Лекція 9

Цифрова електроніка. Складання логічних функцій

Логічні змінні та логічні елементи

Пристрої, для яких вхідні та вихідні сигнали є дискретними величинами, називаються ***цифровими*** (або ***імпульсними***), а галузь, що вивчає принципи побудови і функціонування цифрових схем – ***цифровою схемотехнікою.***

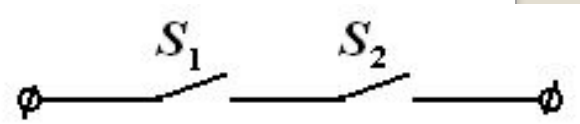
Принципи побудови цифрових пристроїв базуються на багатократному повторенні відносно простих базових логічних схем. Зв’язки між цими схемами будуються на основі чисто формальних методів. Інструментом такої побудови є ***двійкова*** або ***булева алгебра***, яка стосовно цифрової схемотехніки зветься ***алгеброю логіки***.

На відміну від змінної у звичайній алгебрі, логічна змінна алгебри логіки приймає лише два значення, які звичайно називають ***логічним нулем*** ("0") та ***логічною одиницею*** ("1").

Основні логічні функції алгебри логіки

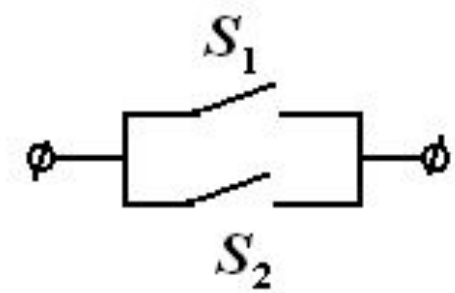
Кон’юнкція (логічне **І** або логічне множення)

$$y = x_1 \cap x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$



Диз’юнкція (логічне **АБО** або логічне додавання)

$$y = x_1 \cup x_2 = x_1 + x_2 = x_2 + x_1$$



Інверсія (логічне **НЕ**)

$$y = \overline{x}$$

Стосовно логічних операцій справедливі наступні теореми

Комутативність

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$$

Асоціативність

$$x_1(x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2)x_3$$

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$$

Дистрибутивність

$$x_1(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$$

$$x_1 + x_2x_3 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)$$

Правило склеювання

$$x_1(x_1 + x_2) = x_1$$

Правило повторення $x \cdot x = x, \quad x + x = x$

Правило заперечення $x \cdot \overline{x} = 0, \quad x + \overline{x} = 1$

Правило подвійного заперечення $(\overline{\overline{x}}) = x$

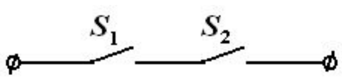
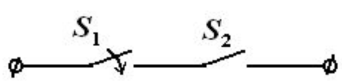
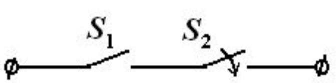
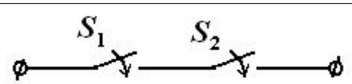
Теорема де Моргана $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}\ , \quad \overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

Операції з 0 та 1 $x \cdot 1 = x,\ x \cdot 0 = 0,\ \overline{0} = 1$

$x + 1 = 1,\ x + 0 = x,\ \overline{1} = 0$

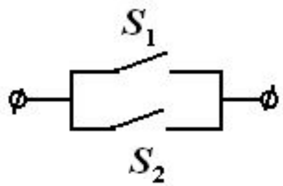
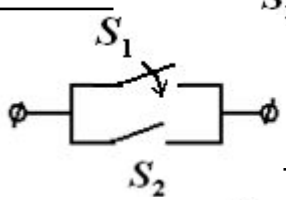
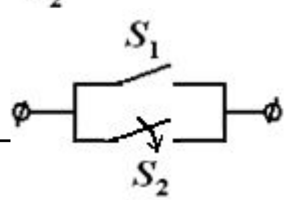
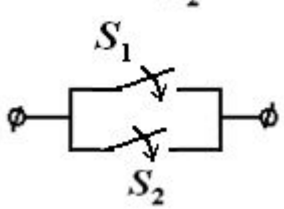
Таблиця істинності елементів І, АБО

x_1	x_2	Логічне **І**	Логічне **АБО**
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

	x_1=0 , x_2=0	Струм не протікає – y=0
	x_1=1 , x_2=0	Струм не протікає – y=0
	x_1=0 , x_2=1	Струм не протікає – y=0
	x_1=1 , x_2=1	Струм протікає – y=1

Таблиця істинності елементів I, АБО

x_1	x_2	Логічне **I**	Логічне **АБО**
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

 	$x_1=0$, $x_2=0$	Струм не протікає – $y=0$
 	$x_1=1$, $x_2=0$	Струм не протікає – $y=0$
 	$x_1=0$, $x_2=1$	Струм не протікає – $y=0$
 	$x_1=1$, $x_2=1$	Струм протікає – $y=1$

Можлива наступна реалізація логічного "0" та логічної "1" – використання різних рівнів електричної напруги: високого та низького.

Ці рівні характеризуються тим, що напруга може бути або більше деякого заданого значення U_H, або меншою заданого значення U_L, причому $U_L<U_H$.

Якщо напруга перевищує U_H, то кажуть про високий рівень напруги (схема знаходиться у стані *H – High*) – стан логічної "1", а якщо напруга менше U_L, то схема знаходиться в стані логічного "0" (стан *L – Low*).

Система позначень : H=1, L=0 називається ***позитивною логікою.***

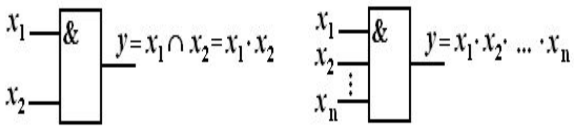
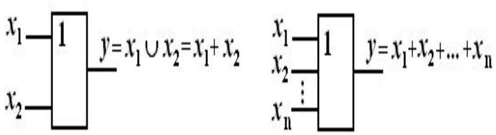
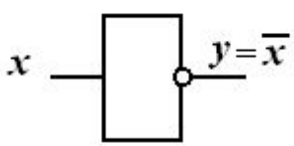
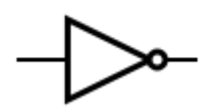
Можлива і зворотна система: H=0, L=1 – ***негативна логіка.***

Рівень вихідної напруги логічного елемента визначається рівнями напруг на входах та характером логічної операції.

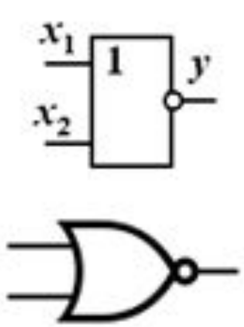
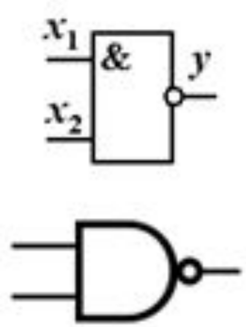
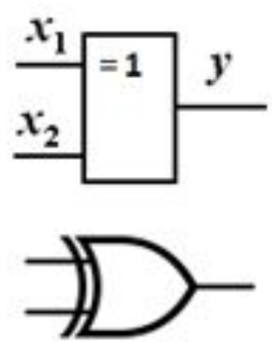
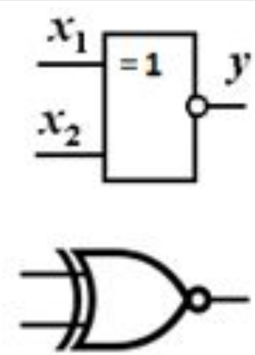
Для реалізації однієї логічної функції можуть використовуватись різні схеми.

Тому для спрощення конструкторської документації та вигляду принципових схем введено спеціальні позначення, які визначають лише логічну функцію електронної схеми і не розкривають її внутрішню структуру (тобто окремі елементи – діоди, транзистори чи операційні підсилювачі).

В таблиці показано позначення елементів відповідно до двох стандартів *IEC* (стандарт розроблений організацією *International Electrotechnical Commission*) та *ANSI* (розроблений *American National Standards Institute*).

Стандарт *IEC*	Стандарт *ANSI*
Схеми логічного **I**	
	
Схеми логічного **АБО**	
	
<u>Схеми логічного **НЕ**</u>	
	

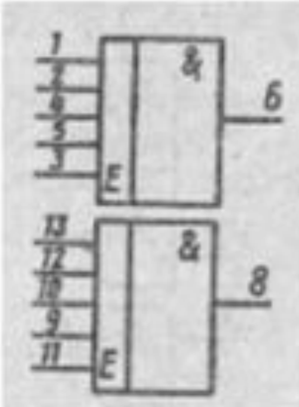
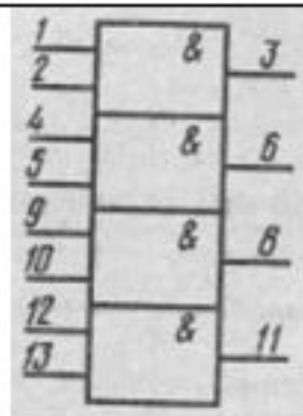
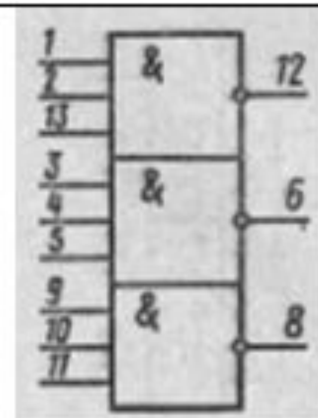
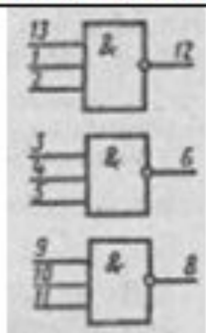
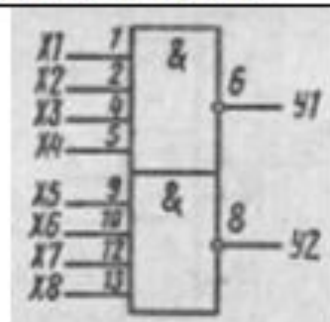
Допоміжні логічні функції та елементи

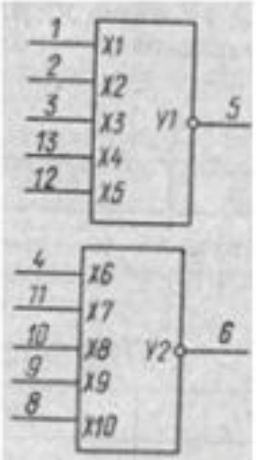
x_1	x_2	$y=\overline{x_1+x_2}$ **АБО-НЕ**	$y=\overline{x_1\cdot x_2}$ **І-НЕ**	$y=x_1\oplus x_2$ Виключне **АБО** - нерівнозначність	$y=\overline{x_1\oplus x_2}$ Виключне **АБО-НЕ** рівнозначність
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1
					

$$\overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2} \qquad \overline{x_1}\cdot\overline{x_2} + x_1\cdot x_2$$

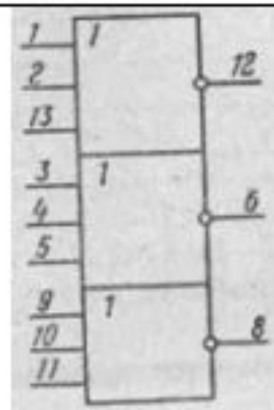
Промисловістю випускаються мікросхеми, які можуть містити в одному корпусі декілька логічних елементів одного типу або різних типів з заданою кількістю входів.

Тому при реалізації логічних функцій потрібно оптимізувати їх під вигляд реальних цифрових мікросхем, продумати послідовність з’єднання цих мікросхем та їх розташування на друкованій платі.

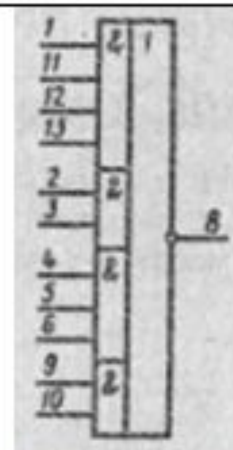
 Мікросхема К511ЛИ1 2 елементи типу 4 І	 Мікросхема К530ЛИ1 4 елементи типу 2 І	 Мікросхема К530ЛИ1 3 елементи типу 3 І-НЕ	 Мікросхема К533ЛИ6 2 елементи типу 4 І-
 Мікросхема К511ЛА2 3 елементи типу 3І-НЕ	 Мікросхема К530ЛА16 2 елементи типу 4І-НЕ	 Мікросхема К530ЛЛ1 4 елементи типу 2АБО	 Мікросхема КР531ЛЕ1 4 елементи типу 2 АБО-НЕ



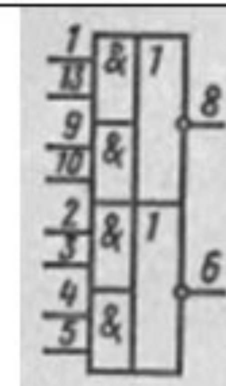
Мікросхема К531ЛЕ7
2 елементи типу 5
АБО-НЕ



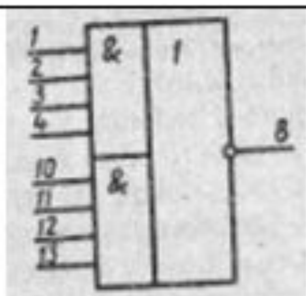
Мікросхема К533ЛЕ4
3 елементи типу 3
АБО-НЕ



Мікросхема К530ЛР9
логічний елемент 4-2-
3-2 І-4АБО-НЕ

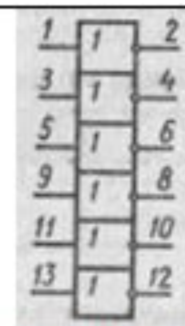


Мікросхема К530ЛР11
2 елементи типу 2-2І-
2АБО-НЕ



Мікросхема К533ЛР4
2 елементи типу 4І-
2АБО-НЕ

Мікросхема К533ЛР13
елемент (2-3-3-2)І-
4АБО-НЕ



Мікросхема К530ЛН2
6 елементів НЕ

Мікросхема К530ЛП5
4 елементи Виключне
АБО

В цифровій техніці задача перетворення параметрів сигналу, як правило, формується у формі таблиці перемикань, яка називається ***таблицею істинності***.

Таблиця істинності для 4 логічних змінних

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_0 ($2^0=1$)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
x_1 ($2^1=2$)	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x_2 ($2^2=4$)	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_3 ($2^3=8$)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**

Перед усім, треба знайти таку логічну функцію, яка б відповідала цій таблиці.

На наступному етапі цю функцію перетворюють у спрощену форму, яку потім реалізують за допомогою відповідної комбінації базових логічних схем.

Загалом, існують такі способи представлення (запису) логічних функцій:
аналітичний,
табличний,
за допомогою карт Карно,
графічний
кубічний.

Аналітично логічна функція може бути записана різними комбінаціями кон’юнкцій та диз’юнкцій логічних змінних. Зазвичай логічні функції записуються

1) у вигляді суми добутків логічних змінних (диз’юнкція кон’юнкцій) – *диз’юнктивна нормальна форма* (**ДНФ**);

$$y = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3}$$

2) у вигляді логічного добутку сум логічних змінних (кон’юнкція диз’юнкцій) - *кон’юнктивна нормальна форма*(**КНФ**).

$$y = (x_1 + x_2)(x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + x_3)$$

Якщо всі складові в ДНФ чи КНФ містять абсолютно всі логічні змінні даної функції з інверсіями або без них, такі форми називаються *досконалими нормальними формами.*

Добутки в ДДНФ називаються *мінтерми*, а суми в ДКНФ – *макстерми*.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_0 ($2^0=1$)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
x_1 ($2^1=2$)	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x_2 ($2^2=4$)	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_3 ($2^3=8$)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0

Досконала ДНФ:

$$y = \overline{x_0}\cdot\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3} + x_0\cdot\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3} + x_0\cdot\overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3} +$$

$$+\overline{x_0}\cdot x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3} + \overline{x_0}\cdot\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3 + x_0\cdot\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3 +$$

$$+\overline{x_0}\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3$$

Досконала КНФ:

$$y = (x_0 + \overline{x_1} + x_2 + x_3)\cdot(\overline{x_0} + \overline{x_1} + x_2 + x_3)\cdot(x_0 + x_1 + \overline{x_2} + x_3)\cdot$$

$$\cdot(\overline{x_0} + \overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)\cdot(\overline{x_0} + x_1 + x_2 + \overline{x_3})\cdot(x_0 + \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})\cdot$$

$$\cdot(\overline{x_0} + \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})\cdot(x_0 + x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})\cdot(\overline{x_0} + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$

Якщо замінити логічні змінні та їх заперечення одиницями та нулями, то кожна кон'юнкція буде представляти собою двійкове число

$$x_3\overline{x_2}x_1\overline{x_0} \Rightarrow 1010, \quad \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3} + x_4 \Rightarrow 1010$$

Такий перехід дозволяє представляти логічні функції у *досконалих скорочених формах*, до яких належать

канонічна сума

$$y_1 = \bigvee_0^{15} 6, 10, 11 = \overline{x_3}x_2x_1\overline{x_0} + x_3\overline{x_2}x_1\overline{x_0} + x_3\overline{x_2}x_1x_0$$

$$0110 + 1010 + 1011$$

канонічний добуток

$$y = \bigwedge_0^{7} 2, 4 = (x_2 + \overline{x_1} + x_0)(\overline{x_2} + x_1 + x_0)$$

$$010 + 100$$

Досконала диз’юнктивна нормальна форма запису дозволяє легко перейти до інших форм запису – *табличної* та *карт Карно*.

Табличний спосіб представлення полягає у тому, що функція задається у вигляді таблиці відповідності (таблиці істинності станів).

Від таблиці істинності зручно переходити до карти Карно, яка є компактною формою представлення таблиці істинності логічної функції із застосуванням для позначення комбінацій вхідних змінних циклічного коду Грея.

Особливістю карти Карно є те, що по горизонталі та по вертикалі задаються координати клітинок, якими виступають аргументи логічної функції. Тому кожна клітина має свою координату – 00, 01, 10, 11 – яка може бути представлена відповідною двійковою або десятковою цифрою. Значення функції записуються в відповідних комірках нулями та одиницями

X_0X_1 \ X_2X_3	00	01	11	10
00	1 [0]	1 [8]	[12]	[4]
01	[2]	[10]	1 [14]	1 [6]
11	[3]	[11]	[15]	[7]
10	1 [1]	[9]	1 [13]	1 [5]

X_2X_3 \ X_0X_1	00	01	11	10
00	1 [0]	[2]	[3]	1 [1]
01	1 [8]	[10]	[11]	[9]
11	[12]	1 [14]	[15]	1 [13]
10	[4]	1 [6]	[7]	1 [5]

X_0X_1 \ X_2	0	1
00	1 [0]	1 [4]
01	[2]	[6]
11	[3]	[7]
10	1 [1]	[5]

X_0 \ X_1X_2	00	01	11	10
0	1 [0]	1 [4]	[6]	[2]
1	[1]	[5]	1 [7]	1 [3]

Мінімізація логічних функцій за допомогою карт Карно

Мінімізація логічної функції полягає в заміні логічної функції, що представлена у вигляді досконалих ДНФ чи КНФ, іншою логічною функцією з мінімальною кількістю логічних змінних та операцій над ними.

<u>Мінімізація функції за допомогою карти Карно</u> виконується за наступними правилами

1 – вписати в карту Карно задані значення функції;

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
x_1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**

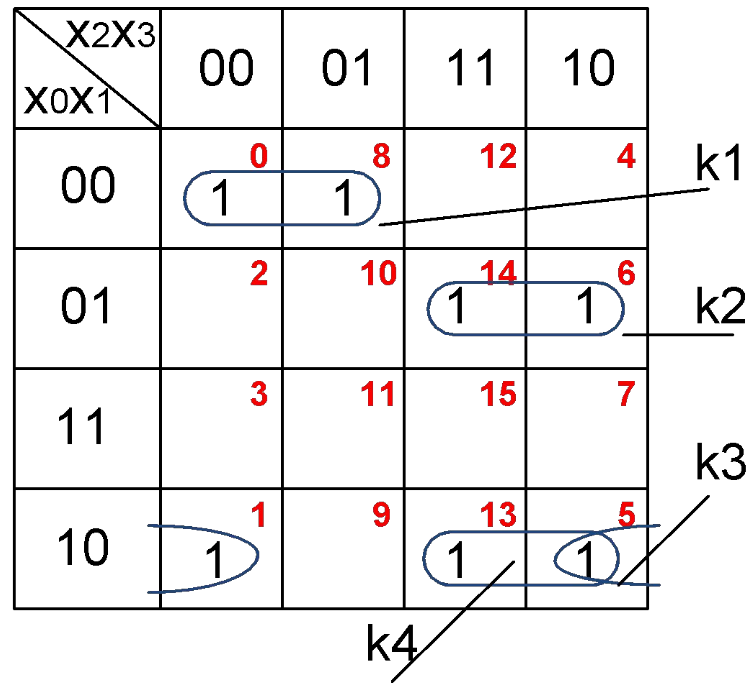
X_2X_3 / X_0X_1	00	01	11	10
00	0 1	8 1	12	4
01	2	10	14 1	6 1
11	3	11	15	7
10	1 1	9	13 1	5 1

2 – на карті Карно виділити області одиниць (для отримання мінімальної форми ДНФ) або нулів (для КНФ), для яких виконуються наступні вимоги

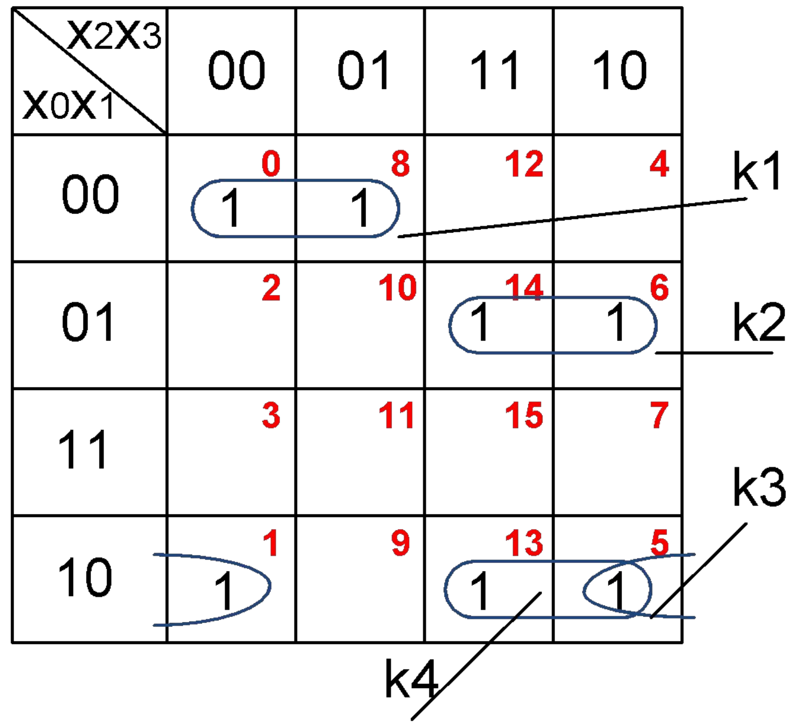
2.1) області мають бути квадратними чи прямокутними з розмірністю 2^n рядків та 2^m колонок (n,m=0,1,2… – цілі числа) та мати максимальний розмір;

2.2) покриття карти необхідно виконати мінімальною кількістю таких областей, причому області можуть перекриватися (це навіть є бажаним)

2.3) крім того, на карті верхній та нижній рядок, а також крайні права та ліва колонки вважаються сусідніми, і одиниці/нулі в них можуть бути об’єднані в одну область;



3 – кожна область, що містить 2^nх2^m одиниць (нулів) представляється в ДНФ (КНФ) одним мінтермом k_i (макстермом d_i), що містить на $k=n+m$ змінних менше, ніж ДДНФ (ДКНФ);



$$y_{ДНФ} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1x_2 + x_0\overline{x_1}\,\overline{x_3} + x_0\overline{x_1}x_2$$

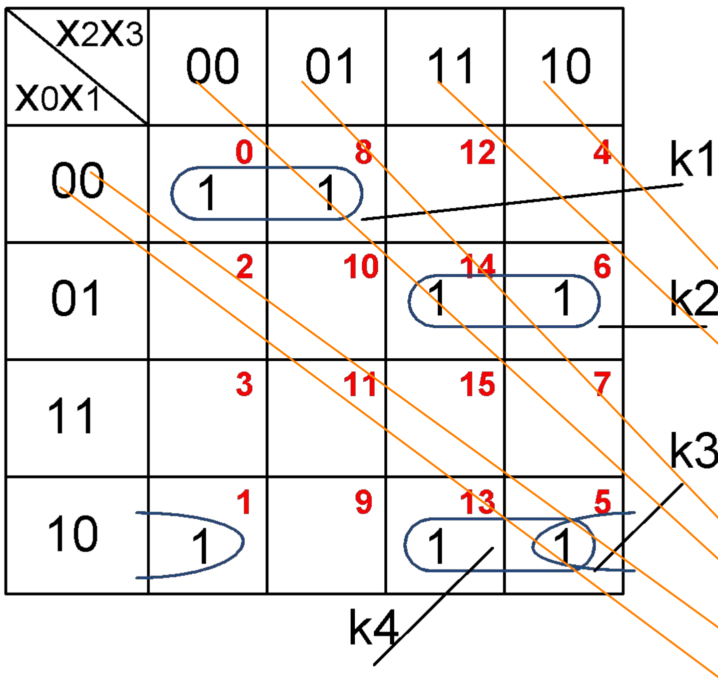
4 – аргумент враховується при формуванні мінтерму (макстерму) логічної функції лише в тому випадку, коли в межах обраної області одиниць/нулів він не змінює свого значення;

x_0x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10	
00	0: 1	8: 1	12	4	k1
01	2	10	14: 1	6: 1	k2
11	3	11	15	7	k3
10	1: 1	9	13: 1	5: 1	

k4

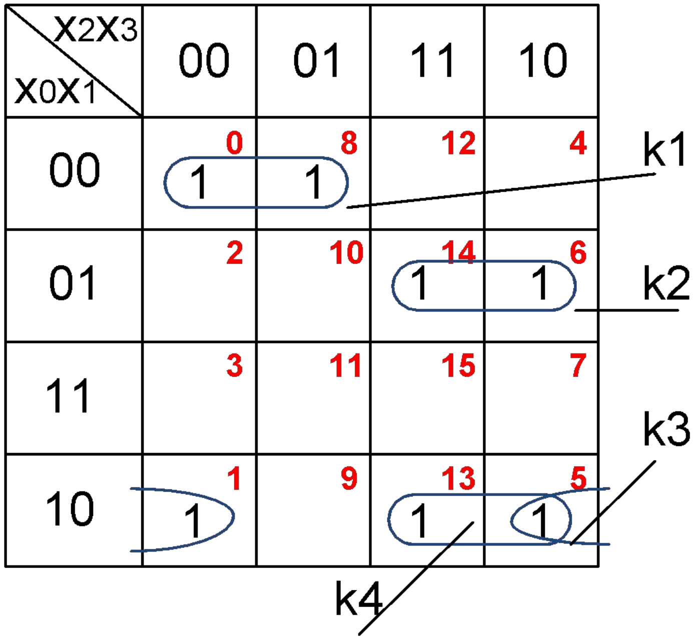
$$y_{ДНФ} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1x_2 + x_0\overline{x_1}\,\overline{x_3} + x_0\overline{x_1}x_2$$

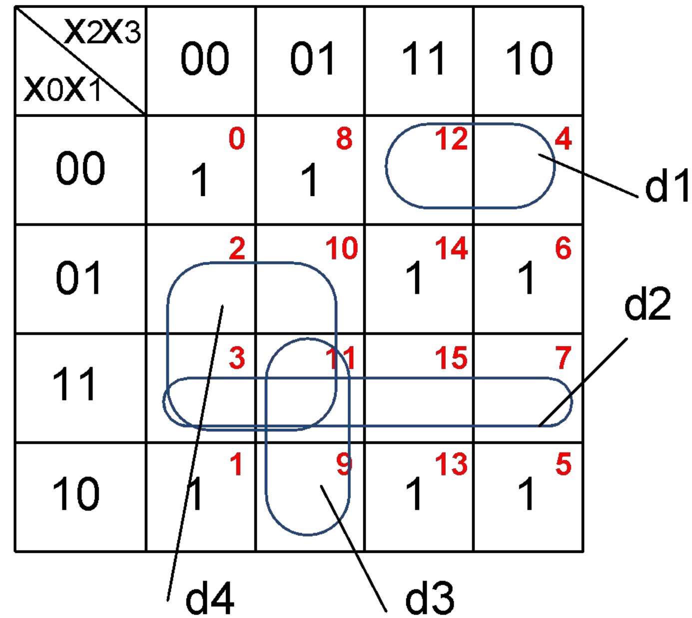
5 – при формуванні ДНФ/КНФ логічна змінна (аргумент) вписується в прямому вигляді x_i, якщо в межах області зберігає значення 1для ДНФ та 0 для КНФ, і з інверсією в протилежному випадку (0 для ДНФ та 1 для КНФ).



$$y_{ДНФ} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1x_2 + x_0\overline{x_1}\,\overline{x_3} + x_0\overline{x_1}x_2$$

6 – при складанні логічної функції в формі ДНФ для кожної області записується добуток змінних, а у випадку КНФ – сума змінних.





$$y_{ДНФ} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 =$$

$$= \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1x_2 +$$

$$+ x_0\overline{x_1}\,\overline{x_3} + x_0\overline{x_1}x_2$$

$$y_{КНФ} = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 =$$

$$= \left(x_0 + x_1 + \overline{x_2}\right)\left(\overline{x_0} + \overline{x_1}\right)$$

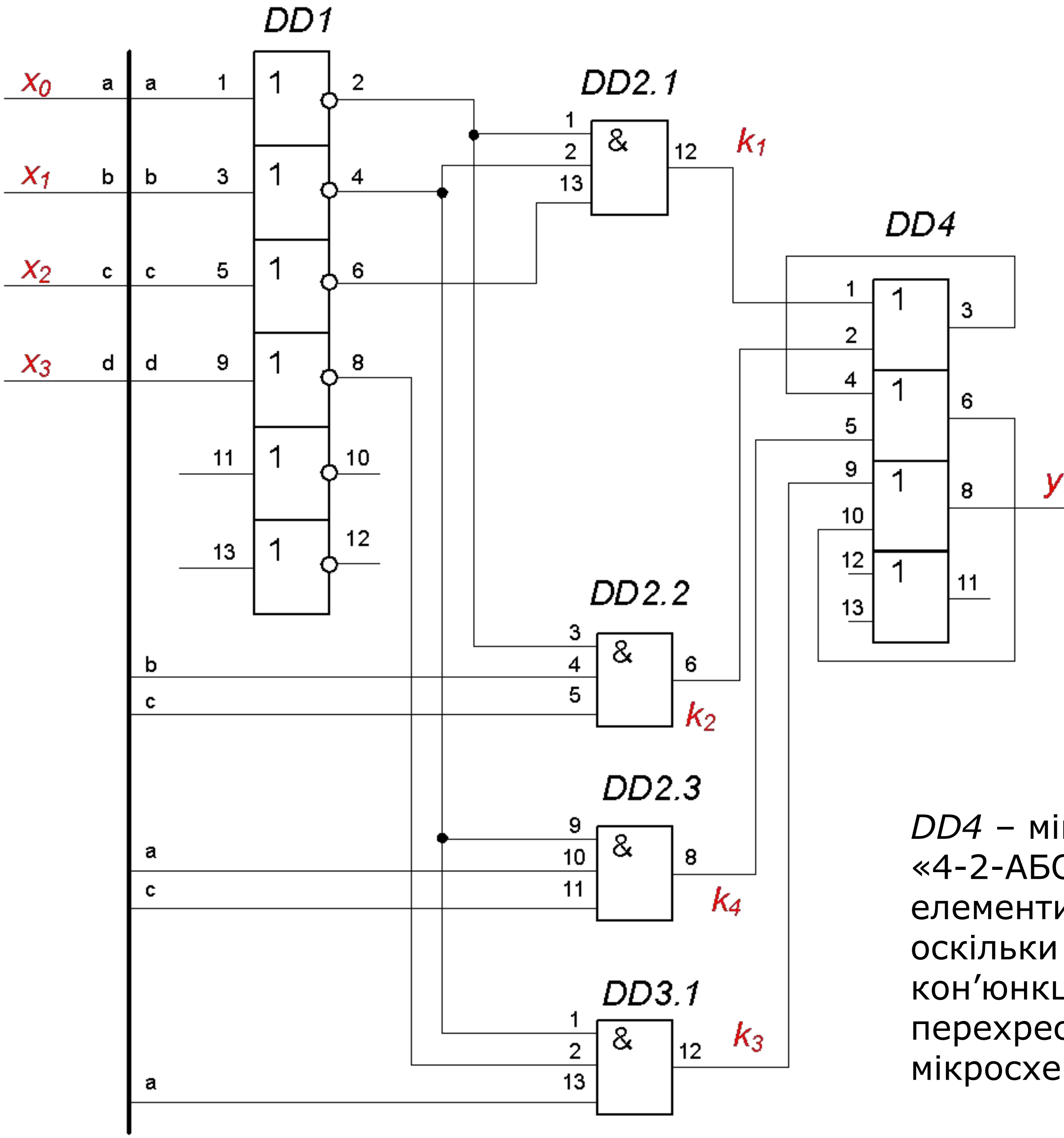
$$\left(\overline{x_0} + x_2 + \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} + x_2\right)$$

Для реалізації функції, записаної в формі ДНФ, необхідно 4 елементи типу «НЕ», 4 елементи типу «3-І» та 1 елемент типу «4-АБО» (відповідно до рівняння).

$$y_{ДНФ} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1x_2 + x_0\overline{x_1}\,\overline{x_3} + x_0\overline{x_1}x_2$$

Однак, серед реальних елементів наявні елементи наступних типів:
шість одновходових елементів «6-НЕ» в єдиному корпусі мікросхеми К530ЛН1,
три тривходових елементи І «3-3-І» - мікросхема К533ЛИ3,
чотири двовходових елементи АБО «4-2-АБО» - мікросхема К530ЛЛ1.

Зважаючи на це, схема виглядатиме так, як показано на рисунку.

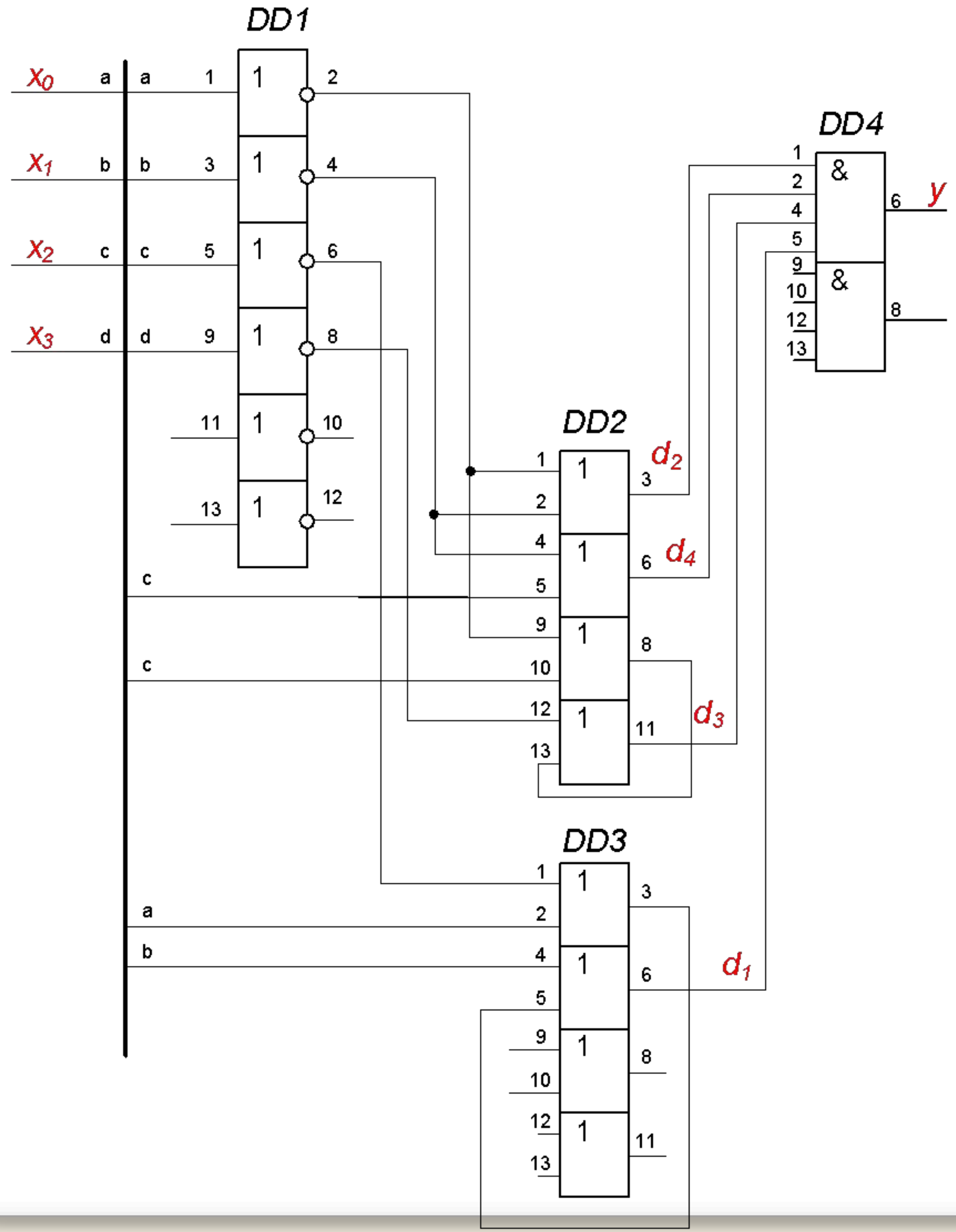


DD1 – мікросхема К530ЛН1 типу «6-НЕ» – з шести елементів використовуються лише чотири

DD2.1, *DD2.2*, *DD2.3*, *DD3.1* – складові частини (відповідно до схематичного позначення) мікросхеми К533ЛИ3 типу «3-3-І» – одна мікросхема використовується повністю, а в другій використано лише один елемент

DD4 – мікросхема К530ЛЛ1 типу «4-2-АБО» – використовуються 3 елементи з чотирьох, причому, оскільки необхідно додати чотири кон’юнкції, використовуються перехресні зв’язки з виходів мікросхеми на її входи

Схема для реалізації функції в формі КНФ



DD1 К530ЛН1 типу «6-НЕ»

DD2.1, *DD2.2*, *DD2.3*, *DD3.1* К533ЛИ3 типу «3-3-І»

DD3 К530ЛЛ1 типу «4-2-АБО»

DD4 К533ЛИ6 типу «2-4-І»