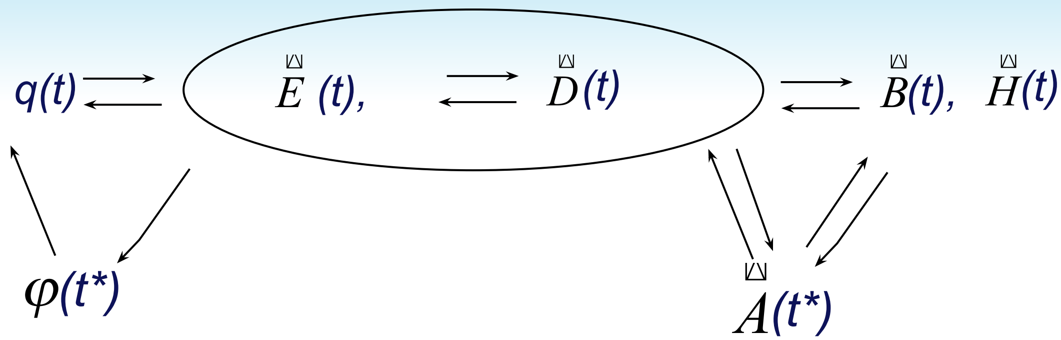
З цих рівнянь можна зробити такі висновки:

– магнітне поле, яке змінюється у часі, створює електричне поле;

– електричне поле, що створюється змінним у часі магнітним полем, має вихровий характер, тобто змінне у часі магнітне поле створює незалежно від параметрів середовища електричне поле таке, що для будь якого довільно вибраного контуру *циркуляція вектора напруженості цього поля дорівнює швидкості зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену цим контуром, взяту зі знаком мінус* (4.29).

4.4 Повна система рівнянь Максвелла

Нагадаємо умовну схему формування єдиного електромагнітного поля, що створюється змінними в часі зарядами та струмами – електричним та магнітним полями:



Де $t^* = t - \frac{r}{v}$ – це параметр, який свідчить, що електричні та магнітні потенціали є такими, що запізнюються (це положення доведено в розділі 4.8).

Струми, що створені зовнішніми джерелами (генераторами) і не залежать від електромагнітного поля, що ними збуджується, називають сторонніми.
Векторні поля густини сторонніх струмів разом з густинами струмів провідності і зміщення повинні знаходитись в правій частині формули закону повного струму.
В таблиці 4.2 перше рівняння Максвелла наведено з урахуванням сторонніх струмів.

Повна система рівнянь Максвелла

Рівняння	Форма		Коментарі
	Диференціальна	Інтегральна	
1. Закон повного струму, або круговий закон Ампера (1-е рівняння)	$rot\vec{H}(t) = \vec{J}_{пр}(t) + \vec{J}_{зм}(t) + \vec{J}_{стор}(t)$ $rot\vec{H}(t) = \sigma\vec{E}(t) + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}(t)}{\partial t} + \vec{J}_{стор}(t)$	$\oint \vec{H}(t)\cdot d\vec{l} = I_{пр}(t) + I_{зм}(t) + I_{стор}(t)$	Закон повного струму – струми різної природи створюють вихрове магнітне поле. Інтегральна форма свідчить, що циркуляція вектора H дорівнює сумі струмів різної природи, які охоплені цим контуром. Змінне у часі електричне поле створює магнітне поле.
2. Закон Фарадея (2-е рівняння)	$rot\vec{E}(t) = -\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\vec{H}(t)}{\partial t}$	$\oint_l \vec{E}(t)\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial\int_S \vec{B}(t)\cdot d\vec{S}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\int_S \vec{H}(t)\cdot d\vec{S}}{\partial t}$	Магнітне поле, яке змінюється у часі, створює вихрове електричне поле.
3. Закон Гауса (3-е рівняння)	$div\vec{D}(t) = div\,\varepsilon\vec{E}(t) = \rho(t)$	$\oint_S \vec{D}(t)\cdot d\vec{S} = q(t)$	Заряд, що змінюється у часі, створює змінне електричне поле. Потік вектора $\vec{D}$ є заряд.

Повна система рівнянь Максвелла (продовження)

4. Закон неперервності силових ліній магнітного поля (4-е рівняння)	$div\vec{B}(t)=0$	$\oint\limits_S \vec{B}(t)\cdot d\vec{S}=q^{\pm}_{м\Sigma}=0,$ де $q_{м\Sigma}$ – сумарний магнітний заряд, який за визначенням дорівнює нулю (розділ 3).	Магнітне поле є вихровим, тобто силові лінії не мають ні початку, ні кінця, тому потік та дивергенція цього поля дорівнюють нулю. У природі вільні магнітні заряди відсутні, проте їх застосовують як модель для аналізу.
5. Перше матеріальне (5-е рівняння)	$\vec{D}(t)=\varepsilon\vec{E}(t)$		Визначають співвідношення напруженості електричного та магнітного полів з вектором електричного зміщення та магнітною індукцією, відповідно, через електродинамічні параметри середовища.
6. Друге матеріальне (6-е рівняння)	$\vec{B}(t)=\mu\vec{H}$		

, або

4.5 Рівняння Максвелла для монохромного коливання (в комплексній формі)

Для здійснення операцій із гармонічними функціями зручно користуватися представленням функцій в комплексній формі.
Нехай маємо гармонічну функцію

$$a(t) = A_m \cos(2\pi f t \pm \psi) \qquad (4.32)$$

В цій формулі три параметра: амплітуда – A_m, частота – f (або колова частота $\omega = 2\pi f$, нагадаємо що $\omega = \frac{2\pi}{T}$), початкова фаза – ψ.

Звісно, виконувати операції з трьома параметрами складніше, ніж з меншою кількістю.
Спробуємо зменшити кількість параметрів.
Скористаємось перетворенням Ейлера

$$e^{\pm j\varphi} = \cos\varphi \pm j\sin\varphi \qquad (4.33)$$

Якщо в (4.33) прийняти до уваги лише дійсну складову $\cos\varphi$, то замість $A_m \cos(\omega t \pm \psi)$ (4.31) можна записати

$$\dot{a}(t) = A_m e^{j\omega t} e^{\pm j\psi}, \quad \text{або} \qquad (4.34)$$

$$\dot{a}(t) = A_m e^{\pm j\psi} e^{j\omega t} = \dot{A}_m e^{j\omega t}$$

де $\dot{A}_m$ – комплексна амплітуда $A_m e^{\pm j\psi}$.

В зв‘язку з тим, що в лінійній системі кількість гармонічних складових не змінюється, можна вважати, що комплексна амплітуда розміщена на площині, що “обертається” з коловою частотою ω, тобто для здійснення операцій достатньо мати комплексну амплітуду, яка містить інформацію лише за двома параметрами (амплітуда та початкова фаза). Більш того, здійснювати математичні операції зручніше, якщо мати справу з експоненціальною функцією, показники якої додаються або віднімаються, замість операцій множення та ділення тригонометричних функцій, також полегшуються операції диференціювання (інтегрування), для чого достатньо помножити (розділити) на $j\omega$.

Для повернення до миттєвих значень після операцій з комплексною величиною достатньо визначити дійсну частину комплексної величини.

$$a(t) = Re\left\{\dot{a}(t)\right\} \tag{4.35}$$

Запишемо перше рівняння Максвелла, для гармонічного поля (без сторонніх струмів) в комплексній формі:

$$rot\,\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t} = \sigma\,\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} + \varepsilon\frac{\partial\,\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}}{\partial t} = \sigma\,\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} + j\omega\varepsilon\,\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} \tag{4.36}$$

Скоротивши множники $e^{j\omega t}$ в рівнянні (4.37) маємо:

$$rot\,\dot{H}_m = \sigma\,\dot{E}_m + j\omega\varepsilon\,\dot{E}_m \qquad (4.37)$$

Якщо винести за дужки загальний множник $\dot{E}_m$ та $j\omega$, рівняння (4.37) матиме такий вигляд:

$$rot\,\dot{H}_m = j\omega\,\dot{E}_m\left(\frac{\sigma}{j\omega} + \varepsilon\right) \qquad (4.38)$$

де вираз в дужках – це комплексна діелектрична проникність:

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \qquad (4.39)$$

Перевіримо одиницю виміру $j\frac{\sigma}{\omega} \Rightarrow \left[\frac{См\cdot c}{м}\right] = \left[\frac{Ф}{м}\right]$, тобто таж сама, як для діелектричної проникності.

Формула (4.39) – має глибокий фізичний зміст – в ній присутня складова, яка характеризує провідні властивості $\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)$, та складова, яка характеризує діелектричні властивості середовища (ε) й частота (ω).

Значення частоти (ε) впливає на співвідношення доданків (ε) та (σ), тобто вона визначає співвідношення між значеннями $\dot{J}_{пр}$ та $\dot{J}_{зм}$. А це свідчить про те, що навіть за умов незмінних електродинамічних параметрів одне і теж середовище, в залежності від частоти може характеризуватися різними властивостями, тобто бути провідним, діелектричним або напівпровідним (діелектриком з втратами) (див. п. 4.6).

На підставі (4.34) за аналогією перепишемо всі рівняння Максвелла у комплексному представленні; для диференціальної форми – також з використанням оператора Гамільтона (набла) (табл. 4.3):

$\dot{\vec{B}}_m = \mu \dot{\vec{H}}_m$

Система рівнянь Максвелла в комплексній формі

Рівняння	Диференціальна форма	Інтегральна форма
перше	$rot\,\dot{\vec{H}}_m = \sigma\,\dot{\vec{E}}_m + j\omega\varepsilon\,\dot{\vec{E}}_m$, або $\nabla \times \dot{\vec{H}}_m = \sigma\,\dot{\vec{E}}_m + j\omega\varepsilon\,\dot{\vec{E}}_m$	$\oint \dot{\vec{H}}_m \cdot d\vec{l} = \dot{I}_{m\,пр} + \dot{I}_{m\,зм}$, $\oint \dot{\vec{H}}_m \cdot d\vec{l} = \int \dot{\vec{J}}_{m\,пр} \cdot \vec{dS} + \int \dot{\vec{J}}_{m\,зм} \cdot \vec{dS}$
друге	$rot\,\dot{\vec{E}}_m = -j\omega\,\dot{\vec{B}}_m$, $rot\,\dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu\,\dot{\vec{H}}_m$, або $\nabla \times \dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu\,\dot{\vec{H}}_m$	$\oint_l \dot{\vec{E}}_m \cdot d\vec{l} = -j\omega\Phi_m$, $\oint_l \dot{\vec{E}}_m \cdot d\vec{l} = -j\omega\int \dot{\vec{B}}_m \cdot d\vec{S}$, $\oint_l \dot{\vec{E}}_m \cdot d\vec{l} = -j\omega\mu\int \dot{\vec{H}}_m \cdot d\vec{S}$
третє	$div\,\dot{\vec{D}}_m = div\varepsilon\,\dot{\vec{E}}_m = \dot{\rho}_m$, або $\nabla \cdot \dot{\vec{D}}_m = \dot{\rho}_m$	$\oint_S \dot{\vec{D}}_m \cdot d\vec{S} = \dot{q}_m$, $\oint_S \dot{\vec{E}}_m \cdot d\vec{S} = \frac{\dot{q}_m}{\varepsilon}$
четверте	$div\,\dot{\vec{B}}_m = 0$, або $\nabla \cdot \dot{\vec{B}}_m = 0$	$\oint \dot{\vec{B}}_m \cdot d\vec{S} = q_{mм}^{\pm} = 0$
п‘яте	$\dot{\vec{D}}_m = \varepsilon\,\dot{\vec{E}}_m$	
шосте	$\dot{\vec{B}}_m = \mu\,\dot{\vec{H}}_m$	

4.6 Класифікація середовищ за провідністю

Середовища розрізняють за провідністю на підставі співвідношення між значеннями струмів (густини струмів) провідності $J_{пр}$ та зміщення $J_{зм}$:

– якщо $J_{пр} \rangle\rangle J_{зм}$ – провідне середовище, (4.40),

– якщо $J_{пр} \langle\langle J_{зм}$ – діелектричне середовище, (4.41).

Якщо $J_{пр}$ та $J_{зм}$ мають порівняльні значення, середовище можна вважати напівпровідним, або діелектричним з втратами.

Звернемось до першого рівняння Максвелла:

$$rot\,\dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{J}}_{m\,пр} + \dot{\vec{J}}_{m\,зм} \qquad (4.42)$$

Після заміни $J_{пр}$ та $J_{зм}$ маємо відповідно з (4.21) та (4.21а)

$$rot\,\dot{\vec{H}}_m = \sigma\,\dot{\vec{E}}_m + j\omega\varepsilon\,\dot{\vec{E}}_m \qquad (4.43)$$

Після винесення за дужки $j\omega\,\dot{\vec{E}}_m$ маємо

$$rot\,\dot{\vec{H}}_m = j\omega\,\dot{\vec{E}}_m\left(\frac{\sigma}{j\omega} + \varepsilon\right) \qquad (4.44)$$

або

$$rot\,\dot{\vec{H}}_m = j\omega\,\dot{\vec{E}}_m\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right) \qquad (4.44а)$$

З формул (4.42)…(4.44а) робимо висновок, що значення струму провідності визначає доданок в дужках $j\frac{\sigma}{\omega}$, значення густини струму зміщення – ε, тобто від співвідношення між ними залежить характер середовища.

Звертаємо увагу, що в першому доданку є параметр ω, тобто значення колової частоти впливає на співвідношення між $J_{пр}$ та $J_{зм}$.

Частота, за якої вони однакові (діелектрик з втратами) має назву гранична частота

$$\omega_{гр} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad (4.45)$$

Якщо

$$\omega\langle\langle\omega_{гр} \quad \text{– середовище, ближче до провідного;} \qquad (4.46)$$

$$\omega\rangle\rangle\omega_{гр} \quad \text{– середовище, ближче до діелектричного.} \qquad (4.47)$$

З першого рівняння Максвелла також випливає, що модуль просторового вектора $\left|\dot{J}_{пр}\right|$ за фазою (на комплексній площині) співпадає з модулем просторового вектора $\left|\dot{E}\right|$, а $\left|\dot{J}_{зм}\right|$ зсунутий на $\pi/2$ (рис.4.3).

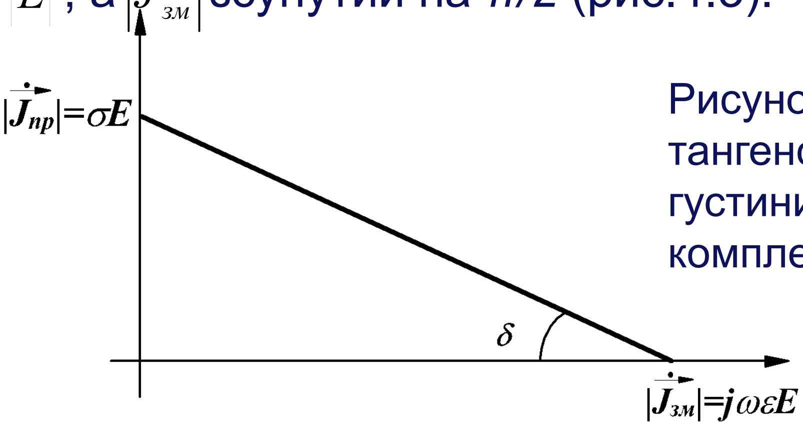


Рисунок 4.3 Ілюстрація фізичного змісту тангенса кута діелектричних втрат. Модулі густини струмів провідності та зміщення на комплексній площині.

Кут δ в трикутнику має назву *кут діелектричних втрат*. Його тангенс:

$$tg\delta = \frac{J_{пр}}{J_{зм}} = \frac{\sigma E}{|j\omega\varepsilon E|} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \qquad (4.48)$$

залежить від параметрів середовища σ, ε та частоти.
Для ідеальних діелектриків $tg\delta \to 0$; для радіочастот вважають, що середовище можна вважати діелектриком, якщо $tg\delta < 10^{-3}...10^{-4}$.

4.7 Принцип переставної двоїстості

Геометрична схожість силових ліній магнітного та електричного полів на рис. 4.4 й відповідно дуальність двох перших рівнянь Максвелла

$$rot\, \dot{\vec{H}}_m = j\omega\varepsilon\, \dot{\vec{E}}_m \tag{4.49}$$

$$rot\, \dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu\, \dot{\vec{H}}_m$$

які переходять одне в інше за умови заміни

$$\dot{\vec{E}}_m \Leftrightarrow \dot{\vec{H}}_m, \varepsilon \Leftrightarrow -\mu$$

дають підставу для обґрунтування принципу переставної двоїстості.

Практичне значення принципу переставної двоїстості полягає в тому, що для вирішення задач електродинаміки можливі відповідні заміни, тобто якщо відоме рішення будь-якої електродинамічної задачі в одній формі перестановка дозволяє отримати рішення в іншій формі.

Принцип переставної двоїстості полягає в замінах:

$$E \Leftrightarrow H, \varepsilon \Leftrightarrow -\mu$$

$$J \Leftrightarrow -J_м, I \Leftrightarrow -I_м$$

$$\rho \Leftrightarrow -\rho_м, J_{стор} \Leftrightarrow -J_{стор\ м} \tag{4.50}$$

Прикладом використання принципу переставної двоїстості є отримання характеристик електромагнітного поля магнітного елементарного випромінювача із характеристик електричного елементарного випромінювача (див. п. 7.2).

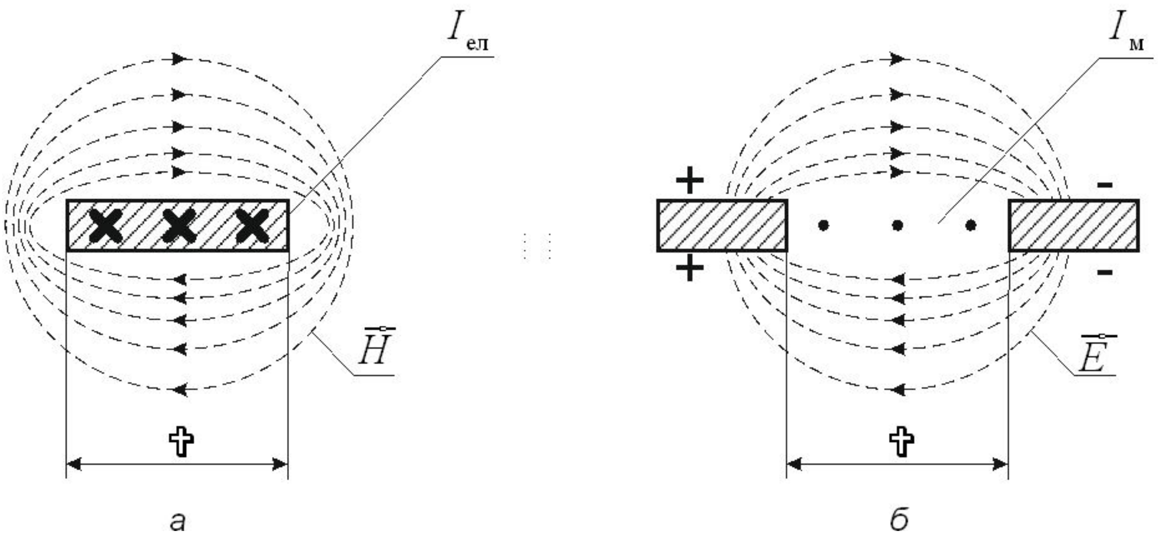


Рисунок 4.4 Ілюстрація до рунтування принципу переставної двоїстості.
Силові лінії: а – магнітного, б – електричного полів

Розглянемо більш докладно рис. 4.4. На рис. 4.4а показані *магнітні силові* лінії, що виникають поблизу тонкої смуги шириною Δ, по якій протікає електричний струм $I_{ел}$. Силові лінії поблизу провідника дещо повторюють його контур, але в процесі віддалення вони поступово деформуються та перетворюються в коло.

На рис. 4.4б зображена картина силових ліній *електричного поля* в системі з двох заряджених металевих напівплощин, які розподілені зазором шириною Δ. З точністю до напряму стрілок у верхньому та нижньому напівпросторах ця картина тотожна тій, що розглянута вище.

4.8 Явище затримання електродинамічних потенціалів

Функцією, що полегшує вирішувати задачі електродинаміки, є потенціал. Нагадаємо, що в електростатиці формула для потенціалу має вигляд (4.51):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho}{r} dV \tag{4.51}$$

а для магнітного поля постійного струму (4.51) має вигляд:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{J}}{r} dV \tag{4.52}$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, відстань від джерела до точки спостереження, у декартовій системі координат.

Останні рівняння отримані в результаті розв'язування рівняння Пуассона для електростатики та магнітного поля постійного струму відповідно:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4.53}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_{np} \tag{4.54}$$

де $\nabla^2 \equiv \Delta$- оператор Лапласа (лапласіан).

З іншого боку:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -grad\varphi \qquad (4.55)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} rot\vec{A} \qquad (4.56)$$

Спробуємо визначити функцію $\vec{A}$, якщо струм і заряд змінні в часі. Нагадаємо витоки появи вектора $\vec{A}$. З векторного аналізу відомо: якщо $div\vec{B} = 0$ – існує деякий вектор, ротор якого дорівнює вихідному, тобто $rot\vec{A} = \vec{B}$ (див. п. 3.3).

Таким чином, якщо відомі φ (4.51) та $\vec{A}$ (4.52), можна знайти $\vec{E}$ (4.55) та $\vec{H}$

$$rot\vec{E}(t) = -\mu\frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t}, \qquad (4.57)$$

$$rot\vec{E}(t) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mu} rot\vec{A}(t)\right) \qquad (4.58)$$

$$grad\psi(t) = \vec{E}(t) + \frac{\partial \vec{A}(t)}{\partial t}. \qquad (4.59)$$

$$rot\vec{H}(t) = \vec{J}_{\text{пр}}(t) + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}. \qquad (4.60)$$

$$rot\vec{H}(t) = \vec{J}_{пр}(t) + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}. \quad (4.61)$$

Замінимо $\vec{H}(t)$ та $\vec{E}(t)$

$$rot\left(\frac{1}{\mu} rot\vec{A}(t)\right) = \vec{J}_{пр}(t) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(grad\varphi(t) + \frac{\partial \vec{A}(t)}{\partial t}\right). \quad (4.62)$$

$$\nabla^2 \vec{A}(t) - \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{A}(t)}{\partial t} - grad\left(\frac{\varepsilon\mu\partial\varphi(t)}{\partial t} + div\vec{A}(t)\right) = -\mu\vec{J}_{пр}(t). \quad (4.63)$$

Припустимо, що:

$$\varepsilon\mu \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} + div\vec{A}(t) = 0. \quad (4.64)$$

Це співвідношення називають *калібрувальним перетворюванням Лоренца*.

$$\nabla^2 \vec{A}(t) - \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{A}(t)}{\partial t} = -\mu\vec{J}_{пр}(t). \quad (4.65)$$

Тепер встановимо зв'язок потенціалу φ з джерелом через густину заряду ρ.

Для цього у третє рівняння Максвелла: $div\vec{D}(t)=\rho(t)$, (4.66)

$$div\left(\frac{\partial\vec{A}(t)}{\partial t}+grad\varphi(t)\right)=-\frac{\rho(t)}{\varepsilon}. \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}div\vec{A}+div\,grad\varphi(t)=-\frac{\rho(t)}{\varepsilon}. \quad (4.68)$$

$$\nabla^2\varphi(t)=-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial t^2}=-\frac{\rho(t)}{\varepsilon} \quad (4.69)$$

Запишемо лапласіан у сферичній системі координат:

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \quad (4.70)$$

Після перетворень маємо рівняння: $$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} r \qquad (4.71)$$

формула (4.71) – *хвильове рівняння* – це неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку в частинних похідних.

Нехай $\rho = 0$, тоді (4.71) трансформується в однорідне рівняння:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.72)$$

$$v(t) = \varphi_1\left(t - \frac{r}{\mathrm{v}}\right) + \varphi_2\left(t + \frac{r}{\mathrm{v}}\right) \qquad (4.73)$$

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_1\left(t - \frac{r}{\mathrm{v}}\right)}{r} + \frac{\varphi_2\left(t + \frac{r}{\mathrm{v}}\right)}{r} \qquad (4.74)$$

Хвильові процеси φ_1 і φ_2 поширюються зі швидкістю v, або c – у вільному просторі, в протилежних напрямах із однаковими значеннями незалежно від просторових кутів в усіх фіксованих точках r.

Таким чином, розв'язок (4.74) описує дві сферичні хвилі, одна з яких «виходить» із випромінювача у нескінченність, а друга – «повертається». На рис. 4.5 *обвідна* другої хвилі показана як відбита (зворотна, або вторинна) від границі розподілу середовищ.

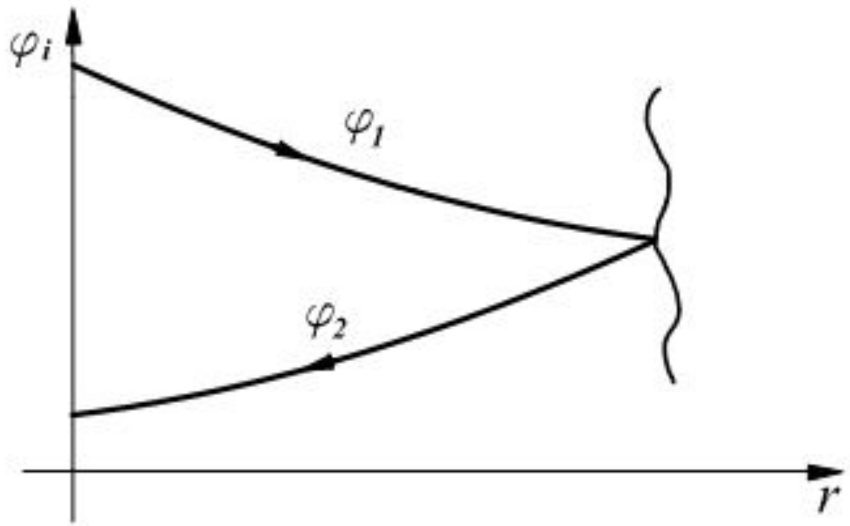


Рисунок 4.5. Обвідні прямої та відбитої хвиль

$$\varphi(t)=\frac{\varphi_1\left(t-\frac{r}{\mathrm{v}}\right)}{r} \tag{4.75}$$

$$\varphi_1\left(t-\frac{r}{\mathrm{v}}\right)=\frac{q\left(t-\frac{r}{\mathrm{v}}\right)}{4\pi\varepsilon} \tag{4.76}$$

Таким чином, потенціал $\varphi(t)$ зареєстрований на відстані r, в момент часу t визначають значенням заряду q, який передує спостереженню, тобто у момент часу $\left(t-\frac{r}{\mathrm{v}}\right)$. Тому потенціал $\varphi(t)$ називають *затриманим* на $t'=\frac{r}{\mathrm{v}}$. Тобто «наслідок» затримано відносно «причини», що збуджує процес.

$$\varphi(t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho\left(t-\frac{r}{\mathrm{v}}\right)}{r}dV \tag{4.77}$$

Аналогічно для векторного магнітного потенціалу

$$\vec{A}(t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(t-\frac{r}{V})}{r}dV. \tag{4.78}$$

Для гармонічних процесів зручно користуватися комплексною формою функцій

$$\rho\left(t-\frac{r}{\mathrm{v}}\right)=\rho_m\cos\omega\left(t-\frac{r}{\mathrm{v}}\right). \qquad (4.79)$$

У комплексній формі:

$$\dot{\rho}\left(t-\frac{r}{\mathrm{v}}\right)=\dot{\rho}_m e^{-j\beta r}\cdot e^{-j\omega t}, \qquad (4.80)$$

де $\beta=\frac{2\pi}{\lambda}$ – коефіцієнт фази, λ – довжина хвилі.

У комплексній формі електричний *затриманий потенціал*, є таким:

$$\dot{\varphi}_m(t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\dot{\rho}e^{-j\beta r}}{r}dV, \qquad \mathbf{(4.81)}$$

– векторний магнітний *затриманий потенціал*, є таким:

$$\dot{\vec{A}}(t)=\frac{\mu}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\dot{\vec{J}}_m e^{-j\beta r}}{r}dV. \qquad \mathbf{(4.82)}$$

Множник $e^{-j\beta r}$ – характеризує затримання за часом «наслідків» φ та $\vec{A}$ від «причин», відповідно ρ та $\vec{J}$.

Таким чином, в динамічному режимі *електричний* та *магнітний векторний потенціали є затриманими.*

4.9 Висновки

1. Будь-яка зміна заряду у часі в середині будь якого об'єму супроводжується спливанням саме такої кількості заряду через поверхню, яка обмежує цей об'єм (принцип збереження заряду).
2. Змінний струм, на відміну від постійного струму (який має вихровий характер) допускає розрив кондуктивного кола (ланки).
3. Для опису процесів в діелектриках введено поняття струму зміщення.
4. Для складання чіткої системи рівнянь, на основі яких вирішуються всі задачі електродинаміки використані базові закони та положення, які об'єднані в систему рівнянь Максвелла.
5. В диференціальній та інтегральній формах перше рівняння Максвелла являє собою закон повного струму для провідного і непровідного середовищ (коловий закон Ампера), з якого випливає, що змінне електричне поле створює – змінне магнітне:

– $rot\vec{H} = \vec{J}_{пр}(t) + \vec{J}_{зм}(t) = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ – диференціальна форма;

– $\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{пр}(t) + I_{зм}(t)$ – інтегральна форма.

6. Друге рівняння Максвелла $rot\vec{E}(t) = -\mu\frac{\partial\vec{H}(t)}{\partial t}$ (диференціальна форма) – закон електромагнітної індукції Фарадея; $\int\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t}\int\vec{B}\cdot d\vec{S}$ – інтегральна форма, з якого випливає, що змінне магнітне поле створює змінне електричне.

7. Третє рівняння Максвелла $div\vec{D}(t) = \rho(t)$ (диференціальна форма) – закон Гаусса-Остроградського інтегральна форма – $\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = q(t)$

8. Четверте рівняння Максвелла показує, що магнітне поле має вихровий характер (сумарний магнітний заряд дорівнює нулю).

$div\vec{B}(t) = 0$ – диференціальна форма,

$\int_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = 0$ – інтегральна форма.

9. Рівняння п'яте і шосте показують зв'язок векторів з параметрами середовища – $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, тобто це, так звані, перше та друге матеріальні рівняння.

10. Рівняння Максвелла свідчать, що електричне $\vec{E}(t)$ і магнітне $\vec{H}(t)$ поля , існують у взаємному зв'язку і утворюють єдине електромагнітне поле. Ці вектори у просторі зсунуті на 90° (в однорідному ізотропному середовищі).

11. Якщо поле є гармонічним, зручно використовувати представлення величин, у комплексній формі.

12. Якщо використовують комплексну форму представлення величин, із першого рівняння Максвелла випливає величина – комплексна діелектрична проникність $\dot{\varepsilon}$.

13. З аналізу величини $\dot{\varepsilon}$ випливає, що характер середовища залежить від частоти електромагнітного поля, де $\omega_{гр}=\sigma/\varepsilon$:

14. Якщо $\omega \langle\langle \omega_{гр}$ - середовище ближче до провідного; якщо $\omega >> \omega_{гр}$ – до діелектричного.
15. Для оцінки провідних та діелектричних властивостей середовищ використовують поняття тангенс кута втрат: $tg\delta = \sigma / \omega\varepsilon$.
16. З рівнянь Максвелла та порівняння картин поля можна сформулювати принцип переставної двоїстості, який полягає у можливості заміни у відповідних системах рівнянь: $\vec{E} \Leftrightarrow \vec{H}$; $\mu \Leftrightarrow -\varepsilon$; $I_м = -I$; $\rho_м = -\rho$, $\vec{J}_м = -\vec{J}$.
17. Розгляд електромагнітних процесів показує, що потенціали електричний $\varphi(t - r/\mathrm{v})$ та векторний магнітний $\vec{A}(t - r/\mathrm{v})$ запізнюються у часі відносно причини, яка їх створила.

4.10. Контрольні питання та завдання

1. Докладно проаналізуйте всі формули електростатики та магнітного поля постійного струму, як основи для формування системи рівнянь Максвелла.
2. Обґрунтуйте закон *збереження електричного заряду* в диференціальній формі.
3. Обґрунтуйте та доведіть існування *струму зміщення*.
4. Сформулюйте та поясніть перше рівняння Максвелла в інтегральній та диференціальній формах.
5. Сформулюйте та поясніть друге рівняння Максвелла в інтегральній та диференціальній формах.
6. Сформулюйте та поясніть третє рівняння Максвелла в інтегральній та диференціальній формах.
7. Сформулюйте та поясніть четверте рівняння Максвелла в інтегральній та диференціальній формах.
8. Охарактеризуйте та поясніть сутність п’ятого та шостого рівнянь Максвелла.
9. Поясніть доцільність представлення та застосування системи рівнянь Максвелла в *комплексній формі*.
10. Визначте та поясніть сутність комплексній діелектричної проникності. Наведіть приклади застосування.
11. Обґрунтуйте класифікацію середовищ за провідністю.
12. Поясніть сутність поняття «*кут діелектричних втрат*».
13. Обґрунтуйте принцип *переставної двоїстості*.
14. Поясніть сутність понять «*затримані електродинамічні потенціали*».
15. Наведіть формули електродинамічних потенціалів у комплексній формі.